Vorlesung *Analysis III*
Wintersemester 2015/16
Humboldt-Universität zu Berlin

Prof. Dr. Markus Reiß

1. Übungsblatt

1. Zeigen Sie für Algebren $\mathscr{A}$ und σ-Algebren $\mathscr{F}$:
   (a) $A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{A}$.
   (b) $A_1, \ldots, A_m \in \mathscr{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^m A_i \in \mathscr{A}$, $\bigcap_{i=1}^m A_i \in \mathscr{A}$.
   (c) $A_n \in \mathscr{F}$, $n \geqslant 1 \Rightarrow \bigcap_{n\geqslant 1} A_n \in \mathscr{F}$.
   (d) Ist $(\mathscr{F}_i)_{i\in I}$ beliebige Familie von σ-Algebren auf X, so ist auch $\cap_{i\in I}\mathscr{F}_i$ σ-Algebra auf X.

2. Eine Funktion $f : X \to Y$ zwischen Messräumen $(X, \mathscr{F})$ und $(Y, \mathscr{G})$ heißt *messbar*, falls $\forall B \in \mathscr{G} :\ f^{-1}(B) \in \mathscr{F}$.
   (a) Weisen Sie $\mathcal{G} \subseteq f[\mathscr{F}]$ und $f^{-1}[\mathscr{G}] \subseteq \mathscr{F}$ für messbare f nach.
   (b) Beweisen Sie für beliebige Funktionen $f : X \to Y$, dass $f[\mathscr{F}]$ die größte σ-Algebra auf Y ist, so dass f auf $(X, \mathscr{F})$ messbar ist, sowie $f^{-1}[\mathscr{G}]$ die kleinste σ-Algebra auf X, so dass f mit Werten in $(Y, \mathscr{G})$ messbar ist.
   (c) Beschreiben Sie $f[\mathscr{B}_{\mathbb{R}}]$ sowie $f^{-1}[\mathscr{B}_{\mathbb{R}}]$ für folgende $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
   $$f(x) = 1, \quad f(x) = x^2, \quad f(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x),$$
   wobei $\mathbf{1}_A(x) := 1$ für $x \in A$ und $\mathbf{1}_A(x) := 0$ für $x \notin A$ gilt (*Indikatorfunktion*). Sind diese Funktionen f messbar bezüglich der Borel-σ-Algebren?

3. Beweisen Sie, dass die Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^d}$ jeweils erzeugt wird von $\mathscr{A}_{Fig}$, $\{Q \subseteq \mathbb{R}^d \mid Q \text{ verallgemeinerter Quader}\}$, $\{[a_1, \infty) \times \cdots \times [a_d, \infty) \mid a_1, \ldots, a_d \in D\}$ für eine dichte Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$.

4. Beweisen Sie für einen endlichen Inhalt μ auf einer Algebra $\mathscr{A}$ die Äquivalenz von:
   (a) μ ist Prämaß.
   (b) Für $A_n \in \mathscr{A}$ mit $A_n \subseteq A_{n+1}$, $A_n \uparrow A = \bigcup_n A_n \in \mathscr{A}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$ (*σ-Stetigkeit von unten*).
   (c) Für $A_n \in \mathscr{A}$ mit $A_n \supseteq A_{n+1}$, $A_n \downarrow A = \bigcap_n A_n \in \mathscr{A}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$ (*σ-Stetigkeit von oben*).
   (d) Für $A_n \in \mathscr{A}$ mit $A_n \supseteq A_{n+1}$, $A_n \downarrow \varnothing$ gilt $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$ (*σ-Stetigkeit bei $\varnothing$*).

   Für $\mu(X) = \infty$ gilt dasselbe mit der Ausnahme $(c) \Rightarrow (b)$ statt $(b) \iff (c)$.

Abgabe, nach Aufgaben getrennt, **vor** der Vorlesung am Freitag, dem 23.10.15.

Vorlesung *Analysis III*
Wintersemester 2015/16
Humboldt-Universität zu Berlin

Prof. Dr. Markus Reiß

2. Übungsblatt

1. In einem Maßraum $(X, \mathscr{F}, \mu)$ setze

$$\mathscr{N} := \{N \subseteq X \mid \exists A \in \mathscr{F} : N \subseteq A,\, \mu(A) = 0\}.$$

   Weisen Sie nach, dass $\bar{\mathscr{F}} := \{A \cup N \mid A \in \mathcal{F}, N \in \mathcal{N}\}$ σ-Algebra ist und $\bar{\mu} : \bar{\mathscr{F}} \to [0, \infty]$ mit $\bar{\mu}(A \cup N) := \mu(A)$ ein wohldefiniertes Maß auf $\bar{\mathscr{F}}$ definiert. Man nennt $(X, \bar{\mathscr{F}}, \bar{\mu})$ die *Vervollständigung* von $(X, \mathscr{F}, \mu)$ und im Fall $\bar{\mathscr{F}} = \mathscr{F}$ heißt $(X, \mathscr{F}, \mu)$ *vollständig.*

2. Zeigen Sie:

   (a) Die Maßerweiterung im Satz von Caratheodory ist stets vollständig.

   (b) Für das Lebesguemaß λ und die Cantormenge

$$C = \Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} t_k 3^{-k} \mid t_k \in \{0, 2\} \Big\} \subseteq [0, 1]$$

   gilt $C \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ und $\lambda(C) = 0$.
   Tipp: Betrachte $C_m \downarrow C$, wobei in C_m die $t_k \in \{0, 1, 2\}$ beliebig sind für $k \geqslant m$.

   (c) C besitzt die Kardinalität von $\mathbb{R}$ und die σ-Algebra der *Lebesguemengen*, d.h. der Maßerweiterung des Lebesguemaßes, besitzt die Kardinalität von $\mathscr{P}(\mathbb{R})$.
   Ohne Beweis: Mit transfiniter Induktion kann man $|\mathscr{B}_{\mathbb{R}}| = |\mathbb{R}|$ zeigen.

3. Der Messraum $(X, \mathscr{F})$ eines zweifachen Münzwurfs sei durch $X = \{0, 1\}^2$, $\mathscr{F} = \mathscr{P}(X)$ modelliert. $\mathscr{M}$ bestehe aus allen Ereignissen, die von höchstens einem der Münzwürfe abhängen:

$$\mathscr{M} = \Big\{\varnothing, \{(0,0), (0,1)\}, \{(1,0), (1,1)\}, \{(0,0), (1,0)\}, \{(0,1), (1,1)\}, X\Big\}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathscr{M}$ die σ-Algebra $\mathscr{F}$ erzeugt.

   (b) Finden Sie zwei Wahrscheinlichkeitsmaße, die auf $\mathscr{M}$ übereinstimmen, jedoch nicht auf $\mathscr{F}$.
   Tipp: Betrachten Sie unabhängige bzw. identische Münzwürfe.

4. Das Modell des unendlich langen Wurfes einer fairen Münze sei durch die Algebra $\mathscr{A}$ der Zylindermengen auf $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sowie den Inhalt $P(Z_n \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}) = |Z_n|/2^n$ für $n \in \mathbb{N}$, $Z_n \subseteq \{0,1\}^n$ gegeben. Beweisen Sie, dass P sogar ein Prämaß ist.
   Anleitung: Zeige zunächst $A_n \downarrow \varnothing \Rightarrow \exists n_0 : \bigcap_{n=1}^{n_0} A_n = \varnothing$ durch Widerspruch: Sonst gibt es eine Folge $a_n \in A_n$ und für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine Teilfolge (a_{n_k}), wo die ersten m Koordinaten übereinstimmen $(\forall k, l : \pi_m(a_{n_k}) = \pi_m(a_{n_l}))$ und mittels Diagonalfolgenargument existieren eine Teilfolge (a_{n_k}) und ein $a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ ein k_m existiert mit $\pi_m(a_{n_k}) = \pi_m(a)$ für $k \geqslant k_m$. Es folgt $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Abgabe, nach Aufgaben getrennt, **vor** der Vorlesung am Freitag, dem 30.10.15.

Vorlesung *Analysis III*
Wintersemester 2015/16
Humboldt-Universität zu Berlin

Prof. Dr. Markus Reiß

3. Übungsblatt

1. Es sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^2, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^2})$. Zeigen Sie folgende Eigenschaften der zugehörigen Verteilungsfunktion $F(x,y) := P((-\infty,x]\times(-\infty,y])$, $x,y \in \mathbb{R}$:

   (a) Durch die Angabe von F ist P eindeutig bestimmt.

   (b) Es gilt für alle $a_1 \leqslant b_1$, $a_2 \leqslant b_2$ (Skizze!)

   $$F(b_1,b_2) - F(a_1,b_2) - F(b_1,a_2) + F(a_1,a_2) = P\big((a_1,b_1] \times (a_2,b_2]\big) \geqslant 0.$$

   (c) Für $x^{(k)} \in \mathbb{R}^2$ mit $x_i^{(k)} \downarrow x_i$, $i = 1,\, 2$, für $k \to \infty$ folgt $F(x^{(k)}) \downarrow F(x)$.

   (d) $\lim_{k\to\infty} F(k,k) = 1$, $\lim_{k\to-\infty} F(k,k) = 0$.

   Jede Funktion F mit den Eigenschaften (b)-(d) generiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß P_F auf $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^2}$ mit Verteilungsfunktion F. Geben Sie die groben Beweisschritte dafür an.

2. Beweisen Sie für eine Funktionen $f : (X, \mathscr{F}) \to (\mathbb{R}^d, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^d})$:

   (a) f ist bereits messbar, wenn $f^{-1}(A) \in \mathscr{F}$ gilt für alle A in einem Erzeuger $\mathscr{E}$ von $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^d}$.

   (b) Ist X ein metrischer Raum, $\mathscr{F} = \mathscr{B}_X$ und f stetig, so ist f messbar.

   (c) f ist genau dann messbar, wenn alle Komponenten $f_1, \dots, f_d : X \to \mathbb{R}$ messbar sind (bzgl. $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$).

   (d) Betrachte auf $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ die σ-Algebra $\mathscr{B}_{\bar{\mathbb{R}}} = \{A \cup B \mid A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}, B \subseteq \{-\infty, +\infty\}\}$. Sind $f_n : X \to \bar{\mathbb{R}}$, $n \geqslant 1$, messbar, so auch $\sup_n f_n, \inf_n f_n, \limsup_{n\to\infty} f_n, \liminf_{n\to\infty} f_n$. Existiert $\lim_{n\to\infty} f_n$ punktweise, so ist auch $\lim_n f_n$ messbar.

3. Es bezeichne P das Wahrscheinlichkeitsmaß des unendlich langen (fairen) Münzwurfs auf $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma(\mathscr{A}_{Zyl}))$ (Konstruktion gemäß Fortsetzungssatz). $T : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $T((a_n)_n) = 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n}$ und $P^T(A) := P(T^{-1}(A))$, $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$, bezeichne das Bildmaß. Zeigen Sie:

   (a) Das sogenannte *Cantormaß* P^T ist ein wohldefiniertes Wahrscheinlichkeitsmaß und besitzt als Träger die Cantormenge C (der *Träger* eines Maßes μ auf $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge F, so dass $\mu(F^{\complement}) = 0$ gilt). [Beweis der Trägereigenschaft: 1 Zusatzpunkt]

(b) Die Verteilungsfunktion F von P^T ist stetig mit $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ und $\lambda(\{x \in [0,1] : F'(x) \text{ existiert und ist gleich Null}\}) = 1$.

(c) Zeichnen Sie den Funktionsgraphen von F (approximativ, Computereinsatz empfohlen).

4. Beweisen Sie folgende Version des *Satzes über monotone Klassen*: Es seien $\mathscr{H}$ ein Vektorraum von Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ und $\mathscr{E}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger der σ-Algebra $\mathscr{F}$ auf X mit:

   (a) $\mathbf{1}_X, \mathbf{1}_A \in \mathscr{H}$ für alle $A \in \mathscr{E}$;

   (b) $\mathscr{H}$ ist abgeschlossen bezüglicher monotoner Konvergenz: aus $f_n \in \mathscr{H}$, $n \geqslant 1$, mit $0 \leqslant f_1 \leqslant f_2 \leqslant \cdots$ (punktweise) und $f_n \uparrow f$ mit einer beschränkten Funktion f folgt $f \in \mathscr{H}$.

   Dann enthält $\mathscr{H}$ alle beschränkten $\mathscr{F}$-messbaren Funktionen.

Abgabe, nach Aufgaben getrennt, **vor** der Vorlesung am Freitag, dem 6.11.15. Version: 3.11.15

Vorlesung *Analysis III*
Wintersemester 2015/16
Humboldt-Universität zu Berlin

Prof. Dr. Markus Reiß

4. Übungsblatt

1. Beweisen Sie:

   (a) Ist $f : X \to [0, \infty]$ messbar auf $(X, \mathscr{F}, \mu)$, so definiert $\nu(A) := \int_A f \, d\mu$, $A \in \mathscr{F}$, ein Maß auf $\mathscr{F}$, das *absolut-stetig* bezüglich μ ist, d.h. $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$ erfüllt.

   (b) Auf dem Maßraum $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mu)$ folgt aus der Absolutstetigkeit eines Maßes ν auf $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ bezüglich einem σ-endlichen Maß μ die Existenz einer Funktion $f : \mathbb{N} \to [0, \infty]$, so dass $\nu(A) := \int_A f \, d\mu$ für alle $A \subseteq \mathbb{N}$ gilt.

2. Zeigen Sie für $\nu(A) := \int_A f \, d\mu$ wie in (1), dass $\int g \, d\nu = \int gf \, d\mu$ für jede messbare Funktion $g : X \to [0, \infty]$ und für jede messbare Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ mit $gf \in \mathscr{L}^1(\mu)$ gilt.

3. Weisen Sie für eine beschränkte Borel-messbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nach, dass das Riemann-Integral R-$\int_a^b f(x) \, dx$ und das Lebesgue-Integral $\int_{[a,b]} f(x) \, \lambda(dx)$ übereinstimmen, sofern f überhaupt Riemann-integrierbar ist. Geben Sie ein Beispiel einer solchen Funktion f an, die Lebesgue-integrierbar, aber nicht Riemann-integrierbar ist.
   Zusatzaufgabe: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann-integrierbar, so ist f bereits messbar bezüglich der Lebesgue-σ-Algebra auf $[a, b]$ (d.h. bzgl. $\{A \cap [a, b] \mid A \in \bar{\mathscr{B}}_{\mathbb{R}}\}$) und $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.

4. Überprüfen Sie, ob das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$ (mit stetiger Ergänzung bei $x = 0$) als uneigentliches Riemann-Integral und/oder als Lebesgue-Integral existiert.

Abgabe, nach Aufgaben getrennt, **vor** der Vorlesung am Freitag, dem 13.11.15.

Version: 17.11.15

Vorlesung *Analysis III*
Wintersemester 2015/16
Humboldt-Universität zu Berlin

Prof. Dr. Markus Reiß

5. Übungsblatt

1. Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt und $\rho \in \mathscr{L}^1(K, \mathscr{B}_K, \lambda|_K)$. Dann heißt

$$u(x) := \int_K \frac{\rho(y)}{|x-y|} dy, \; x \in \mathbb{R}^3 \setminus K, \text{ mit } |x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

   Newtonpotential bei Masseverteilung ρ. Weisen Sie nach, dass u eine *harmonische Funktion* ist, d.h. $\Delta u(x) = (\partial^2_{x_1} + \partial^2_{x_2} + \partial^2_{x_3})u(x) = 0$, $x \notin K$, gilt.
   Hinweis: Finden oder beweisen Sie den benötigten Satz zur Vertauschung von Ableitungen und Integral.

2. Beweisen Sie das *Lemma von Scheffé*: Sind f, f_n Wahrscheinlichkeitsdichten auf $(X, \mathscr{F}, \mu)$ (d.h. $f, f_n \geqslant 0$ messbar und $\int f \, d\mu = \int f_n \, d\mu = 1$) mit $f_n \to f$ μ-f.ü., so folgt bereits $\int |f_n - f| \, d\mu \to 0$.
   Anleitung: Betrachten Sie die Funktionenfolge $(f_n + f - |f_n - f|)_n$.

3. Beweisen Sie für Messräume $(X_i, \mathscr{F}_i)$, $i = 0, 1, 2$:
   (a) $\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2$ ist die kleinste σ-Algebra, so dass die Koordinatenprojektionen $\pi_i : X_1 \times X_2 \to X_i$, $i = 1, 2$, messbar sind.
   (b) $f : X_0 \to X_1 \times X_2$ ist genau dann $(\mathscr{F}_0, \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2)$-messbar, wenn $\pi_i \circ f$, $i = 1, 2$, messbar sind.

4. Zeigen Sie für die σ-Algebra $\bar{\mathscr{B}}_{\mathbb{R}^d}$ der Lebesguemengen:
   (a) $\bar{\mathscr{B}}_{\mathbb{R}^k} \otimes \bar{\mathscr{B}}_{\mathbb{R}^l} \subseteq \bar{\mathscr{B}}_{\mathbb{R}^{k+l}}$, $k, l \in \mathbb{N}$ (Hinweis: Aufgabe 3(a));
   (b) $\bar{\mathscr{B}}_{\mathbb{R}^k} \otimes \bar{\mathscr{B}}_{\mathbb{R}^l} \neq \bar{\mathscr{B}}_{\mathbb{R}^{k+l}}$, da $A \times \{y\}$ für $y \in \mathbb{R}^l$ und $A \subseteq \mathbb{R}^k$ in $\bar{\mathscr{B}}_{\mathbb{R}^{k+l}}$, aber für $A \notin \bar{\mathscr{B}}_{\mathbb{R}^k}$ nicht in $\bar{\mathscr{B}}_{\mathbb{R}^k} \otimes \bar{\mathscr{B}}_{\mathbb{R}^l}$ liegt.

Abgabe, nach Aufgaben getrennt, **vor** der Vorlesung am Freitag, dem 20.11.15. Version: 17.11.15

Vorlesung *Analysis III*
Wintersemester 2015/16
Humboldt-Universität zu Berlin

Prof. Dr. Markus Reiß

6. Übungsblatt

1. Zeigen Sie $v_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(1+d/2)}$ für das Volumen v_d der d-dimensionalen Einheitskugel, indem Sie mit Hilfe des Satzes von Tonelli bzw. der Transformationsformel berechnen:

   (a) $\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2} dx = \pi^{d/2}$;

   (b) $\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2} dx = dv_d \int_0^\infty e^{-r^2} r^{d-1} dr = v_d \Gamma(1 + d/2)$.

2. Es sei $K = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \in [r, R]\}$ eine Kugelschale mit $R > r \geqslant 0$ und $\rho > 0$ eine Dichtekonstante. Zeigen Sie für das Newton-Potential $u(x) := \int_K \frac{\rho}{|x-y|} dy$:

   (a) Für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt:
   $$u(x) = \rho \int_r^R \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{v^2 \cos\psi}{\sqrt{v^2 - 2v|x|\sin\psi + |x|^2}} d\psi d\varphi dv.$$

   (b) Ist $M := \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)\rho$ die Masse von K, so folgt $u(x) = M|x|^{-1}$ für $|x| \geqslant R$ (*das Potential gleicht dem eines Punktes gleicher Masse im Mittelpunkt*).

   (c) Für $r > 0$ und $|x| \leqslant r$ ist $u(x) = 2\pi\rho(R^2 - r^2)$ (*das Potential im Innern ist konstant*).

   (d) Für $r < |x| < R$ gilt $u(x) = \frac{4}{3}\pi\rho\frac{|x|^3 - r^3}{|x|} + 2\pi\rho(R^2 - |x|^2)$ und u ist stetig.

   (e) Was ist $\Delta u(x)$ für $x \in \mathbb{R}^3$ mit $|x| \notin \{r, R\}$?

3. Beweisen Sie folgenden Vergleichssatz: Ist $\mathscr{A}$ eine Algebra auf X und sind μ, ν Maße auf $\sigma(\mathscr{A})$ mit $\mu(A) \leqslant \nu(A)$ für $A \in \mathscr{A}$, so gilt $\mu(B) \leqslant \nu(B)$ für alle $B \in \sigma(\mathscr{A})$, sofern ν auf $\mathscr{A}$ σ-endlich ist ($\exists A_n \in \mathscr{A} : \nu(A_n) < \infty$, $A_n \uparrow X$).
   Hinweis: Fortsetzungssatz von Caratheodory.

4. Es seien P das Wahrscheinlichkeitsmaß (*Normalverteilung*) gegeben durch $P(A) = \int_A \varphi(x)\, dx$ mit $\varphi(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}$, $A \in \mathscr{B}_\mathbb{R}$, sowie $h(x) = x^2$ und P^h das Bildmaß auf $\mathscr{B}_\mathbb{R}$ von P unter h. Weisen Sie für alle messbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ nach:
   $$\int_\mathbb{R} f(y)\, P^h(dy) = \int_\mathbb{R} f(h(x))\varphi(x)\, dx = 2\int_0^\infty f(y)\varphi(h^{-1}(y))|(h^{-1})'(y)|\, dy.$$
   P^h besitzt also die Dichte $2\varphi(h^{-1}(y))|(h^{-1})'(y)| = (2\pi y)^{-1/2} e^{-y/2}$ für $y > 0$.

Abgabe, nach Aufgaben getrennt, **vor** der Vorlesung am Freitag, dem 27.11.15.

Vorlesung *Analysis III*
Wintersemester 2015/16
Humboldt-Universität zu Berlin

Prof. Dr. Markus Reiß

7. Übungsblatt

1. Zeigen Sie für $1 \leqslant p < q < \infty$:

   (a) $\mathscr{L}^q(\mu) \subseteq \mathscr{L}^p(\mu)$ für endliche Maße μ und $\|f\|_{L^p} \leqslant \mu(X)^{1/p-1/q}\|f\|_{L^q}$.

   (b) $\ell^p \subseteq \ell^q$ mit $\|a\|_{\ell^q} \leqslant \|a\|_{\ell^p}$.

   (c) Die umgekehrten Inklusionen in (a) und (b) sind falsch, und es gilt weder $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{L}^q(\mathbb{R})$ noch $\mathscr{L}^q(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$ für irgendwelche $1 \leqslant p < q < \infty$ (Gegenbeispiele!).

2. Auf dem Maßraum $(X, \mathscr{F}, \mu)$ betrachte den Raum

   $$\mathscr{L}^\infty(X) := \{f : X \to \bar{\mathbb{R}} \text{ messbar} \,|\, \|f\|_{L^\infty} < \infty\}$$

   mit dem *wesentlichen Supremum* $\|f\|_{L^\infty} = \inf\{R > 0 \,|\, \mu(\{|f(x)| \geqslant R\}) = 0\}$.

   (a) Weisen Sie nach, dass $\|\bullet\|_{L^\infty}$ eine Seminorm auf $\mathscr{L}^\infty(\mu)$ ist und bestimmen Sie den Quotientenraum $L^\infty(\mu)$, auf dem $\|\bullet\|_{L^\infty}$ eine Norm ist.

   (b) Überprüfen Sie die Aussagen für $\mathscr{L}^p-$ und L^p-Räume aus der Vorlesung und aus Aufgabe 1 auf ihre Richtigkeit im Fall $p = \infty$ (dabei sei $1/\infty := 0$). Klï¿½ren Sie insbesondere, ob $L^\infty(\mu)$ ein Banachraum ist.

3. Beweisen Sie für $1 \leqslant p < \infty$:

   (a) In jedem Maßraum $(X, \mathscr{F}, \mu)$ liegen die einfachen Funktionen *dicht* in $L^p(\mu)$, d.h. zu $f \in L^p(\mu)$ gibt es einfache Funktionen f_n mit $\|f - f_n\|_{L^p} \to 0$.

   (b) In $L^p([a, b])$, $-\infty < a < b < \infty$, liegen die stetigen Funktionen $C([a, b])$ dicht.
   Anleitung: Approximieren Sie zunächst $\mathbf{1}_{(c,d]}$ mit $a \leqslant c < d \leqslant b$ durch stetige Funktionen und dann $\mathbf{1}_A$ für Borelmengen A durch Summen von $\mathbf{1}_{(c_i,d_i]}$.

   Freiwillig: Gelten die Aussagen auch noch für $p = \infty$? Gilt (b) auch für $L^p(\mathbb{R}^d)$?

4. Beweisen Sie für die *Legendre-Polynome* $P_0(x) = 1$,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

(a) $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ bildet eine Basis im Vektorraum der reellen Polynome vom Grad n oder kleiner.

(b) $(\sqrt{n + 1/2} P_n)_{n \geqslant 0}$ bildet ein Orthonormalsystem in $L^2([-1, 1])$.

(c) Bestimmen Sie für $f(x) = \sin(\pi x)$ die $L^2([-1, 1])$-Projektionen $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \bigl(k + \frac{1}{2}\bigr) \langle f, P_k \rangle P_k(x)$ für $n = 0, 1, 2, 3$ und zeichnen Sie diese zusammen mit f in ein Koordinatensystem.

Freiwillig: Berechnen Sie f_n und $\|f - f_n\|$ in $L^2([-1, 1])$ für $n \leqslant 100$ numerisch und plotten Sie sowohl die Funktionen (Auswahl) als auch separat $\|f - f_n\|$ als Funktion von n. Können Sie $\|f - f_n\| \to 0$ beweisen?

Abgabe, nach Aufgaben getrennt, **vor** der Vorlesung am Freitag, dem 4.12.15.

Vorlesung *Analysis III*
Wintersemester 2015/16
Humboldt-Universität zu Berlin

Prof. Dr. Markus Reiß

8. Übungsblatt

1. Bestimmen Sie die abstrakte Fourierreihe von $f(x) = \frac{\pi}{2} - |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$. Weisen Sie nach, dass diese in der Tat punktweise gegen f konvergiert und leiten Sie durch Betrachtung von $f(0)$ die Formel
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$
ab. Welche Identität liefert die Parsevalsche Gleichung?

2. Es sei $f(x) = x/2$, $x \in [-\pi, \pi]$. Zeigen Sie:
   (a) Es gilt $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$ für $x \in (-\pi, \pi)$. Wogegen konvergiert die Fourierreihe für $x = (2k+1)\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$?
   (b) Welche Formel ergibt sich für $x = \frac{\pi}{2}$?
   (c) Zeigen Sie, dass die gliedweise differenzierte Fourierreihe an keinem Punkt $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.
   (d) *Freiwillig:* Zeichnen Sie f und die Partialsummen s_n sowie die Césaro-Mittel σ_n für $n = 1, 2, 3, 5, 10, 100$ in ein Koordinatensystem und diskutieren Sie das sogenannte *Gibbsphänomen* aus der Literatur. Wieso kann σ_n nicht gleichmäßig gegen f konvergieren?

3. Beweisen Sie den Weierstraßschen Approximationssatz: Für jedes kompakte Intervall $[a, b]$ liegen die Polynome $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ dicht in $(C([a, b]), \|\bullet\|_\infty)$. Anleitung:
   (a) Durch Reskalieren genügt es, die Aussage für $[a, b] = [0, \pi]$ zu beweisen.
   (b) Durch Spiegelung genügt es, die Aussage für $(C_{per}([-\pi, \pi]), \|\bullet\|_\infty)$ zu beweisen.
   (c) Die Taylorentwicklung eines trigonometrischen Polynoms $t : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ konvergiert gleichmäßig auf $[-\pi, \pi]$ gegen t.
   (d) Die Aussage folgt aus der Tatsache, dass die trigonometrischen Polynome dicht in $(C_{per}([-\pi, \pi]), \|\bullet\|_\infty)$ liegen.

4. Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen jeweils Untermannigfaltigkeiten des angegebenen Raums sind, und bestimmen Sie ggf. ihre Dimension:

   (a) der Zylinder $M_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$;

   (b) die Neilsche Parabel $M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 = y^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$;

   (c) die Kurve $M_3 = \{(\cos(t), \sin(2t)) \mid t \in (0, 2\pi)\} \subseteq \mathbb{R}^2$;

   (d) das verallgemeinerte Ellipsoid $M_4 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle Ax, x\rangle = 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$ für eine symmetrische, positiv semi-definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

   1 Zusatzpunkt für Zeichnungen von $M_1 - M_4$.

Abgabe, nach Aufgaben getrennt, **vor** der Vorlesung am Freitag, dem 11.12.15. Version: 3.12.15

Vorlesung *Analysis III*
Wintersemester 2015/16
Humboldt-Universität zu Berlin

Prof. Dr. Markus Reiß

Freiwilliges 9. Übungsblatt

1. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $\varphi : T \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion und $t \in T$. Beweisen Sie detailliert:

   (a) Gegebenenfalls nach Umnummerieren der Koordinaten gilt $\det(\frac{\partial(\varphi_1,\dots,\varphi_k)}{\partial(t_1,\dots,t_k)}(t)) \neq 0$.

   (b) Es gibt eine Umgebung $T' \subseteq T$ von x und $V \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, so dass $(\varphi_1, \dots, \varphi_k) : T' \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus ist.

   (c) $\Phi : T' \times \mathbb{R}^{n-k} \to V \times \mathbb{R}^{n-k}$ mit $\Phi(t_1, \dots, t_n) = \varphi(t_1, \dots, t_k) + (0, \dots, 0, t_{k+1}, \dots, t_n)^\top$ ist ein C^1-Diffeomorphismus mit $\Phi(T' \times \{0\}) = \varphi(T')$.

   (d) $\varphi(T')$ ist eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $\varphi : T' \to \varphi(T')$ ist ein Homöomorphismus.

2. Für $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ betrachte das aufgespannte *Parallelotop*
$$P(v_1, \dots, v_k) = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in [0,1]\}$$
   und setze $A = (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}^{n \times k}$. Zeigen Sie:

   (a) Im Fall $k = n$ gilt $Vol_n(P(v_1, \dots, v_n)) := \lambda_n(P(v_1, \dots, v_n)) = |\det(A)|$.

   (b) Im Fall $k < n$ und $v_i \in E_k$ (d.h. $v_i = (w_i, 0)^\top$ mit $w_i \in \mathbb{R}^k$) setze $Vol_k(P(v_1, \dots, v_k)) = |\det(B)|$ mit $B = (w_1, \dots, w_k) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ sowie $Vol_k(OP(v_1, \dots, v_k)) = Vol_k(P(v_1, \dots, v_k))$ für jede orthogonale Matrix $O \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dies impliziert für beliebige $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$, $k \in \{1, \dots, n\}$
$$Vol_k(P(v_1, \dots, v_k)) = \sqrt{\det(A^\top A)}.$$

3. Es sei $h : (0,1) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $M = \{x \in (0,1) \times \mathbb{R} \mid x_2 = h(x_1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ die Untermannigfaltigkeit des Graphen von h. Bestimmen Sie die *Länge* $Vol_1(M)$ von M. Welche Funktion h liefert die kürzeste Verbindung zwischen zwei beliebigen Punkten $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in (0,1) \times \mathbb{R}$ mit $x_1 \neq x_2$?

4. Betrachten Sie das verallgemeinerte Ellipsoid M_4 aus Aufgabe 8.4(d) für eine strikt positiv-definite Matrix A. Bestimmen Sie:

   (a) für jedes $p \in M_4$ den Tangential- und Normalenraum an M_4.

   (b) den Maßtensor und die Gramsche Determinante von M_4 in $p \in M_4$.

   (c) das $(n-1)$-dimensionale Volumen von M_4.

Abgabe, nach Aufgaben getrennt, **vor** der Vorlesung am Freitag, dem 8.1.16.

Version: 5.1.16

Vorlesung *Analysis III*
Wintersemester 2015/16
Humboldt-Universität zu Berlin

Prof. Dr. Markus Reiß

10. Übungsblatt

1. Die Karten $\varphi_j : T_j \to V_j \subseteq M$, $j = 1, \dots, J$, mögen einen endlichen Atlas der Untermannigfaltigkeit M bilden, und $\alpha_j : M \to [0,1]$ mit $\alpha_j \circ \varphi_j$ messbar, $j = 1, \dots, J$, sei eine *untergeordnete Zerlegung der Eins*, d.h. $\alpha_j|_{M \setminus V_j} = 0$ und $\sum_{j=1}^J \alpha_j = 1$. Zeigen Sie, dass dann für integrierbare $f : M \to \mathbb{R}$ unabhängig von der Wahl von (α_j) gilt
$$\int_M f(x)\, S(dx) = \sum_{j=1}^J \int_M \alpha_j(x) f(x)\, S(dx),$$
wobei die Integrale auf der rechten Seite über das Kartengebiet V_j erklärt sind.

2. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit und $\varphi : T \to V \subseteq M$ eine Karte. Mit $v \times w \in \mathbb{R}^3$ werde das Vektorprodukt von $v, w \in \mathbb{R}^3$ bezeichnet. Beweisen Sie:

   (a) Die Gramsche Determinante erfüllt $g(t) = \|\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t) \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(t)\|^2$, $t \in T$.

   (b) Ist $\mathscr{A}$ ein orientierter Atlas von M, so definiert
   $$\nu(p) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t) \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(t)}{\|\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t) \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(t)\|},$$
   mit beliebiger Karte $\varphi \in \mathscr{A}$ um $p \in M$ und $t = \varphi^{-1}(p)$, ein stetiges Einheitsnormalenfeld auf M.

   Hinweis: Zeigen Sie ggf. folgende Formeln für $a, b, c \in \mathbb{R}^3$:
   $$\det(a,b,c) = \langle a \times b, c\rangle,\ \det(a \times b, a, b) = \|a \times b\|^2,\ \det\begin{pmatrix} \langle a,a\rangle & \langle a,b\rangle \\ \langle a,b\rangle & \langle b,b\rangle \end{pmatrix} = \|a \times b\|^2.$$

3. Es seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine orientierte k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $k \geqslant 2$, und $\Omega \subseteq M$ besitze glatten Rand.

   (a) Konstruieren Sie einen Atlas $\mathscr{A}$ rand-adaptierter Karten von M, so dass für den vorgegebenen orientierten Atlas $\mathscr{A}'$ von M gilt:
   $$\forall \varphi : T \to V \in \mathscr{A}\ \exists \varphi' : T' \to V' \in \mathscr{A}' : V \subseteq V' \text{ und } \det(D((\varphi')^{-1} \circ \varphi)) > 0.$$

   (b) Schließen Sie: $\mathscr{A}$ ist ein orientierter Atlas rand-adaptierter Karten von M mit derselben Orientierung wie $\mathscr{A}'$ (d.h. $\mathscr{A} \cup \mathscr{A}'$ ist orientiert).

4. Ist $g : U \to \mathbb{R}^3$, $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, ein differenzierbares Vektorfeld, so bezeichnet $\operatorname{div} g(x) = (\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3})(x)$ die *Divergenz* und

$$\operatorname{rot} g(x) = \nabla \times g(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} (x)$$

die *Rotation* von g. Weisen Sie für $a \in \mathbb{R}^3$, $f \in C^2(U)$, $F \in C^2(U; \mathbb{R}^3)$ nach:

(a) $\operatorname{div}(a \times F) = -\langle a, \operatorname{rot} F\rangle$ (kurz: $\langle \nabla, a \times F\rangle = -\langle a, \nabla \times F\rangle$);

(b) $\operatorname{rot}(af) = -a \times \nabla f$ (kurz: $\nabla \times (af) = -a \times \nabla f$);

(c) $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$ (kurz: $(\nabla \times \nabla) f = 0$);

(d) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(F)) = 0$ (kurz: $\langle \nabla, \nabla \times F\rangle = 0$).

Freiwillig: Welche Formeln ergeben sich, wenn a durch ein differenzierbares Vektorfeld $A : U \to \mathbb{R}^3$ ersetzt wird?

5. *Freiwillig:* Beweisen Sie formal, dass das Möbiusband nicht orientierbar ist.

Abgabe, nach Aufgaben getrennt, **vor** der Vorlesung am Freitag, dem 15.1.16. Version: 8.1.16

Vorlesung *Analysis III*
Wintersemester 2015/16
Humboldt-Universität zu Berlin

Prof. Dr. Markus Reiß

11. Übungsblatt

1. Beweisen Sie:
   (a) Sind A, B zusammenhängende Teilmengen eines metrischen Raumes und $A \cap B \neq \varnothing$, so ist $A \cup B$ zusammenhängend.
   (b) Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, so sind die Zusammenhangskomponenten $C(x)$ für $x \in U$ offen.
   (c) Mit den Ergebnissen der Vorlesung folgt, dass jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ in offene Wegzusammenhangskomponenten zerfällt.

2. Betrachten Sie das Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)^\top/(x_1^2 + x_2^2)$, wobei $U \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ offen. Weisen Sie $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$ nach und geben Sie Mengen U an, auf denen f konservativ bzw. nicht konservativ ist.
   Zusatzaufgabe: Charakterisieren Sie die Mengen U, auf denen f konservativ ist.

3. Zeigen Sie: Ist $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $(U_j)_{j=1,\dots,J}$ eine offene Überdeckung von K, so existiert eine (U_j) untergeordnete Zerlegung der Eins (α_j) auf einer Umgebung von K mit $\alpha_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, \dots, J$. Anleitung:
   (a) $f(t) = e^{-1/t}\mathbf{1}(t > 0)$ liegt in $C^\infty(\mathbb{R})$ und $\chi(x) = \frac{f(4-\|x\|^2)}{f(4-\|x\|^2)+f(\|x\|^2-1)}$, $x \in \mathbb{R}^n$, erfüllt $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi(x) = 1$ für $\|x\| \leqslant 1$, $\chi(x) \in (0,1)$ für $\|x\| \in (1,2)$ und $\chi(x) = 0$ für $\|x\| \geqslant 2$.
   (b) Zu jedem $x \in K$ wähle $j(x)$ mit $x \in U_{j(x)}$. Dann gibt es $x_i \in K$, $\varepsilon_i > 0$, so dass $K \subseteq \bigcup_{i=1}^M B_{\varepsilon_i}(x_i)$ und $B_{3\varepsilon_i}(x_i) \subseteq U_{j(x_i)}$.
   (c) Für $\chi_i(x) := \chi((x - x_i)/\varepsilon_i)$ und
   $$\alpha_i'(x) := \frac{\chi_i(x)}{\sum_{m=1}^M \chi_m(x) + \prod_{m=1}^M (1 - \chi_m(x))}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$
   betrachte $\alpha_j := \sum_{i:j(x_i)=j} \alpha_i'$.

4. Folgern Sie aus dem Gaußschen Integralsatz für $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen sowie $\Omega \subseteq U$ kompakt mit glattem Rand und äußerem Einheitsnormalenfeld ν: für $u, v \in C^2(U)$ gelten mit $\Delta u := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, $\partial_\nu u = \langle \nabla u, \nu \rangle$ die Formeln
   (a) $\int_\Omega \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u \, dS$;
   (b) $\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dx = \int_{\partial\Omega} u \partial_\nu v \, dS - \int_\Omega u \Delta v \, dx$;
   (c) $\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) \, dx = \int_{\partial\Omega} (u\partial_\nu v - v\partial_\nu u) \, dS$.

Abgabe, nach Aufgaben getrennt, **vor** der Vorlesung am Freitag, dem 22.1.16.

Vorlesung *Analysis III*
Wintersemester 2015/16
Humboldt-Universität zu Berlin

Prof. Dr. Markus Reiß

12. Übungsblatt

1. Beweisen Sie auf elementarem Weg den Gaußschen Integralsatz für Quader $\Omega = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] \subseteq \mathbb{R}^d$. Das Integral über den Rand $\partial\Omega$ wird dabei als Summe der Integrale über die $2d$ begrenzenden Hyperflächen aufgefasst.

2. Es gelte $a \in \Omega^\circ$ für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, kompakt mit glattem Rand, und $h : U \to \mathbb{R}$ sei harmonisch für $U \supseteq \Omega$ offen. Es bezeichne

$$N_a(x) := \frac{-1}{(n-2)\operatorname{Vol}_{n-1}(S_{n-1})} \|x-a\|^{2-n}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{a\},$$

das *Newtonpotential* um a. Zeigen Sie:

(a) N_a ist eine harmonische Funktion mit $\nabla N_a(x) = \frac{1}{\operatorname{Vol}_{n-1}(S_{n-1})} \frac{x-a}{\|x-a\|^n}$.

(b) Für $r > 0$ so klein, dass $B_r(a) \subseteq \Omega^\circ$, folgt aus der Greenschen Formel (A 11.4(c)): $\int_{\partial(\Omega \setminus B_r(a))} (h\partial_\nu N_a - N_a \partial_\nu h) dS = 0$.

(c) Es gilt $\lim_{r \downarrow 0} \int_{\partial B_r(a)} (h\partial_\nu N_a - N_a \partial_\nu h) dS = h(a)$.

(d) $h(a)$ lässt sich also nur aus den Randwerten von h auf $\partial\Omega$ berechnen:

$$h(a) = \int_{\partial\Omega} (h\partial_\nu N_a - N_a\partial_\nu h)\, dS.$$

Freiwillig: Schließen Sie daraus die *Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen*:

$$h(a) = \frac{1}{\operatorname{Vol}_{n-1}(rS_{n-1})} \int_{rS_{n-1}} h(a+z)\, S(dz), \text{ solange } B_r(a) \subseteq U.$$

3. Weisen Sie folgende Identität der linearen Algebra für $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,3} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $v, w \in \mathbb{R}^3$ nach

$$\langle Av, w\rangle - \langle Aw, v\rangle = \langle (a_{32} - a_{23}, a_{13} - a_{31}, a_{21} - a_{12})^\top, v \times w\rangle.$$

Schließen Sie daraus für $\varphi \in C^1(T; V)$, $f \in C^1(V; \mathbb{R}^3)$ mit $T \subseteq \mathbb{R}^2$, $V \subseteq \mathbb{R}^3$ offen

$$\Big\langle \frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial t_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}\Big\rangle - \Big\langle \frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial t_2}, \frac{\partial\varphi}{\partial t_1}\Big\rangle = \Big\langle (\operatorname{rot} f)\circ\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial t_1} \times \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}\Big\rangle.$$

4. Für ein Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^3$, $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, heißt $g \in C^1(U;\mathbb{R}^3)$ *Vektorpotential*, falls $\operatorname{rot} g = f$ gilt. Zeigen Sie:

   (a) Ist $f \in C^1(U;\mathbb{R}^3)$, so ist $\operatorname{div} f = 0$ (f ist *divergenzfrei*) notwendige Bedingung für die Existenz eines Vektorpotentials $g \in C^2(U;\mathbb{R}^3)$.

   (b) Ist $f \in C^1(U;\mathbb{R}^3)$ und U sternförmig, so ist $\operatorname{div} f = 0$ auch hinreichend für die Existenz eines Vektorpotentials.
   Tipp: Ist U sternförmig um $x_0 = 0$, so betrachte $g(x) = \int_0^1 t f(tx) \times x \, dt$.

   Geben Sie jeweils ein Beispiel f für die Existenz und Nicht-Existenz eines Vektorpotentials g an. Bestimmen Sie auch g im ersten Fall.

Abgabe, nach Aufgaben getrennt, **vor** der Vorlesung am Freitag, dem 29.1.16. Version: 2.2.16

Vorlesung *Analysis III*
Wintersemester 2015/16
Humboldt-Universität zu Berlin

Prof. Dr. Markus Reiß

Probeklausur

1. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen, wahr oder falsch sind. Jede richtige Antwort wird mit +0,5 Punkten berwertet, jede Falsche mit -0,5. Insgesamt sind für diese Aufgabe nicht mehr als fünf und nicht weniger als null Punkte zu erreichen. (5P)

Frage	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)	(j)	(k)	(l)
wahr												
falsch												
weiß nicht												

(a) Der Weg $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ mit $c(t) = (\arctan(t), e^{-t^2}, t^2, (1+t^2)^{-3})$ hat endliche Länge.

(b) Jeder Weg in $\mathbb{R}^2$, dessen Definitionsbereich ein beschränktes Intervall ist, hat endliche Länge.

(c) Das Bild der Funktion $f : [-1, 0] \cup [1, 2] \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \begin{cases} x & \text{für } x \in [-1, 0] \\ y & \text{für } x \in [1, 2] \end{cases}$ ist wegzusammenhängend.

(d) Die Menge $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$ ist sternförmig.

(e) Die Menge $\overline{B_1(0)} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leqslant 1\}$ ist eine dreidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.

(f) Die leere Menge ist eine orientierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.

(g) Die Funktion $(x, y) \mapsto \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ ist auf $[0, 1]^2$ Lebesgue-integrierbar.

(h) Sei $E_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\}$ die k-dimensionale „Ebene“ im $\mathbb{R}^n$. Dann ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, falls es zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in U$, und einen C^1-Diffeomorphismus $F : U \to F(U)$ mit $F(M \cap U) = E_{n-k} \cap F(U)$ gibt.

(i) Das Bild einer injektiven Immersion ist eine Untermannigfaltigkeit.

(j) Die Vereinigung zweier k-dimensionaler Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ ist eine Untermannigfaltigkeit.

(k) Die 3-Sphäre vom Radius $r > 0$, $rS_3 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid |x| = r\}$, hat das 3-dimensionale Volumen $\mathrm{Vol}_3(rS_3) = 2\pi^2 r^3$.

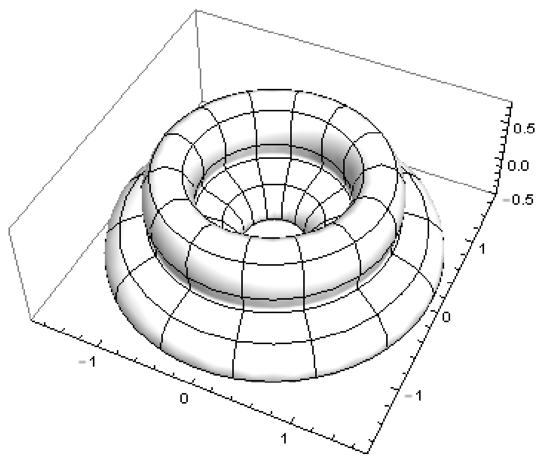
(l) Eine Ruhelage $\bar{x}$ ist asymptotisch stabil, wenn $\lim_{t\to\infty} \varphi(t, x) = \bar{x}$ für alle x in einer Umgebung von $\bar{x}$ gilt.

2. (a) Formulieren und beweisen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für einen Maßraum $(X, \mathscr{F}, \mu)$. (2P)

   (b) Seien $f_n : X \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $f : X \to \mathbb{R}$ messbare Funktionen auf einem Messraum $(X, \mathscr{F})$ mit endlichem Maß μ, sowie $f_n \to f$ μ-fast überall. Beweisen Sie, dass dann für alle stetigen und beschränkten Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch $\lim_{n\to\infty} \int_X g(f_n(x))\mu(dx) = \int_X g(f(x))\mu(dx)$. (2P)

   (c) Zeigen Sie anhand von Beispielen, dass in 2b weder auf die Stetigkeit, noch auf die Beschränktheit der Funktionen g verzichtet werden kann. (1P)

3. Sei $M = \{(r\cos\alpha, r\sin\alpha, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r = 1+f(\beta)\cos\beta, z = f(\beta)\sin\beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ für eine stetig differenzierbare, 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to (0,1)$.



   (a) Weisen Sie auf zwei verschiedenen Wegen nach, dass M eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit ist. (2P)

   (b) Bestimmen Sie für $p \in M$ den Tangentialraum T_pM und den Normalenraum N_pM. (1P)

   (c) Bestimmen Sie die Gram'sche Determinante und das zweidimensionale Volumen von M. (2P)

4. Sei $f(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$ und $P(A) := \int_A f d\lambda$ für $A \in \bar{\mathscr{B}}_{[-1,1]}$ mit Lebesguemaß λ.

   (a) Beweisen Sie im Detail, dass P ein (wohldefiniertes) Wahrscheinlichkeitsmaß ist. (3P)

   (b) Sei $g(x) = x^2 \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$, $x \in [-1,1]$. Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion von g in $L^2(P)$ auf den Unterraum $\mathrm{span}\{f_0, f_1, f_2\}$, wobei $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$. (2P)

Abgabe, nach Aufgaben getrennt, **vor** der Vorlesung am Freitag, dem 5.2.16.