Umstülpung

Hans Georg Braun

Summary

With the help of a simple geometric construction, it is possible to demonstrate an indication given by Rudolf Steiner that the skull bone is an inversion of a long bone. Inversion means that a form can be turned inside out and vice versa. The construction comprises moving all points of a form by a constant distance (inversion constant) through a single point (inversion point). So that a true inversion can take place, the inversion point must lie inside the basic form and all points must pass through the inversion point. In the inversion, the inside of the basic form reproduces itself between the inverted borderline of the basic form and the circumcircle. The circumcircle is the circle round the inversion point with a radius corresponding to the size of the inversion constant.

Vorbemerkungen

Unter Umstülpung verstehe ich einen Prozess, der das Innere einer Form nach Außen wendet und das Äußere nach innen. Am Anfang meiner Überlegungen stand für mich die Frage nach einer geometrischen Möglichkeit der Darstellung der Aussage *Rudolf Steiners*, ein Schädelknochen sei die Umstülpung eines Röhrenknochens.

Ich bin kein Mathematiker, sondern Architekt mit einer Liebe zur Geometrie. So werde ich versuchen darzustellen, wie ich begonnen habe, einen geometrischen Vorgang wie ein Naturereignis zu beobachten, und möchte schildern, wie ich den Weg zu einer Lösung des obigen Problems erlebt habe. Es mögen die Leserinnen und Leser angeregt werden, diese Schritte nachzuvollziehen.

Da ich damals, vor mehr als dreißig Jahren, als ich zum ersten Mal mit der nachfolgenden Tatsache in Berührung kam, zum Glück noch keine Antwort auf die Möglichkeit einer geometrischen Darstellung fand, suchte ich nach einer entsprechenden Lösung. In der Zwischenzeit habe ich erfahren, dass es die verschiedensten Ansätze gibt, sich mit dieser komplexen Frage auseinander zu setzen. Meine nachfolgenden Ausführungen sollen dazu einen weiteren Beitrag leisten.

Im Anschluss an Goethes so genannte «Wirbeltheorie des Schädels» schildert *Rudolf Steiner* im 10. Vortrag der «Allgemeinen Menschenkunde» Folgendes: «Man kann nun verhältnismäßig leicht einsehen, dass die Schädelknochen durch Umwandlung,

durch Metamorphose aus den Wirbelknochen des Rückgrats hervorgehen. Aber nun wird es sehr schwierig, auch Gliedmaßenknochen, schon die Gliedmaßenknochen des Kopfes, obere und untere Kinnlade – Goethe hat es versucht, aber auf äußerliche Weise noch – als Umformung, als Metamorphose der Wirbelknochen beziehungsweise der Kopfknochen aufzufassen. Warum ist das so? Das beruht darauf, dass ja allerdings ein röhriger Knochen, den Sie irgendwo haben, auch eine Metamorphose, eine Umwandlung des Kopfknochens ist, aber auf ganz besondere Art. Sie können verhältnismäßig leicht den Rückgratwirbel sich zum Kopfknochen umgewandelt denken, indem Sie sich einzelne Teile vergrößert, andere verkleinert denken. Aber Sie kriegen nicht so leicht aus dem Röhrenknochen der Arme oder der Beine die schalenartigen Kopfknochen heraus. Da müssen Sie nämlich zuerst eine gewisse Prozedur vornehmen, wenn Sie die herausbekommen wollen. Sie müssen mit dem Röhrenknochen der Arme oder der Beine dieselbe Prozedur vornehmen, die Sie vornehmen würden, wenn Sie beim Anziehen eines Strumpfes oder eines Handschuhes das Innere zuerst nach außen wenden würden, also wenn Sie es umwenden würden. Nun ist es verhältnismäßig leicht, sich vorzustellen, wie ein Handschuh oder ein Strumpf aussieht, wenn das Innere nach außen gewendet wird. Aber der Röhrenknochen ist nicht gleichmäßig. Er ist nicht so dünn, dass er gleichmäßig im Inneren und außen gebaut wäre. Er ist verschieden im Inneren und außen gebaut. Würden Sie Ihren Strumpf so konstruieren und dann elastisch machen, dass Sie ihm äußerlich eine künstlerische Form geben würden mit allerlei Vorsprüngen und Einbuchtungen und ihn dann wenden, dann würden Sie nach außen nicht mehr dieselbe Form erhalten, wie die, die dann im Innern ist, wenn Sie ihn umgewendet haben. Und so ist es bei dem Röhrenknochen. Man muss das Innere nach außen und das Äußere nach innen kehren, dann kommt die Form des Kopfknochens heraus, so dass die menschlichen Gliedmaßen nicht nur umgewandte Kopfknochen sind, sondern außerdem noch umgewendete Kopfknochen. Woher rührt das? Das rührt davon her, dass der Kopf seinen Mittelpunkt irgendwo im Innern hat; er hat ihn konzentrisch. Nicht hat in der Mitte der Kugel die Brust ihren Mittelpunkt; die Brust hat den Mittelpunkt sehr weit weg ...

Und wo hat denn das Gliedmaßensystem den Mittelpunkt? Jetzt kommen wir auf die zweite Schwierigkeit. Das Gliedmaßensystem hat den Mittelpunkt im ganzen Umkreis. Der Mittelpunkt des Gliedmaßensystems ist überhaupt eine Kugel, also das Gegenteil von einem Punkt. Eigentlich ist überall der Mittelpunkt; daher können Sie sich überallhin drehen und von überallher strahlen die Radien ein. Sie vereinigen sich mit Ihnen.» (*Steiner* 1919)

Meine erste Überlegung war zu betrachten, was geschieht, wenn ich einen Handschuh so umwende, dass sein Inneres zum Äußeren wird. Dabei muss jeder «Punkt» des Handschuhes durch eine Mitte hindurch gezogen werden. Ich versuchte dies auf eine einfache geometrische Konstruktion zu übertragen. Genau betrachtet müsste ich jeden Punkt mit dem entsprechenden Abstand durch diese Mitte «ziehen». Aber was geschieht nun bei dieser Konstruktion, bei der zentralen Spiegelung in der Ebene? Eigentlich geschieht gar nichts Besonderes, auf jeden Fall keine Veränderung der Grundform im Sinne einer Metamorphose. Das ursprüngliche Bild erscheint nur in einer anderen Lage, im Übrigen bleibt sie der Grundform ähnlich, ja sogar gleich. Genau betrachtet passiert mit dem Handschuh etwas Ähnliches, nur eben, dass sein Inneres nach außen gekehrt wird. Das ist hier bei obiger Konstruktion jedoch nicht der Fall. Ein Punkt, der innerhalb der Grundform liegt, kommt auch bei seinem «Spiegelbild» ins Innere zu liegen, und ein Punkt, der sich außerhalb befindet, wird auch dort außen sein. So einfach kann es also mit der Umstülpung nicht sein; und so suchte ich weiter.

Nach einigem Überlegen fand ich eine Konstruktion, die ich nachfolgend beschreiben und am Beispiel des Kreises – als «vollkommene» Form – systematisch untersuchen möchte.

Anfänglich wandte ich meine Konstruktion in spielerischer Art an, indem ich versuchte, verschiedene Grundformen «umzustülpen», zuerst ein Dreieck. Dabei ergaben sich mir einige erstaunliche Resultate, wobei ich jedoch noch nicht die Antwort auf die Frage nach der Umstülpung des Röhrenknochens fand. Fasziniert von der «Umstülpung» eines Pentagramms um sein eigenes Zentrum beendigte ich vorläufig meine damaligen Bemühungen.

Jahrelang ruhte in mir die Erfahrung mit der geometrischen Umstülpung. Erst im Verlaufe des Anthroposophischen Studienjahres am Goetheanum bei Herrn Georg Goelzer kam ich darauf zurück. Nun entdeckte ich mit einer erweiterten Betrachtungsmöglichkeit neue Zusammenhänge.

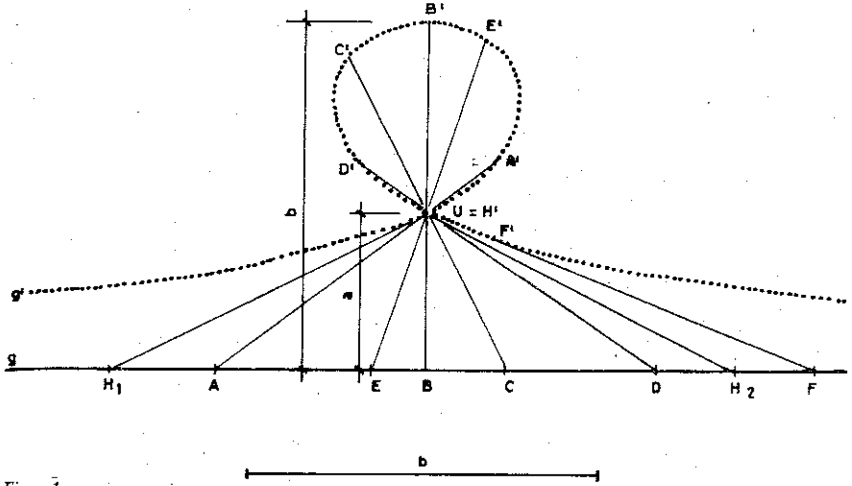
Beschreibung der Umstülpungskonstruktion

Wie in den Vorbemerkungen erwähnt, führte der Versuch, eine Umstülpung mit einer zentralen Spiegelung herbeizuführen, zu keinem Resultat. So suchte ich weiter. Bald kam ich auf eine Idee, die mich zu faszinieren begann und mit der ich mich einige Zeit intensiv befasste.

Die Disposition ist einfach. Ich wähle eine Form und einen Punkt. Nun ziehe ich alle Punkte der Grundform mit einer konstanten Strecke durch oder, wenn dies nicht möglich ist, wenigstens in Richtung dieses Punktes.

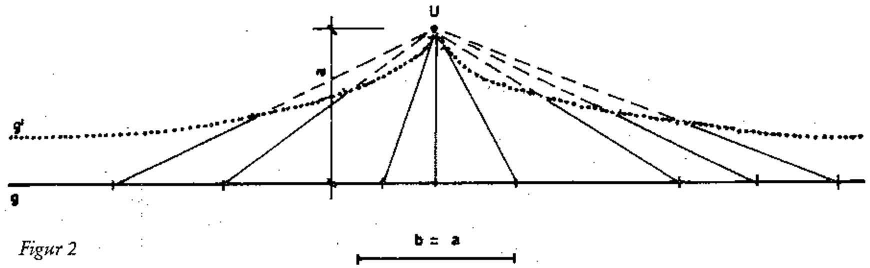
Anhand einer Geraden möchte ich das Grundprinzip in der *Figur 1* darstellen:

Die Bedingungen sind eine Form (g), ein Umstülpungspunkt (U) mit genau definierter Lage (a) und eine konstante Strecke (b), mit welcher jeder Punkt der Form durch respektive in Richtung U gezogen wird. Das ist das ganze Geheimnis. Das durch diese Konstruktion entstandene Abbild der Geraden ist eine schleifenförmige Kurve, wobei der Punkt U = H' der einzige Punkt ist, dem auf der Grundform zwei Punkte entsprechen, nämlich H_1 und H_2. Für die beiden auslaufenden Äste der Kurve, die aus Punkten entstehen, die nur in Richtung U gezogen werden können, ist die Gerade g eine Asymptote, das heißt, die Kurve nähert sich ihr immer mehr, ohne sie im Endlichen je zu berühren. Im Unendlichen jedoch werden Kurve und Gerade einen gemeinsamen Punkt aufweisen.



Figur 1

g	=	Gerade resp. Grundform, die umzustülpen ist
U	=	Umstülpungspunkt
A bis H	=	Punkte der Grundform
A' bis H'	=	Punkte der umgestülpten Form
a	=	Abstand des Umstülpungspunktes von der Grundform
b	=	Umstülpungskonstante (AA' = BB' etc.)
B'	=	Scheitelpunkt der Kurve

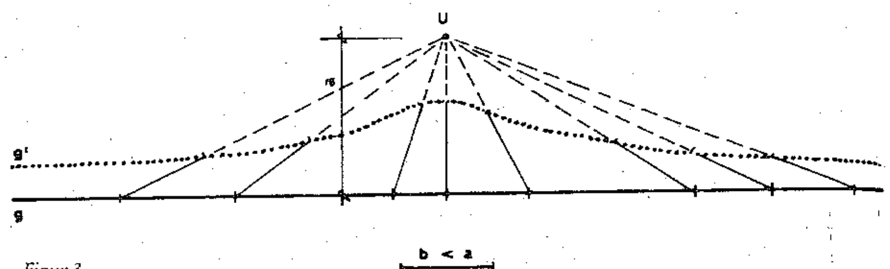


Figur 2

Als Erstes habe ich die verschiedenen Erscheinungsformen untersucht durch Veränderung der Verhältnisse von a und b. Im Grunde genommen spielt es keine Rolle, welche der beiden Größen variiert wird. Der Einfachheit halber wähle ich den Abstand fest, jedoch die Länge der Konstante wird verändert. Je nach Wahl können recht unterschiedliche Bilder entstehen:

1) Ist b > a, bildet sich eine Schleife. Je mehr sich b dem Abstand a nähert, desto kleiner wird die Schleife (*Figur 1*).

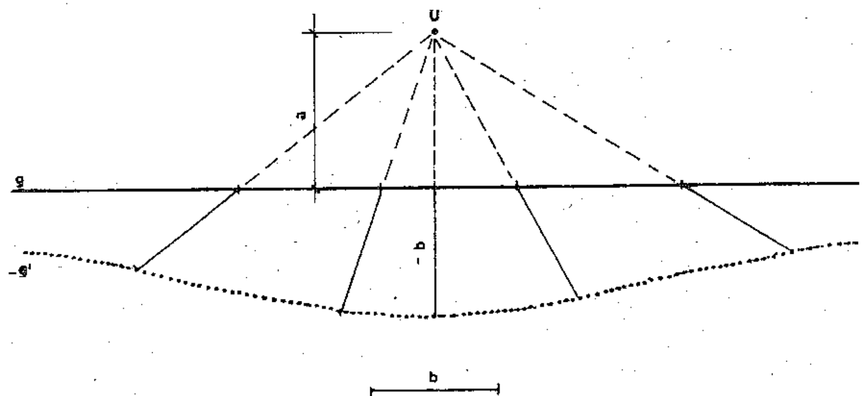
2) Ist b = a, kommt es gerade nicht mehr zu einer Schleifenbildung, die Kurve erreicht ihren Scheitelpunkt in U und bildet dort eine Spitze (*Figur 2*).



Figur 3

3) Ist b < a, entsteht eine leicht ausgebauchte Kurve mit ihrem Scheitelpunkt auf dem Lot von U auf die Gerade g (*Figur 3*).

4) Ist b negativ, spielt es keine Rolle, wie groß der Wert ist; es entsteht immer eine ähnliche, ebenfalls ausgebauchte Kurve wie bei *Figur 2*, jedoch unterhalb der Geraden g. Dieser Fall wird mich weiter nicht mehr interessieren, weil er meiner Konstruktionsdefinition widerspricht. Das Vorzeichen bei b deutet an, dass eine Richtungsänderung stattfindet. Die Punkte werden nicht mehr in Richtung U gezogen. Es findet das Gegenteil statt; die Punkte entfernen sich um die Strecke b vom Umstülpungspunkt. Es wird nie zu einer Schleifenbildung kommen. Nach meinem Verständnis sind die Kurven g' und -g' zwei voneinander unabhängige Kurven. Beide nähern sich immer mehr der Geraden g, bis sie diese im Unendlichen berühren. Die Gerade g wird im Unendlichen zur Tangente an die Kurven g' und -g'. Keine der beiden schneidet je die Gerade g.



Figur 4

5) Und was entsteht, wenn b = 0 oder b = ∞ ist?
Ist b = 0, fallen g und g' zusammen.

Ist b = ∞, wird g' eine Parallele zu g im Abstand von a. Also geht g' durch U. B' liegt somit im Unendlichen und wird, ich möchte sagen, zum «fernen Wendepunkt» von g'. U ist gleichzeitig die «Umstülpung» des «Fernpunktes» von g und der Schnittpunkt der unendlich großen Schlaufe von g'.

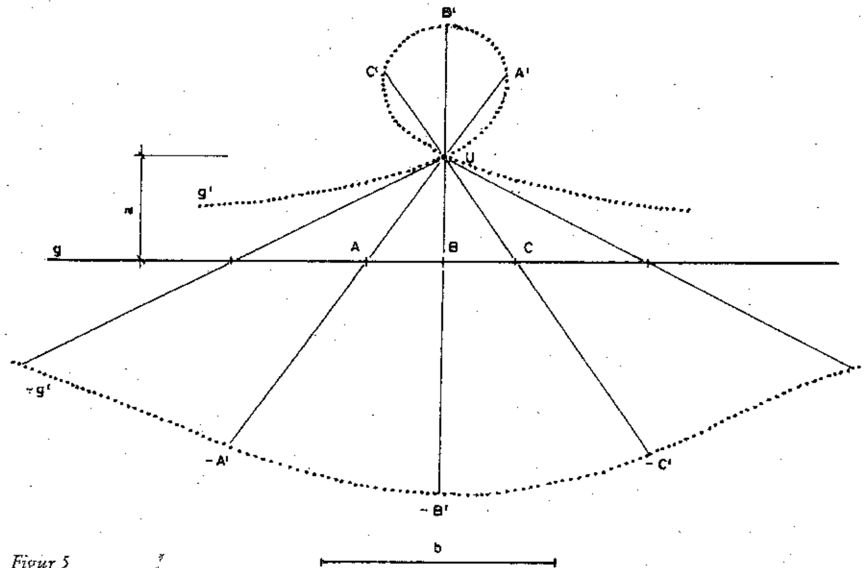
6) Eine letzte Frage ist: Was müssen wir erwarten, wenn a = 0 oder a = ∞ wird?

Ist a = 0, so befindet sich U auf der Geraden g und g' fällt wieder mit g zusammen. Es findet überhaupt keine Veränderung statt.

Ist a = ∞, wird g' eine Parallele zu g im Abstand von b.

Die oben beschriebene Kurve ist bekannt unter dem Namen «Konchoide des *Nikomedes*» (*Figur 5*). Sie ist eine Kurve vierter Ordnung, die meiner Umstülpungskurve entspricht. Sie ist auch in ihren drei unterschiedlichen Erscheinungsformen beschrieben, jedoch stets von der bei mir in *Figur 4* gesondert dargestellten «negativen» Kurve begleitet, also mit dem Abbild der Punkte der Geraden mit den Konstanten +b und -b. Das heißt, g' schneidet die Gerade g im Unendlichen und wird dort zu -g'.

Nikomedes war ein griechischer Mathematiker und lebte ca. 225 v. Chr.



Figur 5

In der vorliegenden Arbeit kann ich mich nicht weiter auf die Konchoide einlassen, denn dazu fehlen mir die nötigen Kenntnisse. Daher spreche ich fortan nur noch von «Umstülpung». Meine Voraussetzung ist, in jedem Falle nur mit konkret festgelegten Stücken zu arbeiten. Die Größen sind immer positiv und bewegen sich zwischen Unendlich und Null.

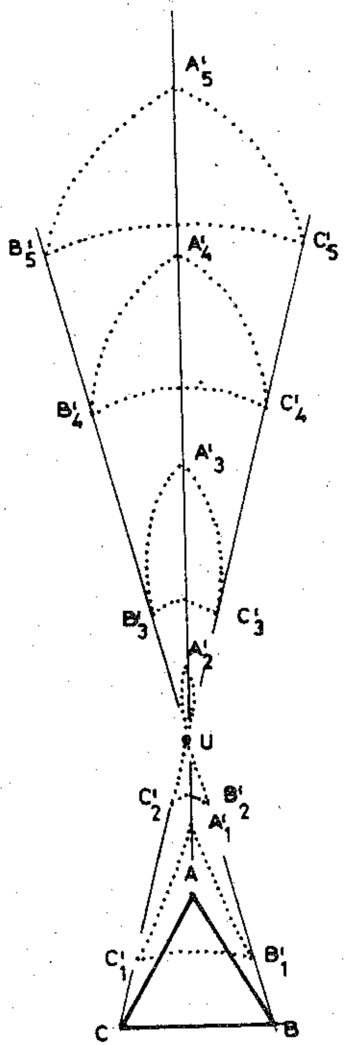
Ich habe in einzelnen Fällen auch versucht, Konstruktionen mit negativen Umstülpungskonstanten auszuführen, aber ich fand darin, im Zusammenhang mit der Umstülpung, keinen Sinn. Auch würde sich meine Definition der Konstruktion ändern, da die Punkte der Grundform nicht mehr in Richtung gegen den Umstülpungspunkt gezogen würden, sondern vom Umstülpungspunkte weg.

Im Anschluss an die Konstruktion der «Umstülpung» einer Geraden begann ich damals, im Verlaufe meiner praktischen Untersuchungen weitere Grundformen der gleichen Konstruktion zu unterziehen. Erst versuchte ich einen Kreis und hernach ein Dreieck «umzustülpen». Da ich bei diesen Versuchen den Umstülpungspunkt vorerst immer außerhalb der Grundform angenommen hatte, fand ich noch keine echte Umstülpung. Vor allem Umstülpungen des Kreises überzeugten mich anfänglich nicht, weil ich lediglich eine Verformung feststellte.

Figur 6 zeigt meine ersten Versuche der «Umstülpung» eines Dreiecks mit verschieden großen Umstülpungskonstanten. Mit einer gewissen Enttäuschung stellte ich fest, dass noch keine vollständige Umstülpung stattfand. Bei der Serie von Dreiecken beobachtete ich zwar, dass die «Innenseite» einer Kante beim Durchgang durch den Umstülpungspunkt zur «Außenseite» wird, so wie dies bei einer Lemniskate der Fall ist; dennoch bleiben alle Flächenpunkte im Innern der «umgestülpten» Form.

Bei meinem letzten Versuch, der «Umstülpung» eines Pentagramms, fand ich endlich, was ich suchte, ja, wie ich viel später entdeckte, sogar einen Ansatz zur Umstülpung des Röhrenknochens.

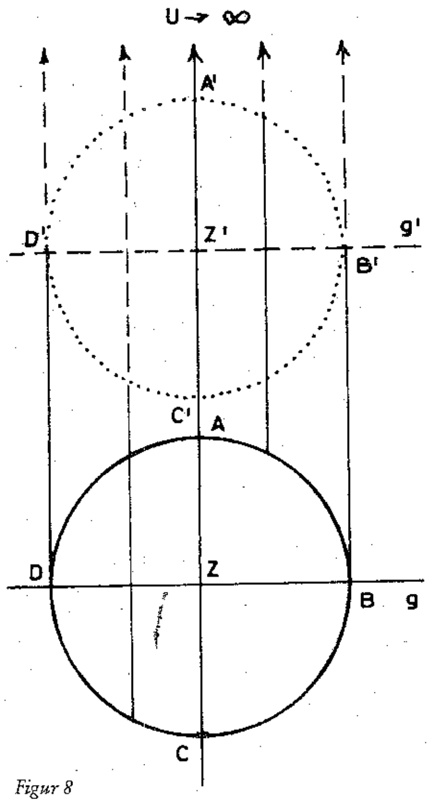
Weiter unten möchte ich diese Umstülpung des Pentagramms noch ein wenig genauer betrachten. Vorgängig unternehme ich aber mit Ihnen eine «Wüstenwanderung», indem ich versuche, an der «Umstülpung» des Kreises die Formveränderungen zu beobachten, die durch verschiedene Annahmen der Bezugsgrößen – Lage des Umstülpungspunktes und Größe der Umstülpungskonstante – entstehen.



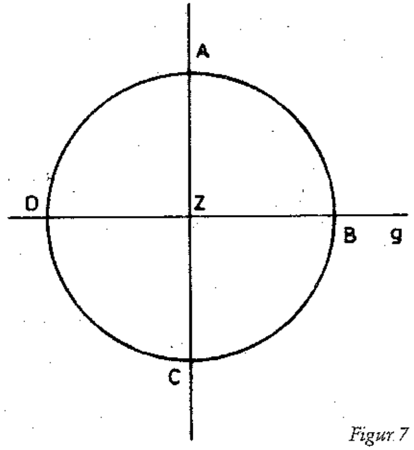
Figur 6

Metamorphosen des Kreises durch Umstülpung

Bei meiner erstmaligen Beschäftigung mit Umstülpungen setzte ich mich auch schon mit einem Kreis auseinander, fand diesen ersten Versuch aber nicht sehr ergiebig. Hier möchte ich jedoch gerade anhand des Kreises – der vollkommensten Form – durch eine systematische Untersuchung näher an das Phänomen «meiner Umstülpung» kommen. Zuerst werde ich beschreiben, wie ich mich Schritt für Schritt an eine Systematik herangetastet habe und so stufenweise mit den unterschiedlichen Erscheinungen, der Veränderung des Kreises durch die oben beschriebene Konstruktion, in Berührung gekommen bin.



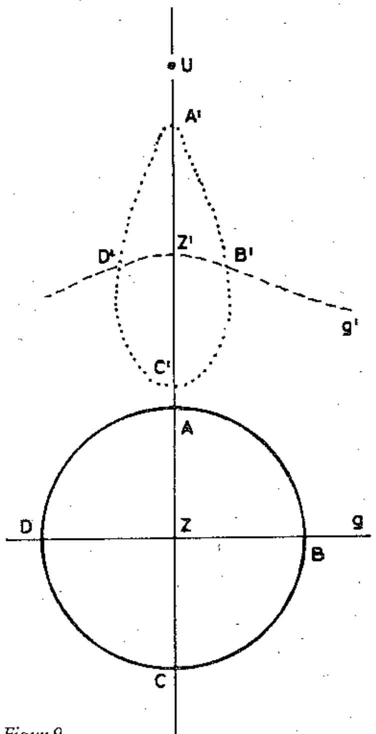
Figur 8



Figur 7

Die Grundform (*Figur 7*), mit der ich im Folgenden experimentiere, besteht aus einem Kreis, nicht nur als Linie, sondern auch als Fläche. Die Kreislinie ist somit die Grenze zwischen Innen und Außen. Damit ich mich in Bezug auf die Lage der Abbildung der konstruierten Punkte besser orientieren kann, lege ich durch das Zentrum Z des Grundkreises eine horizontale und eine vertikale Achse. Die horizontale nenne ich g und werde sie gleichzeitig mit dem Kreis umstülpen. Den Umstülpungspunkt U verschiebe ich jeweils auf der vertikalen Achse. Durch diese beiden Achsen wird die Kreislinie in den Punkten A, B, C und D geschnitten und die Kreisfläche in vier gleich große Segmente aufgeteilt (ABZ, BCZ, CDZ und DAZ). Die umgestülpten Punkte werden mit Strich bezeichnet (A', B', g' etc.).

Der Durchmesser AZC des Grundkreises auf der senkrechten Achse bleibt in der umgestülpten Form A'Z'C' immer gleich dem Durchmesser des Grundkreises.

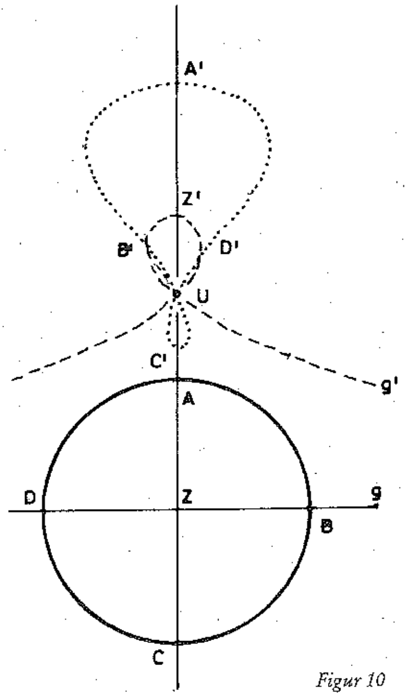


Figur 9

In *Figur 8* liegt U im Unendlichen. Es entsteht lediglich eine parallele Verschiebung der Grundform um b in Richtung U. Die Gerade g' ist parallel zu g, und der Kreis bleibt ein Kreis in gleicher Größe wie der Grundkreis.

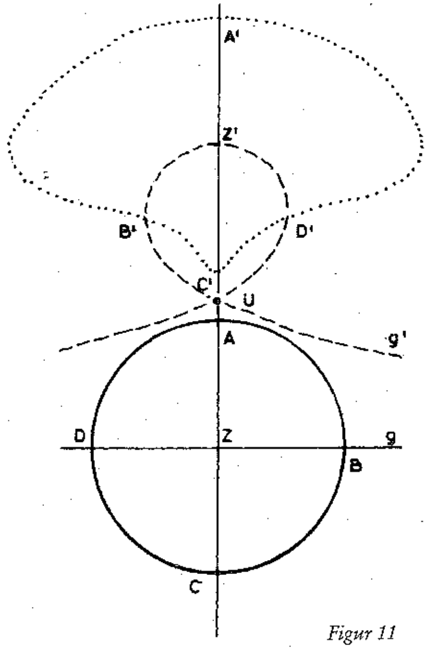
In *Figur 9* kommt U ins Endliche zu liegen, wobei der Abstand vom Zentrum zum Umstülpungspunkt größer als b ist (ZU = a > b). Das bedeutet, dass das Abbild des Kreises noch gar nicht durch den Punkt U hindurch gezogen wird, sondern sich nur um b in Richtung U verschiebt und verformt. Was in *Figur 8* noch ein Kreis war, wird hier zu einer «tropfenähnlichen» Form. Der Kreis wird gegen U hin stark verjüngt. Wäre b = a - r, so käme A' in U zu liegen und das Abbild des Kreises hätte in U = A' eine scharfe Spitze. Die Gerade g verformt sich zu einer leicht gebogenen Kurve.

In *Figur 10* ist a < b, das heißt, der Abstand vom Umstülpungspunkt zum Kreiszentrum ist kleiner als die Umstülpungskonstante, aber doch noch so groß, dass U zwischen A' und C' zu liegen kommt. Dadurch zeichnet sich das Abbild des Grundkreises in einer lemniskatenförmigen Kurve ab und g' wird deutlich zu einer Schlaufe im Sinne von *Figur 1*. Der untere Teil der Kurve (zwischen U und A) erinnert noch an den Tropfen aus *Figur 9*.



Figur 10

In *Figur 11* ist endlich das ganze Abbild des Grundkreises durch den Umstülpungspunkt hindurch gezogen. Nun ist b so groß, dass C' über den Punkt U zu liegen kommt. Wäre nun b = a + r, so käme C' genau in den Punkt U zu liegen, und auch hier hätte die Kurve eine Spitze, ähnlich wie in *Figur 9*. Diese Form erinnert an den oberen Teil der lemniskatenartigen Kurve aus *Figur 10*. Je größer b wird, umso mehr nähert sich das Abbild des Grundkreises einer ellipsenförmigen Kurve. Die Kurve g' bleibt eine Schlaufe wie in *Figur 1*.

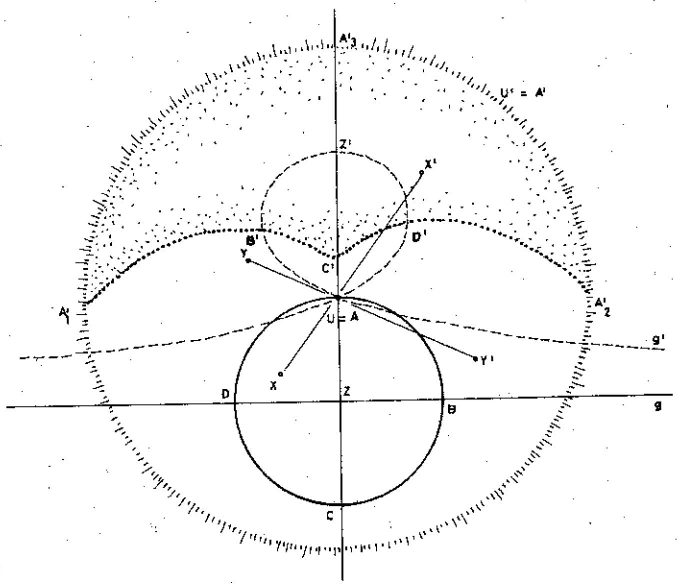


Figur 11

Die Darstellungen der *Figuren 9* bis *11* entsprechen noch ganz den Versuchen mit Dreiecken (*Figur 6*). Bei allen bis jetzt beschriebenen Konstruktionen vermisse ich noch immer, dass wirklich das Innere zum Äußeren wird. Die Grundform wird zwar verformt, aber nicht im eigentlichen Sinne umgestülpt.

In *Figur 12* entsteht plötzlich etwas ganz Überraschendes. Hier kommt U auf die Kreislinie der Grundform zu liegen, also U = A. Das Abbild des Kreises wird vorerst nicht mehr eine geschlossene Form, und dem Punkt A kann nicht mehr ein eindeutiges Bild A' zugeordnet werden. A' liegt sowohl am einen wie auch am anderen «Ende» der entstandenen Kurve als A'_1 und als A'_2. Diese beiden Punkte sind die logische Weiterführung der Umstülpungskonstruktion des Grundkreises. Ein weiteres Bild von A ist auf der vertikalen Achse zu finden, A'_3, im Zusammenhang mit dem Durchmesser AZC. Bei genauerer Betrachtung jedoch stelle ich fest, dass sich A' überall auf einem Kreis mit dem Radius von b um den Punkt U abbildet. Somit ist die entstandene Kurve doch wieder eine geschlossene Form. Selbst die eingangs erwähnte Gesetzmäßigkeit, dass AZC = A'Z'C' sei, trifft hier zu. $A'_3Z'C'$ ist gleich dem Durchmesser des Grundkreises. Eine weitere Erkenntnis zeigt sich mir in dieser Situation, nämlich dass die «Umstülpung» von U ein Kreis ist, mit dem Radius b.

Den Kreis U', die «Umstülpung» von U, nenne ich fortan den Umkreis. Er gehört sowohl zur Grundform wie auch zur Abbildung der konstruierten Punkte. *Punkt und Umkreis*! Im Weiteren fällt mir auf: Alle Punkte, die sich hier innerhalb des Grundkreises befinden, sind dort in der Fläche zwischen der m-förmigen Kurve und dem oberen Teil des Umkreises ($A'_1A'_3A'_2$) anzutreffen, und alle Punkte, die sich außerhalb des Grundkreises, jedoch innerhalb des Umkreises befinden, treffen

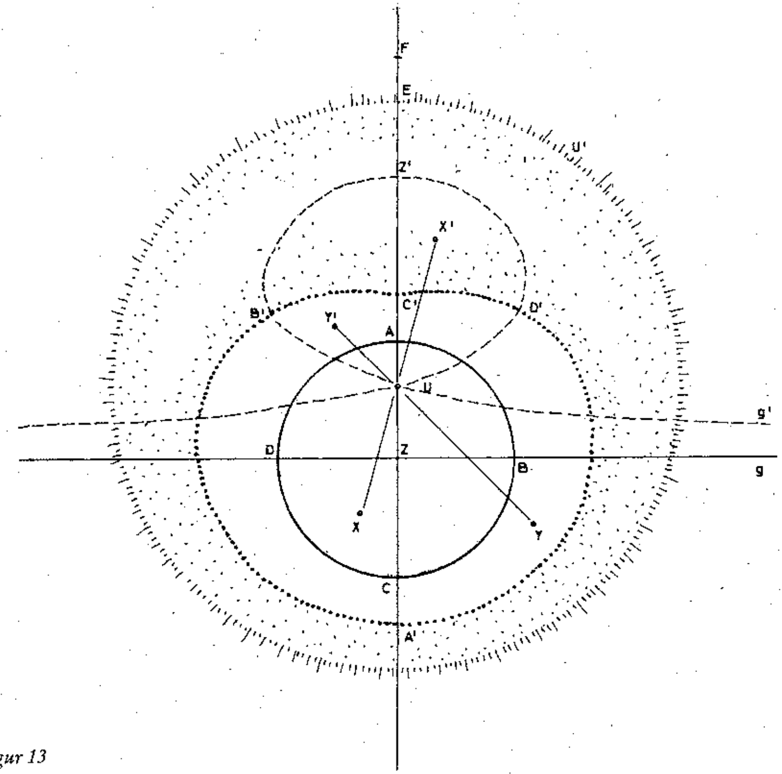


Figur 12

wir im unteren Teil, also zwischen der m-förmigen Kurve und dem unteren Teil des Umkreises an. Das Abbild von g wird hier zu einer schönen, ausgeglichenen Schlaufe gemäß *Figur 1*. Von nun an werde ich den Umkreis als integrierenden Bestandteil bei allen nachfolgenden Konstruktionen berücksichtigen.

Wenn nun in *Figur 13* der Punkt U noch näher ans Zentrum des Grundkreises gerückt wird, also der Abstand des Umstülpungszentrums vom Grundkreiszentrum kleiner als der Radius des Grundkreises ist (a < r), zeigt das Abbild des Grundkreises auf den ersten Blick eine eher ruhige Form. Die entstandene Kurve gleicht einem Apfel mit einer kleinen Einbuchtung bei C'. Das Abbild liegt beinahe gleichmäßig außerhalb des Grundkreises. Auch scheint eine bis jetzt strikte eingehaltene Gesetzmäßigkeit nicht mehr zu stimmen, nämlich dass A'C' gleich dem Durchmesser des Grundkreises sei. Das Abbild von g ist wiederum eine Schlaufe gemäß *Figur 1*. Mir fällt auf, dass sich das Zentrum Z' außerhalb des apfelförmigen Abbildes des Grundkreises befindet. Nun zeigt sich zum ersten Mal deutlich die Eigenschaft einer echten Umstülpung. Die Punkte, die sich in der Grundform innerhalb der Kreislinie befinden, erscheinen in der Abbildung außerhalb der umgestülpten Kreislinie. Es liegt nun endlich eine wirkliche Umstülpung vor. In Bezug auf die gesuchte Lösung einer Umstülpung einer Form, so dass das Innere zum Äußern wird, spielt die Gerade g eine untergeordnete Rolle.

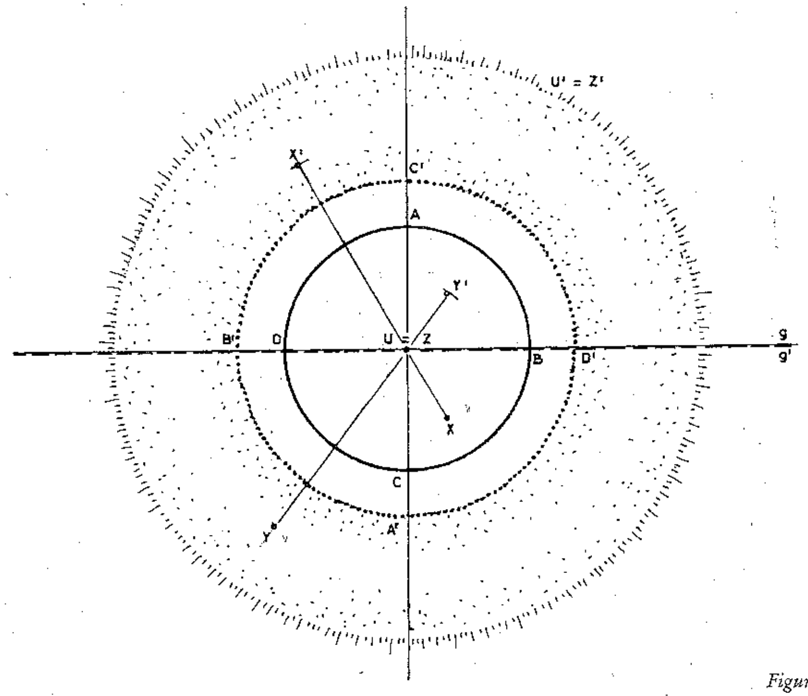
Der Vollständigkeit halber möchte ich das Umstülpungszentrum, wie ich anfänglich angedeutet habe, ins Zentrum des Grundkreises legen.



Figur 13

Bei dieser Annahme (*Figur 14*) tritt plötzlich eine große Ruhe ein. Die Umstülpung des Grundkreises ist wiederum ein Kreis. Die Umstülpung von g bleibt eine Gerade, ja g' fällt sogar mit g zusammen. Alles, was für die vorige Annahme gegolten hat, trifft auch hier zu. Alle Punkte im Innern des Grundkreises (X) befinden sich in der Umstülpung nun außen zwischen dem umgestülpten Kreis und dem Umkreis (X') und alle Punkte (Y) außerhalb des Grundkreises und innerhalb des Umkreises sind nun umschlossen vom Grundkreis (Y'). Auch hier bleibt der Abstand von A' zu C' gleich dem Durchmesser des Grundkreises.

In einem vorläufig letzten Schritt wird das Umstülpungszentrum U, wie in der vorigen Figur, ins Zentrum des Grundkreises gelegt, die Umstülpungskonstante b jedoch gleich dem Radius r des Grundkreises angenommen. Hier wird die ganze Konstruktion in gewissem Sinne wieder an den Anfang geführt. Obschon auf den ersten Blick gar nichts passiert ist, zeigt diese Stufe wieder etwas Bedeutungsvolles: Die Umstülpung des Grundkreises wird zum Punkt, zum Zentrum des Grundkreises und zugleich zum Umstülpungspunkt. Der Umkreis fällt mit dem Grundkreis zu-



Figur 14

sammen. In *Figur 12* erlebte ich, wie die Umstülpung des Punktes zum Umkreis wird, und hier findet das Umgekehrte statt. In der Schwarzweißdarstellung kann dieser Fall nicht deutlich genug sichtbar gemacht werden, daher verzichte ich auf eine Abbildung. Sie wäre etwa gleich wie *Figur 7*.

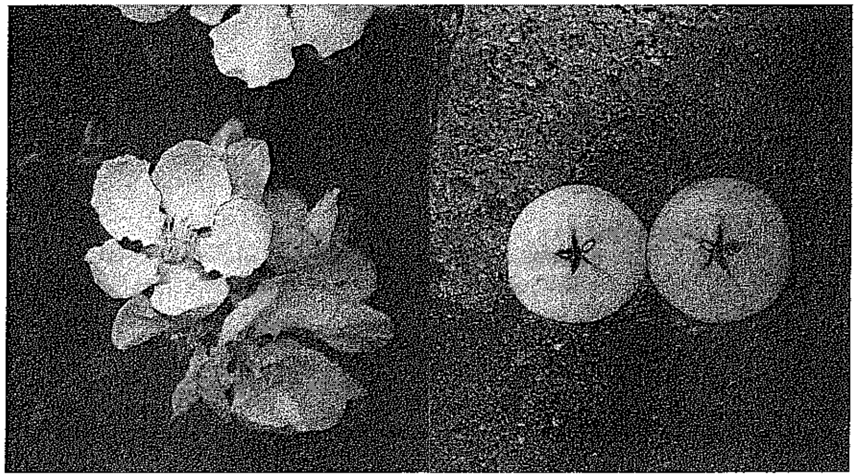
Zusammenfassung

Die Suche nach einer geometrischen Konstruktion, die eine Umstülpung einer Form im Sinne einer Umwendung eines Handschuhes oder eines Strumpfes zeigt, hat mich mit Hilfe der oben beschriebenen Konstruktion zu einer Lösung geführt, und zwar indem ich diese Konstruktion auf einen Kreis angewendet habe. Die drei unterschiedlichen Erscheinungsformen, die sich bei der «Umstülpung» einer Geraden gezeigt haben, sind entsprechend auch bei der Umstülpung des Kreises zu beobachten. Solange sich der Umstülpungspunkt außerhalb der Grundform befindet, kommt es nicht zu einer echten Umstülpung. Erst wenn er innerhalb der Grundform ist und wenn der Umkreis als Umstülpung von U mit in die Betrachtung einbezogen wird, kann innerhalb dieser Grenze eine echte Umstülpung beobachtet werden. Das bedeutet: Was in der Grundform innen war, wird in der Umstülpung außen sein.

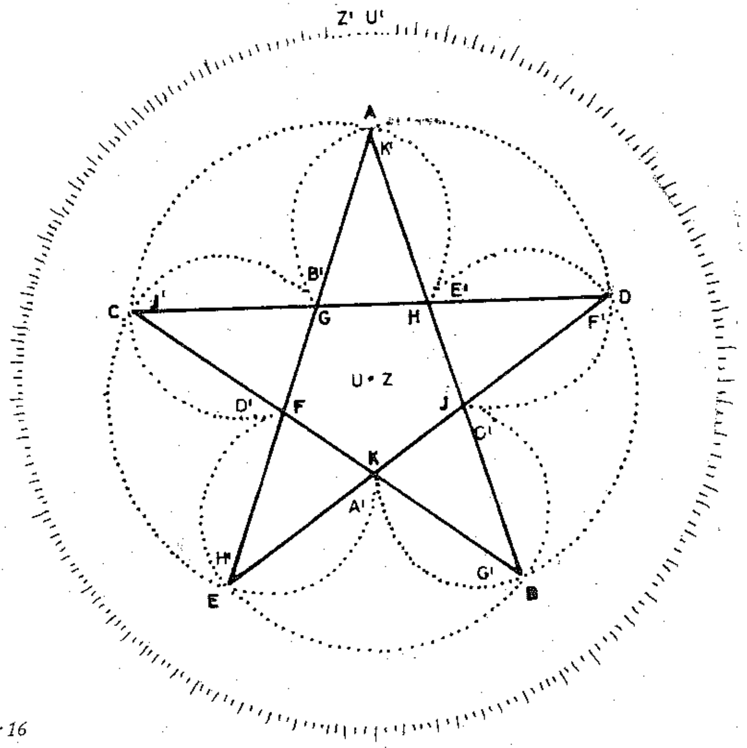
Die in den Schritten von *Figur 7* bis *Figur 14* vorgenommenen Konstruktionen haben mich zu weiterem Forschen angeregt. Dabei beobachte ich die Formveränderungen, die durch die unterschiedlichen Annahmen von der Lage des Umstülpungspunktes (a) und von der Größe der Umstülpungskonstanten (b) stattfinden. Die Betrachtung dieser Arbeit könnte in einem anderen Beitrag dargestellt werden. Die Reihen der Abbildungen stellen in gewissem Sinne eine graphische Darstellung einer Entwicklung dar.

Vom Pentagramm zur Rose

Ganz am Anfang meiner Beschäftigung mit der Umstülpungskonstruktion versuchte ich, ein Pentagramm um sein eigenes Zentrum umzustülpen. Dabei entstand *Figur 16*. Dieses Bild ist mir besonders lieb. So ist mir eine geometrische Konstruktion zu einem Bild, zu einer Meditationsform geworden. Die Umstülpung des Fünfecks gleicht einer Rose. Auch der Apfelbaum gehört zu den rosenartigen Gewächsen. Im Frühjahr wendet sich die Blüte dem ersten warmen Lichte entgegen. Schon bald, nachdem der Wind die zarten Blütenblätter zerstreut hat, beginnt sich die Frucht zu runden, um endlich im Herbst zum duftenden Apfel heranzureifen. Wenn im Herbst der reife Apfel entzweigeschnitten wird, gleicht das Kernenhaus mit seinen dunkelbraunen Samen einem Pentagramm. Die weiße Blüte im Frühjahr hat sich im Laufe der Zeit zum dunklen Fünfstern im Innern der Frucht «umgestülpt» (*Figur 15*). Ich denke, dass noch weitere ähnliche Beziehungen in der Natur oder auch in der Kunst aufzufinden sind.



Figur 15



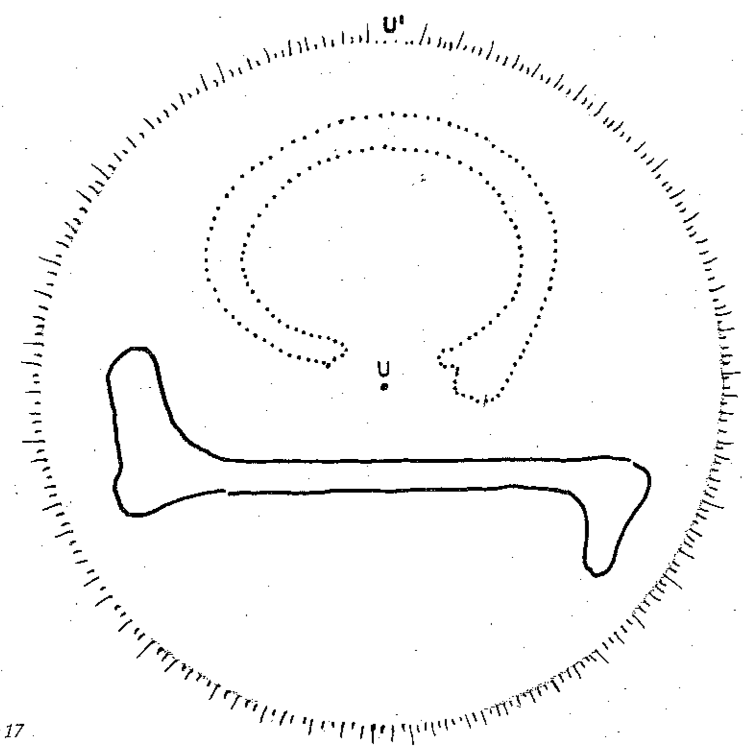
Figur 16

Vom Röhrenknochen zum Schädelknochen

Der Ausgangspunkt meiner ganzen Betrachtung war die Umstülpung des Röhrenknochens. Als letzten Schritt versuche ich, ein Abbild eines Knochens mit der beschriebenen Konstruktion umzustülpen. Nicht auf Anhieb habe ich eine überzeugende Lösung gefunden. Zuerst ist mir bei der Betrachtung der Umstülpung des Pentagramms aufgefallen, dass die Umstülpung einer einzelnen Seite mit ihrer starken Krümmung schon dem Abbild eines Schädels im Profil gleicht. Um diese Vermutung zu erhärten, habe ich versucht, auf ähnliche Weise das Abbild eines schematisch dargestellten Knochens umzustülpen (*Figur 17*).

Das entstandene Resultat hat mir jedoch deutlich gezeigt, dass dies noch nicht das angestrebte Ziel sein kann, und es ist mir auch bald klar geworden warum! Es kann noch keine echte Umstülpung sein, weil sich das Umstülpungszentrum noch außerhalb der Form befindet.

Figur 17 zeigt jedoch etwas anderes, was mir auch bemerkenswert erscheint. Bis anhin habe ich alle Konstruktionen in der Ebene vorgenommen, aus dem einfachen



Figur 17

Grund der Konstruierbarkeit. Da nun aber ein Knochen ein räumliches Gebilde ist, muss die Konstruktion auch als räumliche Konstruktion gedacht werden. Die Definition muss in diesem Sinne erweitert werden: Alle Punkte eines Körpers werden in Richtung oder durch einen Punkt mit einer konstanten Strecke gezogen. Der Umstülpungspunkt bleibt ein Punkt, die Grundform ist jedoch nun ein Körper. Bei dieser Konstruktion wird der Umkreis zur Umkugel. Eine Möglichkeit, die räumliche Konstruktion mit Hilfe der Konstruktion in der Ebene durchzuführen, besteht darin, durch den Punkt U ein Ebenenbündel zu legen. In jeder dieser Ebenen wird nun die Schnittfläche mit dem Körper in der gewohnten Weise umgestülpt. Wenn dieser Vorgang in verschiedenen Ebenen des Bündels vorgenommen wird, entsteht eine Art Tomogramm.

Wird diese Konstruktion analog der *Figur 17* angewandt, so lässt sich vorstellen, der Knochen sei, trivial ausgedrückt, ein Stück eines geraden Schlauches. Die Umstülpung davon wird zu einem gekrümmten Schlauch. Alle Punkte im Innern der Grundform bleiben im Innern der Umstülpung. Im anfangs zitierten Text von *Ru-*

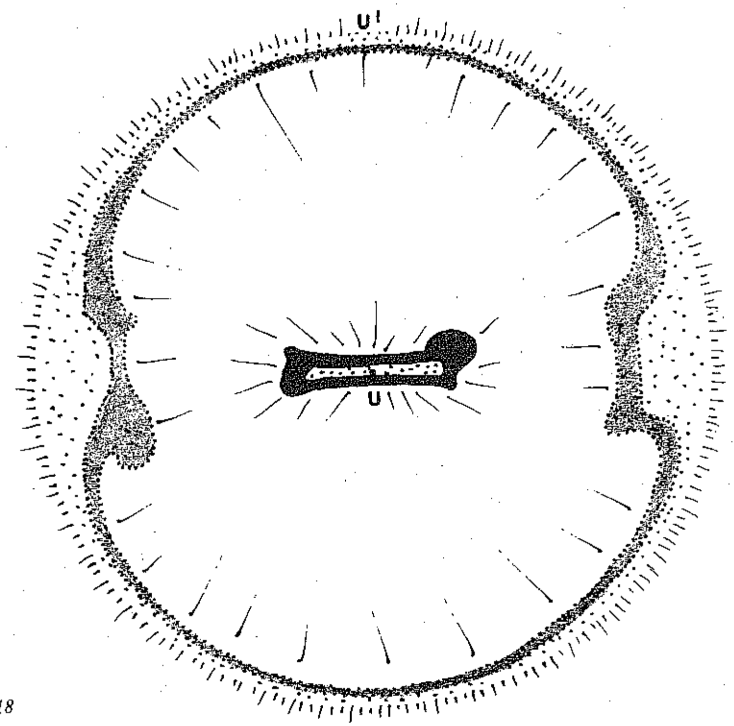
dolf Steiner steht: «Nicht hat in der Mitte der Kugel die Brust ihren Mittelpunkt; die Brust hat den Mittelpunkt sehr weit weg ...»

Somit möchte ich aus der Betrachtung der *Figur 17* den Schluss ziehen: Wird ein Röhrenknochen um einen Punkt außerhalb der Grundform umgestülpt, so entsteht eine Rippe.

Soll eine echte Umstülpung eines Röhrenknochens erreicht werden, muss sich das Umstülpungszentrum im Innern der Form befinden (*Figur 18*).

Auch hier ist die Konstruktion räumlich zu denken. Die Umstülpung des Röhrenknochens wird eine kugelähnliche Form. Was in der Grundform das Innere des Knochens ist, das Knochenmark, befindet sich in der Umstülpung zwischen der «Schädeldecke» und der Umkugel. Alle Punkte, die außerhalb des Knochens, aber innerhalb der Umkugel sind, befinden sich in der Umstülpung im Innern der kugeligen Form.

Mit der Konstruktion in *Figur 18* ist für mich das Ziel erreicht, zu zeigen, dass es tatsächlich eine geometrische Konstruktion gibt, welche die Umwendung des Röhrenknochens in den Schädelknochen zeigt, im Sinne, wie dies am Anfang in der



Figur 18

Schilderung von *Rudolf Steiner* beschrieben ist. Es ist nicht zu erwarten, dass durch eine solche Konstruktion aus einem Röhrenknochen ein Gebilde entsteht, welches einem Schädelknochen, wie wir ihn gewohnt sind uns vorzustellen, gleicht. Was aber gesehen werden kann, ist die Verwandlung eines röhrenförmigen Gebildes in einen hohlkugelförmigen Körper.

Schlussbetrachtung

Indem ich zuletzt nicht mehr eine geometrische Form, sondern ein freies Gebilde meiner Konstruktion unterworfen habe, begebe ich mich auf einen Weg von der reinen Geometrie zu einer Bildbetrachtung hin. Beim Beobachten der entstandenen Formen sind mir verschiedene Gedanken durch den Kopf gezogen, die eher philosophischer als geometrischer Natur sind.

Bei der Beschäftigung mit *Figur 13* hat mich zuerst der Umkreis interessiert. Er ist mir zum Abbild des menschlichen Horizontes geworden. Der Horizont ist ein ganz persönlicher Teil des Menschen. Ein jeder hat *seinen* Horizont, wie er seinen Schatten hat. Sowenig der Mensch über seinen Schatten springen kann, sowenig kann er über seinen Horizont hinaus gelangen. Wenn ich mich auf der Erde bewege, nehme ich stets meinen Horizont mit mir, wo immer ich mich hinbegebe. Mein sinnlicher Erlebnisbereich, meine Umwelt, befindet sich zwischen mir und meinem Horizont. Stelle ich mir eine Umstülpung dieser Situation vor, so wird dort dasjenige, was da mein äußerer Erlebnisbereich ist, zu einer Innenwelt, und was da mein Inneres ist, wird dann zur Außenwelt.

Im Zusammenhang mit dem Umkreis habe ich mir Gedanken darüber gemacht, was er für eine Grenze darstellt. Es ist offensichtlich, dass sich das ganze Geschehen der Umstülpung in *Figur 13* innerhalb des Umkreises abspielt. Da das Wesen der Umstülpungskonstruktion darin besteht, eine Formveränderung zu erreichen, bei der das Innere einer Form nach außen gewendet wird, stellt sich mir die Frage, was es bedeutet, dass die Umstülpung des Punktes U zum Umkreis U' wird. Der Umkreis seinerseits hat ein Innen und ein Außen. Im Innern des Umkreises finden wir den umgestülpten Grundkreis. Was aber befindet sich außerhalb des Grundkreises? Eine folgerichtige Überlegung im Zusammenhang mit der Umstülpung weist darauf hin, dass das Äußere des Umkreises dem Inneren des Umstülpungspunktes entspricht! Dieser Gedanke scheint mir einen Hinweis auf das Geheimnis des Punktes zu geben.

Hier möchte ich mit aller Deutlichkeit darauf hiweisen, dass es bei der Konstruktion der Umspülpung nicht um die Kurve allein geht. Die Kurve, hier ein Kreis, stellt eine Grenze dar. Wichtig aber ist nicht die Grenze, sondern dasjenige, welches durch die Grenze geschieden wird, das Innere vom Äußeren. Zur Umstülpung gehört also alles, was im Kreis und um den Kreis herum zu beobachten ist. Daher ist es auch möglich, eine freie Form, z.B. eine knochenähnliche Form, eine Form, die nicht mehr mit einer Formel erfasst werden kann, umzustülpen.

Meine vorliegende Arbeit habe ich im Laufe der Zeit mit vielen Menschen besprochen und auch manche wertvolle Anregung erhalten. Obwohl ich anfänglich von verschiedener Seite her erfahren habe, es gäbe noch keine Darstellung einer Umstülpung, habe ich später festgestellt, dass dies keineswegs zutrifft.

Bekanntlich hat *Paul Schatz* schon vor langer Zeit den umstülpbaren Würfel entwickelt. Noch heute wird an den umstülpbaren Körpern weitergearbeitet. Vor allem bin ich von *Arnold Bernhard* auf die Arbeit von *Louis Locher-Ernst* über eine geometrische Verbildlichung der Metamorphose von Bildekräften der Röhrenknochen in diejenige von Schädelknochen aufmerksam gemacht worden. (*Locher-Ernst* 1973) *Arnold Bernhard* hat sich vor kurzem in besonderer Weise um eine allgemein verständliche Darstellung über geometrische Bilder für die Dreigliederung des Menschen und für die nachtodliche Verwandlung der Kräftestruktur der Röhrenknochen in diejenige der Kopfknochen verdienstlich gemacht. (*Bernhard* 1998)

Mein Beitrag beschränkt sich darauf, für das Bild von der Umwendung des Strumpfes eine Darstellung zu finden. Letztlich sind alle die Bemühungen solcher Art lediglich Bilder, die eine Hilfe zu geben versuchen, an Tatsachen heran zu kommen, die sinnlich gar nicht darstellbar sind.

Wenn *Rudolf Steiner* sagt, der Schädel sei die Umwendung eines Röhrenknochens, so ist auch das ein Bild. Auch dieses Bild muss, denke ich, zum größten Teil weggewischt werden, um den Gehalt zu erahnen. Nehmen wir das Bild zu konkret, wie ich es mit der Umstülpung eines Oberarmknochens getan habe, so entsteht vorerst kein Schädelknochen, sondern ein Bild, das zeigt, in welcher Weise eine solche Verwandlung verstanden werden könnte. Und letztlich entstehen auch da wieder neue Fragen. Was bedeutet es zum Beispiel, dass die Höhlung im Röhrenknochen, die das Mark enthält, in welchem das rote Blut, der Ich-Träger, gebildet wird, in der Umstülpung den Raum zwischen der Schädeldecke und dem Horizont ausfüllt oder anders gesagt, vielleicht einfach den physischen Leib umgibt, als Aura oder «Heiligenschein»?

Rudolf Steiner hat uns vieles in Bildern gegeben, aber gleichzeitig davor gewarnt, diese Bilder als die Realität zu betrachten. Wenn wir versuchen zu verstehen, was diese Bilder aussagen, müssen wir sie gleich wieder auswischen. Was dann noch übrig bleibt, wenn das Bild weggewischt ist, weist auf die Wirklichkeit hin.

«Ich habe Ihnen öfter gesagt: Nicht so sehr auf das kommt es an in der Geisteswissenschaft, was gesagt wird ..., sondern darauf kommt es an, wie es gesagt wird. Versuchen Sie einmal zu verfolgen ..., wie eine jede Sache von den verschiedenen Gesichtspunkten aus charakterisiert wird, wie immer versucht wird, ein Ding von der einen Seite und von der anderen Seite zu charakterisieren. Nur dann kann man sich nähern den Dingen ...

Wir müssen uns bewusst werden, dass wir nur hindeuten auf irgendetwas und dass wir nur dann ein richtiges Verhältnis zur Wahrheit gewinnen, wenn wir in dem Worte Hindeutungen auf dasjenige sehen, was wir ausdrücken wollen ...» (*Steiner* 1918)

Literatur

Bernhard A. (1998): Geometrische Bilder für den Menschen und seine nachtodliche Verwandlung. Text- und Bildheft, Paracelsus-Zweig, Schriftenreihe Nr. 2, Basel.

Locher-Ernst L. (1973): Mathematik als Vorschule zur Geist-Erkenntnis. Von der Geometrie der menschlichen Gestalt. Dornach.

Steiner R. (1918): Wie finde ich den Christus?, Vortrag, Zürich, 16. Oktober 1918 (GA 182), Dornach 1937, S. 20.

Steiner R. (1919): Allgemeine Menschenkunde. 10. Vortrag, Stuttgart, 1. September 1919, (GA 293), 5. Auflage, Dornach 1960.

Hans Georg Braun
Architekt HTL/STV
Luzernerstraße 2
CH-4143 Dornach