Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
PD Dr. Angela Ortega

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Mathematik für PhysikerInnen (Analysis II) (SS 19)
Übungsblatt 10
Abgabetermin: 24.06.2019 vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie auf die Abgaben Ihren Namen, die Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Länge des Kurvenstücks $C \in \mathbb{R}^3$ mithilfe der Parametrisierung

$$\alpha : t \mapsto (2t, t^2, \ln t)$$

zwischen den Punkten $(2, 1, 0)$ und$(4, 4, \ln 2)$.

(b) Bestimmen Sie die Länge der Kurve $\sigma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (|t|, |t - \frac{1}{2}|, 0)$

(*Hinweis:* Bemerken Sie, dass die Kurve nicht überall differenzierbar ist. Man muss die Länge also über den drei differenzierbaren Teilstücken berechnen.)

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_\alpha \sin z dx + \cos z dy - (xy)^{1/3} dz$$

längs der Kurve $\alpha : [0, \frac{7}{2}\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\theta \mapsto (\cos^3\theta, \sin^3\theta, \theta)$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Gegeben sei ein Masseteilchen im Koordinatenursprung. Es erzeugt ein Gravitationsfeld (mit $G = m = M = 1$), das für $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ durch

$$\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = \frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).$$

definiert ist. Zeigen Sie, dass die Arbeit, die benötigt wird, um ein zweites Teilchen von einem Punkt $(x_1, y_1, z_1) \neq 0$ zu einem anderen Punkt $(x_2, y_2, z_2) \neq 0$ längs eines beliebigen Weges zu verschieben, nur von den Radien

$$R_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \quad \text{und} \quad R_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$$

um das Gravitationszentrum $(0, 0, 0)$ abhängt.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Vektorfeld

$$\vec{\mathbf{v}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} ye^{xy} \sin z + x + y \\ xe^{xy} \sin z + x + y - z \\ e^{xy} \cos z - y + z \end{pmatrix}$$

konservativ ist und bestimmen Sie das Potential des Vektorfelds (bis auf eine Konstante).