Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
PD Dr. Angela Ortega

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Mathematik für PhysikerInnen (Analysis II) (SS 19)
Übungsblatt 1
Abgabetermin: 23.04.2019 vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie auf die Abgaben Ihren Namen, die Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe drauf.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $||(x_1, \ldots, x_n)||_\infty := \max_{1\leq j\leq n}\{|x_j|\}$ definiert eine Norm in $\mathbb{R}^n$.

(b) Zeigen Sie, dass $||AB||_F \leq ||A||_F \, ||B||_F \quad \forall A \in M(l,m)$ und $\forall B \in M(m,n)$, wobei $||\cdot||_F$ die Frobenius Norm bezeichnet.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

(a) Seien (A_j) und (B_j) konvergenten Matrizenfolgen aus $M(n,n)$. Mit Hilfe von 1(b) zeigen Sie:

$$\lim_{j\to\infty}(A_j B_j) = (\lim_{j\to\infty} A_j)(\lim_{j\to\infty} B_j).$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle $A, B \in M(n,n)$ mit $AB = BA$

$$\exp(A+B) = \exp A \cdot \exp B \qquad \text{gilt.}$$

(c) Berechnen Sie $\exp\begin{pmatrix} 0 & \varphi \\ \varphi & 0 \end{pmatrix}$ für $\varphi \in \mathbb{R}$.

(d) Beweisen Sie, dass eine konvergente Folge in einem normierten Verktorraum beschränkt ist.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

(a) Beweisen Sie, dass die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge N der Nullstellen einer stetigen Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist abgeschlossen.

(c) Man betrachte $\mathbb{Z}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$. Was ergibt sich für $\overline{\mathbb{Z}}$, $\partial\mathbb{Z}$, $\mathring{\mathbb{Z}}$?

(d) Zeigen Sie, dass jeder Halbraum in $\mathbb{R}^n$

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a \rangle > b\}$$

mit $a \neq 0$ und $b \in \mathbb{R}$ eine offene Menge ist.