HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PD DR. ANGELA ORTEGA

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Mathematik für PhysikerInnen (Analysis II) (SS 19)
Übungsblatt 6
Abgabetermin: 27.05.2019 vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie auf die Abgaben Ihren Namen, die Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2.$$

Bestimmen Sie für jeden kritischen Punkt ob er ein lokales Maximum oder Minimum ist. Sind diese Punkte *globale* Extrema?

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to f(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (e^x \cos y,\ e^x \sin y)$.

(a) Bestimmen Sie das Bild von f.

(b) Zeigen Sie, dass f in $\mathbb{R}^2$ lokal invertierbar ist, d.h. für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ jeweils in einer geeigneten Umgebung von (x, y)

(c) Zeigen Sie, dass f nicht global invertierbar ist, d.h es existiert keine auf $f(\mathbb{R}^2)$ definierte Umkehrabbildung.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Man betrachte die Funktion $f(x, y) = xe^y + e^x \sin(2y)$.

(a) Zeigen Sie, dass man die Gleichung $f(x, y) = 0$ in einer Umgebung von $(0, 0)$ nach y auflösen kann (d.h. Es existiert eine Funktion $\varphi(x)$ so dass $f(x, \varphi(x)) = 0$ in einer Umgebung von $(0, 0)$).

(b) Bestimmen Sie $\varphi'(0)$ und die Gleichung der Tangente an den Graph von φ im Punkt $(0, \varphi(0))$.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \supset \Omega \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion und für $c \in \mathbb{R}$

$$N_c := \{(x, y) \in \Omega \mid f(x, y) = c\}.$$

Ist $N_c \neq \emptyset$ und $\nabla f(x, y) \neq 0 \ \forall (x, y) \in N_c$ so ist $N_c = \{f - c = 0\}$ eine eindimensionale Lösungsmannigfaltigkeit die *Niveaulinie* genannt wird. Unter *Gradientenlinie* von f verstehen wir einen C^1-Weg $\psi : I \to \Omega$, dessen Tangentenvektor nirgends verschwindet und an jeder Stelle in Richtung des Gradienten von f zeigt, d.h.

$$\psi'(t) = \lambda(t) \cdot \nabla f(\psi(t)) \neq 0 \quad \text{mit} \quad \lambda(t) > 0.$$

(a) Beweisen Sie, dass sich die Gradientenlinien und die Niveaulinien in rechten Winkeln schneiden, d.h. $\langle v, w \rangle = 0$ für v die Tangente an der Gradientenlinie in (x_0, y_0) und w die Tangente an der Niveaulinie in (x_0, y_0).

(b) Zeichen Sie die Niveaulinien N_c von $f(x, y) = x^2 - y^2$ für $c = 0, 1, -1, 2, -2$.