HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PD DR. ANGELA ORTEGA

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Mathematik für PhysikerInnen (Analysis III) (WS 18/19)
Übungsblatt 8
Abgabetermin: 19.12.2018 vor der Vorlesung
Bitte schreiben Sie auf die Abgaben Ihren Namen, die Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe drauf.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten von $f(x) = x^2$ auf $[-\pi, \pi]$ bzgl. der Hilbert-Basis:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten von

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad -\pi \leq x < 0 \\ 1 & \text{falls} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

und $f(x + 2\pi) = f(x)$ bzgl. der Orthonormalfolge von Aufgabe (1).

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Man betrachte den Vektorraum $C^0([-1,1]) := \{f[-1,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig } \}$ und die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : C^0([-1,1]) \times C^0([-1,1]) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt ist.
Wenden Sie das Schmidt-Orthonormierungsverfahren an, um die (lineare unabhängige) Polynome $1, x, x^2, x^3, \ldots$ zu orthonormieren (Berechnen Sie die erste 4 Elemente). So erhählt man den Legendren-Polynomen.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Ein Teilmenge M eines Vektoraums heißt konvex , wenn $\forall x, y \in M$ und $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ gilt $\lambda x + (1-\lambda)y \in M$. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Zeigen Sie:

(a) Sei $M \subset \mathcal{H}$ eine konvexe Teilmenge und $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ beliebig. Dann ist jede Linearkombination $\sum_{i=1}^n \lambda_i m_i$ wieder in M enthalten, wobei $m_i \in M$ und $\lambda_i \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

(b) Sei $A \subset \mathcal{H}$ beliebig. Zeigen Sie, dass die Menge aller endlichen Linearkombinationen der Form $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$ mit $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in A$ und $\lambda_i \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, eine konvexe Menge ist.