Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Dennis Groh

Nachtrag: Orientierung von Vektorfeldern
Analysis II für Physiker (SoSe 19)

4. Juli 2019

Hinweis: Auf dem gesamten Blatt werden die Punkte in $\mathbb{R}^3$ *mit* (x, y, z) *und die Punkte in* $\mathbb{R}^2$ *mit* (u, v) *bezeichnet.*

Betrachten wir das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $v(x, y, z) = (y, 2x, 0)^{\mathrm{T}}$. Wir wollen die Zirkulation (Integral der Rotation) von v über dem in $\mathbb{R}^3$ eingebetteten Einheitsquadrat

$$Q := \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 0 \leq x, y \leq 1,\ z = 0\big\} \subset \mathbb{R}^3 \tag{1}$$

bestimmen. Die Orientierung von Q sei zunächst durch die Parametrisierung $\Phi : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $\Phi(u, v) = (u, v, 0)^{\mathrm{T}}$ festgelegt.

Berechnung als vektorielles Oberflächenintegral Da die Rotation $\operatorname{rot} v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ebenfalls ein Vektorfeld ist, können wir das *vektorielle Oberflächenintegral* der Rotation ganz klassisch durch

$$\int_Q \operatorname{rot} v \cdot \mathrm{do} = \int_{[0,1]^2} \langle (\operatorname{rot} v) \circ \Phi(u, v)\, , \partial_1\Phi(u, v) \times \partial_2\Phi(u, v)\rangle\, \mathrm{d}^2(\mathrm{u}, \mathrm{v}) \tag{2}$$

berechnen (siehe Def. 4.30 im Skript). Die Rotation des Vektorfelds ist durch

$$\operatorname{rot} v(x, y, z) = \nabla \times v = \left(\frac{\partial}{\partial x} v_2(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial y} v_1(x, y, z)\right) e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

gegeben; außerdem ist

$$\partial_1\Phi(u, v) \times \partial_2\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Damit folgt

$$\int_Q \operatorname{rot} v \cdot \mathrm{do} = \int_{[0,1]^2} \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle \mathrm{d}^2(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = \int_{[0,1]^2} 1\, \mathrm{d}^2(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = A\big([0, 1]^2\big) = 1. \tag{5}$$

Nun sei die Orientierung nicht über die Parametrisierung Φ festgelegt, sondern stattdessen über das konstante Normalenfeld $n \equiv e_3$, also $n : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $n(x, y, z) = (0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$. Bemerke, dass n tatsächlich senkrecht auf allen Punkten $(x, y, z) \in Q$ steht. Es gilt dann (nach Formel (4.36) im Skript)

$$\int_Q \operatorname{rot} v \cdot \mathrm{do} = \int_Q \operatorname{rot} v \cdot n \, \mathrm{ds}\,. \tag{6}$$

Der Integrand $\operatorname{rot} v \cdot n$ ist nun skalarwertig. Wir müssen hier also die Definition des *skalaren Oberflächenintegrals* anwenden. Es gilt also (Def. 4.28)

$$\int_Q \operatorname{rot} v \cdot n \, \mathrm{ds} = \int_Q \big(\operatorname{rot} v \cdot n\big) \circ \Phi(u,v) \sqrt{\det\big(G(u,v)\big)} \, \mathrm{d}^2(\mathrm{u}, \mathrm{v})\,. \tag{7}$$

Hierbei ist G wieder die Gramsche Matrix der Parametrisierung. Für unsere Parametrisierung Φ gilt

$$G := \begin{pmatrix} \langle \partial_{u_1}\Phi\,, \partial_{u_1}\Phi\rangle & \langle \partial_{u_1}\Phi\,, \partial_{u_2}\Phi\rangle \\ \langle \partial_{u_2}\Phi\,, \partial_{u_1}\Phi\rangle & \langle \partial_{u_2}\Phi\,, \partial_{u_2}\Phi\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

also $\det G = 1$. Damit erfüllt das skalare Oberflächenintegral

$$\int_Q \operatorname{rot} v \cdot n \, \mathrm{ds} = \int_Q \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle \cdot \sqrt{1}\, \mathrm{d}^2(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = 1. \tag{9}$$

Der Wert des Integrals ist also für beide gewählte Orientierungen gleich. Es lässt sich einsehen, dass für ebene Flächenstücke tatsächlich „Orientierung entgegen dem Uhrzeigersinn“ und „Orientierung des Normalenfelds in positive Richtung“ gleichbedeutend zu sein scheinen. Die „Rechte-Hand-Regel“ gibt das wieder (Daumen in positive x-Richtung, Zeigefinger in positive y-Richtung führt zu Mittelfinger in positive z-Richtung). Für das entgegengesetzte konstante Normalenfeld $n_2 \equiv -e_3$ hat das Integral (9) entgegengesetztes Vorzeichen.

Bemerke, dass wir natürlich auch direkt in (6) hätten $\operatorname{rot} v \cdot n$ berechnen und durch 1 ersetzen können. Allerdings muss man theoretisch aufpassen, was die einzelnen Integrale für den konkreten Integranden über dem konkreten Gebiet bedeuten. Es ist also im Zweifel besser, die entsprechenden Definitionen zu verwenden.

Berechnung über Integralsätze Wir verwenden nun noch die klassischen Integralsätze zur Bestimmung des Integrals. Zunächst betrachten wir den Satz von Stokes

$$\int_Q \operatorname{rot} v \cdot \mathrm{do}(\mathrm{x}) = \int_{\partial Q} v \cdot \mathrm{ds}\,. \tag{10}$$

Hierbei wird der Rand ∂Q durch die Seitenkurven $\varphi_k = \Phi \circ \alpha_k$ parametrisiert, wobei die $\alpha_k : (0,1) \to [0,1]^2$ durch

$$\alpha_1(t) := \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_2(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \qquad \alpha_3(t) := \begin{pmatrix} 1-t \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{und} \qquad \alpha_4(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix}$$

gegeben sind. Für die Verknüpfungen $\varphi_k : (0,1) \to \mathbb{R}^3$ gilt also

$$\varphi_1(t) := \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3(t) := \begin{pmatrix} 1-t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \alpha_4(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da keine Seitenkurve entartet ist, gilt für das Randntegral

$$\int_{\partial Q} v \cdot \mathrm{ds} = \sum_{k=1}^{4} \int_{\varphi_k} v \cdot ds. \tag{11}$$

Jeder Summand hier berechnet sich als *vektorielles Kurvenintegral* des Vektorfelds v über die Seite α_k, sodass

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi_1} v \cdot \mathrm{ds} &= \int_0^1 \left\langle v\big(\varphi_1(t)\big), \dot{\varphi}_1(t) \right\rangle \mathrm{dt} = \int_0^1 \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2t \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle \mathrm{dt} = 0 \\
\int_{\varphi_2} v \cdot \mathrm{ds} &= \int_0^1 \left\langle v\big(\varphi_2(t)\big), \dot{\varphi}_2(t) \right\rangle \mathrm{dt} = \int_0^1 \left\langle \left(\begin{smallmatrix} t \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle \mathrm{dt} = \int_0^1 2 \, \mathrm{dt} = 2 \\
\int_{\varphi_3} v \cdot \mathrm{ds} &= \int_0^1 \left\langle v\big(\varphi_3(t)\big), \dot{\varphi}_3(t) \right\rangle \mathrm{dt} = \int_0^1 \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2-2t \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle \mathrm{dt} = \int_0^1 -1 \, \mathrm{dt} = -1 \\
\int_{\varphi_4} v \cdot \mathrm{ds} &= \int_0^1 \left\langle v\big(\varphi_4(t)\big), \dot{\varphi}_4(t) \right\rangle \mathrm{dt} = \int_0^1 \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1-t \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle \mathrm{dt} = 0
\end{aligned}$$

und in der Summe also

$$\int_{\partial Q} v \cdot \mathrm{ds} = \sum_{k=1}^{4} \int_{\varphi_k} v \cdot ds = 1. \tag{12}$$

Die Anwendung des Satzes von Stokes führt also zum gleichen Ergebnis.

Da wir in unserem Fall ein ebenes Pflaster und auch ein ebenes Vektorfeld haben, können wir auch den Satz von Green verwenden. Er lautet allgemein für ein zweidimensionales Vektorfeld $\bar{v} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

$$\int_M \frac{\partial}{\partial x} \bar{v}_2(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \bar{v}_1(x,y) \, \mathrm{d}^2(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \int_{\partial M} \bar{v}_1 \, \mathrm{dx} + \bar{v}_2 \, \mathrm{dy}. \tag{13}$$

Um den Satz anwenden zu können, identifizieren wir nun v mit dem Vektorfeld $\bar{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\bar{v} = (v_1, v_2)^{\mathrm{T}} = (y, 2x)^{\mathrm{T}}$. Außerdem identifizieren wir Φ mit $\bar{\Phi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\bar{\Phi} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$. Die ersten beiden Komponenten von Φ entsprechen ja gerade der Identitätsabbildung in $\mathbb{R}^2$.

Der Integrand auf der linken Seite von (13) entspricht nun gerade der dritten Komponente von $\operatorname{rot} v$, sodass die Zirkulation von ebenen Vektorfeldern mithilfe dieses Satzes berechnet werden kann. Es gilt die Gleichheit

$$\begin{aligned}
\int_Q \operatorname{rot} v \cdot \mathrm{do} &= \int_{[0,1]^2} \langle (\operatorname{rot} v) \circ \Phi(u,v)\,, \partial_1 \Phi(u,v) \times \partial_2 \Phi(u,v) \rangle \,\mathrm{d}^2(\mathrm{u},\mathrm{v}) \\
&= \int_{[0,1]^2} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} v_2\big(\Phi(u,v)\big) - \frac{\partial}{\partial y} v_1\big(\Phi(u,v)\big) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}^2(\mathrm{u},\mathrm{v}) \\
&= \int_M \frac{\partial}{\partial x} v_2\big(\Phi(u,v)\big) - \frac{\partial}{\partial y} v_1\big(\Phi(u,v)\big) \,\mathrm{d}^2(\mathrm{u},\mathrm{v}) \\
&= \int_M \frac{\partial}{\partial x} \bar{v}_2\big(\bar{\Phi}(u,v)\big) - \frac{\partial}{\partial y} \bar{v}_1\big(\bar{\Phi}(u,v)\big) \,\mathrm{d}^2(\mathrm{u},\mathrm{v}) \\
&= \int_M \frac{\partial}{\partial x} v_2(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} v_1(x,y) \,\mathrm{d}^2(\mathrm{x},\mathrm{y}) \\
&= \int_{\partial M} y \,\mathrm{dx} + 2x \,\mathrm{dy} = \int_{\partial M} v \cdot \mathrm{ds}\,.
\end{aligned} \tag{14}$$

Das Integral auf der rechten Seite berechnet sich nun ebenso wie in (12).

Bemerke, dass die Ränder ∂M und ∂Q beide eindimensionale Objekte sind, aber in unterschiedlichen Räumen leben ($\partial M \subset \mathbb{R}^2$ und $\partial Q \subset \mathbb{R}^3$). Die gerade verwendete Gleichheit

$$\int_Q \operatorname{rot} v \cdot \mathrm{do} = \int_{\partial M} v \cdot \mathrm{ds}, \tag{15}$$

die ja ein Korollar des Satzes von Green ist, rechtfertigt letztendlich auch das oben angesprochene direkte Einsetzen von $\operatorname{rot} v \cdot n = 1$ in (6), da die skalaren und vektoriellen Oberflächenelemente für ebene Vektorfelder über ebenen Pflastern miteinander verträglich sind.