Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
PD Dr. Angela Ortega

Probeklausur zur Vorlesung
Mathematik für PhysikerInnen (Analysis II) (SS 18)

Bitte schreiben Sie auf die Abgaben Ihren Namen, die Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe drauf.

Aufgabe 1 ($3 \times 5 = 15$ Punkte)

Sagen Sie ob die folgenden Aussagen falsch oder wahr sind und geben Sie eine kurze Begründung (einen Gegenbeispiel wenn die Aussage falsch ist und eine Skizze des Beweis wenn wahr ist).

(a) Ein kompakte Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist beschränkt.

(b) Wenn $\lim_{x\to a} \lim_{y\to b} f(x,y) = \lim_{y\to b} \lim_{x\to a} f(x,y)$, dann existiert $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$

(c) Wenn die partielle Ableitungen einer Funktion $f(x,y)$ existieren, dann ist f differenzierbar.

(d) Eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ konvergiert.

(e) Der Durchschnitt endlich vieler offener Menge ist offen

Aufgabe 2 ($3 \times 5 = 15$ Punkte)

Sei $f : (x,y) = \begin{cases} \frac{(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (1,0) \end{cases}$

(a) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

(b) Berechnen Sie den Gradient ∇f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$.

(c) Zeigen Sie, dass $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\})$

(d) Berechnen Sie nach Definition die partielle Ableitungen von f an der Stelle $(1,0)$.

(e) Zeigen Sie, dass f an der Stelle $(1,0)$ nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Bestimmen Sie die Extrema von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y^2 + xy \ln x$ und ob diese Minima oder Maxima sind.

Aufgabe 4 (16 Punkte)

Berechnen Sie die zweidimensionalne Taylorentwicklung der Funktion

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

um den Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (1,1)$ bis zur dritten Ordnung.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$x^3 + 4xy + z^2 - 3yz^2 - 3 = 0$$

nach z Auslösbar (d.h. existiert ψ mit $z = \psi(x, y)$) in einer Umgebung von $(1, 1, 1)$. Berechnen Sie $\partial_x \psi$ und $\partial_y \psi$.

Aufgabe 6 (17 Punkte)

Seien T die Dreiecke mit Ecken $(1, 0, 0)$, $(2, 2, 0)$, $(1, 1, 0)$ und das Vektorfeld $\mathbf{v}(x, y, z) = (0, x^2, y)$. Überprufen den Satz von Stokes in diesem Fall.

(a) Bestimmen Sie den Fluß von $\mathbf{v}$ durch T nach oben (positive Orientierung).

(b) Bestimmen Sie die Zirkulation von $\mathbf{v}$ um ∂T.

(c) Bestimmen Sie rot$\mathbf{v}$ und überprüfen den Satz von Stokes in diesem Fall.

Aufgabe 7 (13 Punkte)

Sei W das Gebiet in $\mathbb{R}^3$ beschränkt von dem Paraboloid $z = x^2 + y^2$ und der Ebene $z = 1$ und $\mathbf{v}(x, y, z) = (y, x, z^2)$. Berechnen Sie

$$\int_{\partial W} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{o}$$

mit Hilfe des Satzes von Gauß.