HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PD DR. ANGELA ORTEGA

Mathematik für PhysikerInnen (Analysis II) (SS 19)
Probeklausur

Aufgabe 1 (20 = 5 ×4 Punkte)

Sagen Sie ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und geben Sie eine kurze Begründung.

(a) Wenn f stetig ist, dann existiert der Gradient ∇f.

(b) Wenn $\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y) = \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y)$, dann existiert $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$.

(c) Eine kompakte Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist beschränkt.

(d) Eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ konvergiert.

(e) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.

Aufgabe 2 (20= 5× 4 Punkte)

Sei $f : (x,y) = \begin{cases} \frac{(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (1,0) \end{cases}$

(a) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

(b) Berechnen Sie den Gradient ∇f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$.

(c) Zeigen Sie, dass $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\})$

(d) Berechnen Sie nach Definition die partiellen Ableitungen von f an der Stelle $(1,0)$.

(e) Zeigen Sie, dass f an der Stelle $(1,0)$ nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$x^3 + 4xy + z^2 - 3yz^2 - 3 = 0$$

nach z auflösbar ist (d.h. es existiert ein ψ mit $z = \psi(x,y)$) in einer Umgebung von $(1,1,1)$. Berechnen Sie $\partial_x\psi$ und $\partial_y\psi$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Extrema von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y^2 + xy\ln x$ und ob diese Minima oder Maxima sind.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Berechnen sie die zweidimensionale Taylorentwicklung der Funktion

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

um den Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (1,1)$ bis zur dritten Ordnung.

Aufgabe 6 (18 = 7+ 7 + 6 Punkte)

Seien $\vec{\mathbf{v}} = (x^2, 2xy + x, z)$ ein Vektorfeld, $C = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ eine Kurve und $S = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ eine Fläche in $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie den Fluß von $\vec{\mathbf{v}}$ durch S, in der Richtung durch $\vec{\mathbf{n}}(0,0,0) = (0,0,1)$ gegeben.

(b) Bestimmen Sie die Zirkulation von $\vec{\mathbf{v}}$ um C.

(c) Bestimmen Sie die Rotation rot $\vec{\mathbf{v}}$ und überprüfen Sie den Satz von Stokes in diesem Fall.

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Sei W das Gebiet in $\mathbb{R}^3$ beschränkt durch den Paraboloid $z = x^2 + y^2$ und der Ebene $z = 1$ und $\vec{\mathbf{v}}(x,y,z) = (y, x, z^2)$. Berechnen Sie

$$\int_{\partial W} \vec{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{o}$$

mit Hilfe des Satzes von Gauß.