NOTIZEN DER VORLESUNG ANALYSIS III FÜR PHYSIKSTUDIENGÄNGE

ANGELA ORTEGA

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Unbekannte in einer Differentialgleichung ist eine Funktion und diese Funktionen „wohnen” in unendlich-dimensionalen Vektorräume. Man unterscheidet drei typen:

- gewöhnliche Differentialgleichungen
- partielle Differentialgleichungen
- systeme von Differentialgleichungen

(a) Gewöhnliche Differentialgleichungen. Hier die Unbekannte ist eine reelle Funktion $x = x(t)$, $x : I \to \mathbb{R}$, mit $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, die die folgende Gleichung erfüllt

$$F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0, \quad F : D \to \mathbb{R}$$

Die Ableitung $n \in \mathbb{N}$ heißt die Ordnung der Differentialgleichung.

Beispiel. Die zeitliche Auslenkung $x(t)$ eines eindimensionalen harmonischen Oszillators unter einer äußer Kraft $K(t)$ gehorcht der gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordunung:

$$\ddot{x}\ (t) + 2\eta\ \dot{x}\ (t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{1}{m} K(t)$$

wobei m=Masse, $\eta \geq 0$ ist die Reibungskonstante und $\omega_0^2 > 0$ ist die Eigenfrequenz.

(b) Partielle Differentialgleichungen. Hier tritt in der Differentialgleichung eine unbekannte reelle Funktion $y = y(x_1, \dots, x_r)$, $y : I_1 \times \cdots \times I_r \to \mathbb{R}$, $I_i \subset \mathbb{R}$.

$$F\left(x_i, y, \frac{\partial y}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}, \dots, \frac{\partial^n y}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_n}}\right) = 0$$

Die höchste auftretende Ableitung $n \in \mathbb{N}$ heißt die Ordnung.

Beispiel. Eine elektrische Raumladungsdichte $\rho(\vec{x})$ erzeugt das elektrische Potential $\varphi(\vec{x})$ gemäß:

$$\Delta\varphi(\vec{x}) = -4\pi\rho(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3$$

wobei $\Delta = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ ist der Laplaceoperator. Die Potentialgleichung der Elektrostatik ist eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung.

(c) Systeme von Differentialgleichungen.
Seien $y_k = (x_1, \dots, x_r)$, $k = 1, \dots, p$, Funktionen die die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$F_l\left(x_i, y_k, \frac{\partial y_k}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}, \dots, \frac{\partial^n y_k}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_n}}\right) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, q, \quad i_1, i_2, \dots, i_n \in \{1, 2, \dots, r\}.$$

Beispiel. Ein Massenpunkt mit Ortsvektor $\vec{x}(t)$ bewegt sich unter dem Einfluss einer Kraft $\vec{K}(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}))$ gemäßNewtons Bewegungsgleichungen:

$$m\ \ddot{\vec{x}}\ (t) = \vec{K}(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}})).$$

Die ist ein System von drei gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Fragen:

- Existiert eine Lösung?
- Falls eine Lösung existiert ist sie eindeutig?
- Falls mehrere Lösungen existieren, wie sieht die Menge der Lösungen aus?

1. Anfangswertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen

1.1. Existenz und Eindeutigkeit. Wir behandeln Differentialgleichungen der Form:

$$y' = f(x,y), \quad y : I \to \mathbb{R}, \quad I \subset \mathbb{R}.$$

wobei $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig, $D = I \times I' \subset \mathbb{R}^2$. Geometrisch, in jedem Punkt $(x_0, y_0) \in D$, $f(x_0, y_0)$ ist die Steigung der Tangente und die Kurve $(x, y(x))$ auf den Punkt (x_0, y_0). Es wird eine Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ gesucht deren Graph die durch f gegebene Richtung hat. Z.B. Richtungfeld zu $f(x,y) = -y^2$.

Anfangswertproblem. Seien $I, I' \subset \mathbb{R}$ beliebige Intervallen, $f : I \times I' \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $(x_0, y_0) \in I \times I'$. Eine *Lösung* der Differentialgleichung

$$y' = f(x,y), \text{ durch } (x_0, y_0), \tag{1.1}$$

ist eine differenziarbare Funktion $\varphi : [a,b] \to I'$ (dabei $x_0 \in [a,b,] \to I$) so dass gilt:

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \quad \forall x \in [a,b] \text{ und } \varphi(x_0) = y_0.$$

Eine Lösung $\varphi : I_{max} \to I'$ von (1.1) heißt **maximale Lösung** wenn für jede andere Lösung $\tilde{\varphi} : \tilde{I} \to I'$ von (1.1) gilt $\tilde{I} \subset I_{max}$ und $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x), \forall x \in \tilde{I}$.

Hauptsatz 1.1. *Ist $f : I \times I' \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt: Eine stetige Funktion $\varphi : I \to I'$ ist genau dann Lösung der Differentialgleichung (1.1) wenn für alle $x \in I$ gilt*

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt$$

Beweis. Man wendet den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung an:
($\Rightarrow$) ist φ eine Lösung durch $(x_0, y_0) \Rightarrow \varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ und daher

$$\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt = \int_{x_0}^{x} \varphi'(t)dt = \varphi(x) - y_0.$$

($\Leftarrow$) Aus $\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt$ folgt $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ und $\varphi(x_0) = y_0$. $\square$

Beispiel 1.2. Wir betrachten das Anfangswertproblem $y'(x) = |y(x)|^{3/2}$, $y(x_0) = y_0$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Man bemerkt dass die Funktion $f(x,y) = |y|^{3/2}$ einmal stetig differenzierbar ist aber nicht zweifach. Die maximale Lösung ist

$$\hat{\varphi}(x, x_0, y_0) = \begin{cases} \frac{4y_0}{(2-(x-x_0)\sqrt{y_0})^2} & x < x_0 + \frac{2}{\sqrt{y_0}}, & \text{falls } y_0 > 0 \\ 0 & x \in \mathbb{R} & \text{falls } y_0 = 0 \\ \frac{4y_0}{(2+(x-x_0)\sqrt{-y_0})^2} & x > x_0 - \frac{2}{\sqrt{-y_0}}, & \text{falls } y_0 < 0 \end{cases}$$

Definition 1.3. Eine Funktion $f : I \times I' \to \mathbb{R}$ genügt einer **Lipschitz-Bedingung (L-B)** wenn es ein $L > 0$ gibt, so dasss $\forall x \in I$ und $y, \tilde{y} \in I'$ gilt:

$$|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| < L|y - \tilde{y}|.$$

L heißt eine Lipschitz-Konstant zu f. Ferner, f gengüt **lokal einer Lipschitz-Bedingung**, wenn es zu jedem Punkt $(x_0, y_0) \in I \times I'$ eine Umgebung U bezüglich $I \times I'$ gibt [1], in der f einer Lipschitz-Bedingung genügt.

[1]d.h. $\exists \varepsilon > 0$ mit $\{(x,y) \in I \times I' \; ||(x,y) - (x_0,y_0))|| < \varepsilon\} \subset U$

Bemerkung 1.4. Wenn $\frac{\partial f}{\partial y}$ existiert und beschränkt ist, so genügt f einer Lipschitz-Bedingung. Denn, nach dem Mittelwertsatz, existiert zu $x \in I,\ y, \tilde{y} \in I'$ ein $\eta \in [y, \tilde{y}]$ mit

$$f(x,y) - f(x,\tilde{y}) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta)(y-\tilde{y}).$$

Insbesondere, gengüt jede Funktion f, die stetig partiell nach y differenzierter ist, lokal einer L-B.

Hauptsatz 1.5. *Seien $I, I' \subset$ Intervalle. Die Funktion $f : I \times I' \to \mathbb{R}$ sei stetig und genüge lokal einer Lipschitz-Bedingung,*
(i) (Existenz) so existiert durch jeden Punkt $(x_0, y_0) \in I \times I'$ eine Lösung der Differentialgleichung (1.1).
(ii) (Eindeutigkeit) $\varphi : I \to I'$, $\psi : I \to I'$ seien Lösungen von $y' = f(x,y)$. Es existiert $x_0 \in I$ mit $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$. Dann gilt $\varphi(x) = \psi(x), \forall x \in I$.

Bemerkung 1.6. Daher folgt dass das Anfanswertproblem eine eindeutige maximale Lösung besitzt.

Beweis. (ii) Eindeutigkeit. Seien $\psi, \varphi : I \to I'$ Lösungen von $y' = f(x,y)$.Angenommen: $\exists x_0 \in I$ mit $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$. Zu zeigen: ist $x_0 \in [a,b]$ dann $\varphi(x) = \psi(x)\ \forall x_0 \le x \le b$ (für $a \le x \le x_0$ beweist man analog). Sei

$$T := \{x \in [x_0, b] \mid \varphi(t) = \psi(t),\ \forall t \in [x_0, x]\}.$$

Da $x_0 \in T, T \neq \emptyset$ und T ist nach oben beschränkt. Nach Lemma von Zorn folgt dass $\exists s :=$sup$T$. Weil φ und ψ stetig sind, gilt $\varphi(s) = \psi(s) =: w$. Zu zeigen $s = b$. Wir nehmen $s < b$ an. Wir wählen $\delta_1 > 0$ und $\varepsilon > 0$ so, dass (1) $s + \delta_1 < b$, (2) f genügt in $[s, s+\delta_1] \times [w-\varepsilon, w+\varepsilon]$ einer L-B mit Konstanten L und (3) $|\varphi(x) - w| < \varepsilon$, $|\psi(x) - w| < \varepsilon\ \forall x \in [s, s+\delta_1]$.
Dann sei δ so gewählt, dass $0 < \delta < \delta_1$ und $\delta < \frac{1}{2L}$ gilt. Wir setzen

$$A := \sup\{|\varphi(t) - \psi(t)| \ \mid\ t \in [s, s+\delta]\}$$

Nach Satz 1.1:

$$\varphi(x) = w + \int_s^x f(t,\varphi(t))dt, \qquad \psi(x) = w + \int_s^x f(t,\psi(t))dt.$$

Für $x \in [s, s+\delta]$ gilt:

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \psi(x)| &\le \int_s^x |f(t,\varphi(t)) - f(t,\psi(t))|dt \\ &\le L\int_s^x |\varphi(t) - \psi(t)|dt \\ &\le L\int_s^{s+\delta} A dt = LA\delta < \frac{A}{2}. \end{aligned}$$

Man nimmt das Supremum beide Seiten und es ergibt sich $A \le \frac{A}{2}$, d.h. $A = 0$. Daraus folgt $\varphi(t) = \psi(t), \forall t \in [s, s+\delta]$. Da $\delta > 0$ dies gibt ein Wiederspruch zu $A = \sup T$.

(i) Existenz. Zu zeigen: es existiert eine stetige Funktion φ mit

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t,\varphi(t))dt.$$

Wir werden φ als Grenzwert einer Folge (φ_n) erhalten. Man wählt $\delta_1 > 0, \varepsilon > 0$ so, dass f in $[x_0-\delta_1, x_0+\delta_1]\times[y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon] \subset I \times I'$ einer L-B mit Konstanten $L > 0$ genügt. Da f stetig ist,

$$\exists M > 0 \text{ mit } |f(x,y)| \leq M \ \forall (x,y) \in [x_0-\delta_1, x_0+\delta_1]\times[y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon]$$

Man wählt $\delta > 0$ so, dass $\delta < \delta_1$ und $\delta \leq \frac{\varepsilon}{M}$. Wir definieren die Folge $\varphi_n : [x_0-\delta, x_0+\delta] \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &:= y_0 \\
\varphi_1(x) &:= y_0 + \int_{x_0}^x f(t,\varphi_0(t))dt \\
&\vdots \\
\varphi_n(x) &:= y_0 + \int_{x_0}^x f(t,\varphi_{n-1}(t))dt
\end{aligned}$$

Wir werden durch vollständige Induktion zeigen: für $n \in \mathbb{N},\ x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$ gilt

$$(1) \qquad |\varphi_n(x) - y_0| \leq \varepsilon$$

daher ist $f(x,\varphi_n(x))$ definiert, und

$$(2) \qquad |\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}L^n|x-x_0|^{n+1}.$$

Die Behauptung (1) folgt aus

$$\begin{aligned}
|\varphi_n(x) - y_0| &\leq \int_{x_0}^x |f(t,\varphi_n(t))|dt \\
&\leq \delta M \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Für (2), Induktionsanfang ergibt sich aus

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(t,y_0)|dt \leq M|x-x_0|.$$

Induktionsschtritt (von n auf $n+1$):

$$\begin{aligned}
|\varphi_{n+2}(x) - \varphi_{n+1}(x)| &\leq \int_{x_0}^x |f(t,\varphi_{n+1}(t)) - f(t,\varphi_n(t))|dt \\
&\leq L\int_{x_0}^x |\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)|dt \\
&\leq L\frac{M}{(n+1)!}L^n\int_{x_0}^x |t-x_0|dt \\
&= \frac{M}{(n+2)!}L^{n+1}|x-x_0|^{n+2}.
\end{aligned}$$

Nun schreiben wir $\varphi_k = y_0 + \sum_{n=1}^k(\varphi_n - \varphi_{n-1})$. Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty(\varphi_n - \varphi_{n-1})$ ist gleichmäßig konvergent, denn

$$\sum_{n=1}^\infty |\varphi_n - \varphi_{n-1}| \leq \frac{M}{L}\sum_{n=1}^\infty \frac{L^n\delta^n}{n!}$$

daher existiert eine stetige Funktion $\varphi := \lim_{n\to\infty} \varphi_n$. Aus

$$|f(x,\varphi_n(x)) - f(x,\varphi(x))| \le L|\varphi_n(x) - \varphi(x)|$$

folgt dass auch $f(x,\varphi_n(x))$ konvergiert nach $f(x,\varphi(x))$ gleichmäßig. Daher darf man Limes und Integration vertauschen:

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{n+1}(x) = y_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi_n(t))dt = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt$$

Nach Satz 1.1 folgt dass φ eine Lösung von $y' = f(x,y)$ durch (x_0, y_0) ist. □

Bemerkung 1.7. Wenn f stetig ist und einer L-B genügt und $f(x,0) = 0\ \forall x$ gilt, dann $y \equiv 0$ ist eine Lösung von $y' = f(x,y)$. Wenn φ eine Lösung von $y' = f(x,y)$ ist und besitzt eine Nullstelle, dann $\varphi \equiv 0$. Mit anderen Wörten, nach der Eindeutigkeitsatz dürfen die Lösungen nicht schneiden.

Gegenbeispiel 1.8. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sqrt{|x|}$ und die Anfangswertproblem:

$$y'(x) = \sqrt{|y|}, \qquad y(0) = 0.$$

Dann existiert unendlich viele verschiedene maximale Lösungen: für jedes $c \ge 0$ ist

$$y(x) = \begin{cases} \frac{(x-c)^2}{4} & \text{für } x \ge c \\ 0 & x < c \end{cases}$$

eine maximale Lösung. Man bemerkt dass f stetig ist aber sie ist nicht differenzierbar.

Definition 1.9. Wir bezeichnen die Lösung von $y' = f(x,y)$ durch (x_0, y_0) mit $\varphi(x; x_0, y_0)$, sie heißt die **allgemeine Lösung**.

Beispiel 1.10. Die Differentialgleichung $y' = y$ hat $y = ce^x$ als Lösung. Die Lösung durch (x_0, y_0) ergibt sich mit $y_0 = ce^{x_0}$, so die allgemeine Lösung ist $\varphi(x; x_0, y_0) = y_0 e^{x-x_0}$.

1.2. **Einigen Lösungen Methoden.**

(a) Trennung der Variablen

Man nimmt an dass f als Produkt $f(x,y) = g(x)h(y)$ mit g, h stetig, darstellen lässt. Dann

$$y' = \frac{dy}{dx} = g(x)h(y).$$

Falls $h(y) \ne 0$, kann man beide Seite der Gleichung integrieren:

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx.$$

Es ergibt sich

$$H(y) = G(x), \tag{1.2}$$

mit H und G Stammfunktionen von $\frac{1}{h}$ bzw. von G. Wegen $H'(y) = \frac{1}{y} \neq 0$ kann man lokal die Gleichung (1.2) auslösen: $\varphi(x) = H^{-1}(G(x))$. Da $H(\varphi(x)) = G(x)$, folgt $H'(\varphi(x))\varphi(x) = G'(x)$. So $\frac{\varphi'(x)}{h(\varphi(x))} = g(x)$.

Beispiel 1.11. Wir betrachten $y' = \frac{y}{x}$, $x > 0$. Die integration

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}, \quad x > 0$$

ergibt sich $\ln|y| = \ln|x| + c'$ und daher $y = \pm e^{c'}x$. Die Lösungen sind $y = cx$ mit $c \in \mathbb{R}$. Durch (x_0, y_0), $x_0 > 0$ ist die Lösung $y = \frac{y_0}{x_0}x$ die allgemeine Lösung $\varphi(x; x_0, y_0) = \frac{y_0}{x_0}x$, $x_0 > 0$.

Beispiel 1.12. Man betrachtet $y' = -y^2$. Die Funktion $f(x, y) = -y^2$ genügt lokal einer L-B, denn $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$ stetig ist . Dann gibt es genau eine Lösung durch jeden Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Nach Trennung der Variablen

$$\int \frac{dy}{-y^2} = \int dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} = x + c \quad y = \frac{1}{x + c}, \qquad \text{mit } c \in \mathbb{R}.$$

Die allgemeine Lösung ist somit

$$\varphi(x; x_0, y_0) = \frac{1}{x - x_0 + (1/y_0)} \begin{cases} \text{falls } y_0 < 0 & \text{für } x \in (-\infty, x_0 - \frac{1}{y_0}) \\ \text{falls } y_0 > 0 & \text{für } x \in (x_0 - \frac{1}{y_0}, \infty) \end{cases}$$

Man bemerkt dass es nicht nötwendig Lösung in ganz $\mathbb{R}$ gibt, auch wenn $f(x, y)$ in ganz $\mathbb{R}^2$ definiert ist.

Beispiel 1.13. Man betracht das Anfangswertproblem $y'(x) = 2xy(x)^2$, $y(1) = 1$. Man bemerkt $\frac{\partial f}{\partial y} = 4xy$ stetig ist so existiert es genau eine maximale Lösung durch $(1, 1)$. Nach der Trennung der Variablen:

$$\int_1^y \frac{ds}{s^2} = \int_1^x 2tdt \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{y(x)} + 1 = x^2 - 1 \tag{1.3}$$

Das größte Intervall $I \subset \mathbb{R}$ das die Eins enthält und das die Eigenschaft besitzt dass $\forall x \in I$ (1.3) eine Lösung $y(x) \in (0, \infty)$ hat ist $I = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Beispiel 1.14. Man betracht das Anfangswertproblem $x'(t) = \sin x(t)$, $x(0) = 1$ mit $(t, x) \in \mathbb{R} \times (0, \pi)$ als Definitionsintervall von $f(t, x) = \sin x(t)$. Da $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x$ stetig ist, gibt es genau eine Lösung durch $(0, 1)$. Nach Trennung der Variablen findet man:

$$\int_0^x \frac{d\tilde{x}}{\sin \tilde{x}} = \int_0^t d\tilde{t} = t.$$

Das Integral der Linke Seite ist keine elementare Funktion seiner oberen Integrationsgrenze. So kann man nicht $x(t)$ in geschlossener Form angeben. Man kann trotzdem etwas über den Verhältnis der Lösung sagen. Wegen

$$\lim_{x \uparrow \pi} \int_1^x \frac{d\tilde{x}}{\sin \tilde{x}} = +\infty, \qquad \lim_{x \downarrow 0} \int_1^x \frac{d\tilde{x}}{\sin \tilde{x}} = \lim_{x \downarrow 0} \left(-\int_x^1 \frac{d\tilde{x}}{\sin \tilde{x}} \right) = -\infty$$

folgt dass die maximale Lösung $x(t)$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist und dass gilt

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \pi, \qquad \lim_{t\to-\infty} x(t) = 0.$$

(b) Exakte Gleichungen und integrierende Faktor

Seien $I, I' \subset \mathbb{R}$ Intervalle. Wir nehmen an, dass die Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ sich in der Form

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{1.4}$$

schreiben lässt mit $P, Q : I\times I' \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und es gelte $Q(x,y) \neq 0\ \forall (x,y) \in I\times I'$. Nach Analysiskurs ist den folgenden Satz bekannt:

Satz 1.15. *Unter den obige Voraussetzungen hat man: ist $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = d\phi(x,y)$ für eine Funktion ϕ genau dann wenn P, Q im einem einfach zusammenhängend Gebiet stetig partiell differezierbar sind und dort die Integrabilitätsbedingung:*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{1.5}$$

erfüllt. In diesem Fall lautet die Differentialgleichung (1.4) $d\phi(x,y) = 0$ (sie heißt dann exakt).

Wenn (1.4) die Bedingung (1.5) erfüllt ist dann $\phi(x,y)$ Konstante und man kann daraus nach y auslösen um eine Lösung von (1.4) erhälten. Da gilt

$$P = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

lässt sich ϕ durch ein Kurvenintegral zwischen die Punkte $P_0 = (x_0, y_0)$ und $P_1 = (x_1, y_1)$ aus P und Q bestimmen:

$$\int_{P_0}^{P_1} Pdx + Qdy = \int_{P_0}^{P_1} d\phi = \phi(x_1,y_1) - \phi(x_0,y_0).$$

Da $\int d\phi$ unabhängig vom Weg ist, wählt man die einfachste Kurve γ (wie in Fig.). Dann gilt

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \int_{x_0}^{x_1} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y_1} Q(x_1,y)dy.$$

Damit erhählt man (für $x_1 \to x$ und $y_1 \to y$):

$$\phi(x,y) = \phi(x_0,y_0) + \int_{x_0}^{x} P(\tilde{x},y_0)d\tilde{x} + \int_{y_0}^{y} Q(x,\tilde{y})d\tilde{y} = \text{Konstante.} \tag{1.6}$$

Beispiel 1.16. Man betracht die Differentialgleichung $xydx + \frac{1}{2}x^2dy = 0$. Da $\frac{\partial P}{\partial y} = x = \frac{\partial Q}{\partial x}$ gilt, ist sie exakt. Nach (1.6) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\phi(x,y) &= \phi(x_0,y_0) + \int_{x_0}^{x} y_0\tilde{x}d\tilde{x} + \int_{y_0}^{y} \frac{1}{2}x^2 d\tilde{y} \\
&= \phi(x_0,y_0) + \frac{x^2y_0}{2} - \frac{x_0^2y_0}{2} + \frac{x^2y}{2} - \frac{x^2y_0}{2} \\
&= \frac{x^2y}{2} + C_0
\end{aligned}$$

Die Lösung der Differentialgleichung $d\phi = 0$ ist daher $y = \frac{C}{x^2}$, mit $C \in \mathbb{R}$.

Beispiel 1.17. Man betracht das Anfangswertproblem $y'(x) = \frac{-(e^x y^2+2)}{2e^x y}$, $y(0) = 1 = y_0$. Man setzt $P(x,y) = e^x y^2 + 2$ und $Q(x,y) = 2e^x y$. Da $\frac{\partial P}{\partial y} = 2e^x y = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ist die Differentialgleichung

$$(e^x y^2 + 2)dx + 2e^x y dy = 0$$

exakt. Nach (1.6) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\phi(x,y) &= C_0 + \int_0^x (e^{\tilde{x}} + 2) d\tilde{x} + \int_1^y 2e^x \tilde{y} d\tilde{y} \\
&= C_0 + (e^{\tilde{x}} + 2\tilde{x})\Big|_0^x + e^x \tilde{y}^2\Big|_1^y \\
&= C_0 + e^x + 2x - 1 + e^x y^2 - e^x
\end{aligned}$$

Daher $e^x y^2 = C - 2x$. Da $y(0) = 1$, erhält man $C = 1$. Für $y > 0$

$$y = \sqrt{(1-2x)e^{-x}} \qquad x \in (\infty, 1/2)$$

ist eine maximale Lösung.

Allgemein ist eine Funktion $\mu(x,y)$ ein integrierender Faktor für die Differentialgleichung $Pdx + Qdy = 0$ wenn daraus durch Multiplikation mit μ ein totales Differential wird, d.h. wenn gilt:

$$\mu P dx + \mu Q dy = d\phi.$$

Zum Beispiel x ist ein integrierender Faktor der Differentialgleichung $ydx + \frac{1}{2}xdy$ da $\frac{\partial xP}{\partial y} = x = \frac{\partial xQ}{\partial x}$ gilt. Mann bestimmt μ aus der Integrabilitätsbedingung:

$$\frac{\partial xP}{\partial y} - \frac{\partial xQ}{\partial x} = 0.$$

Hat man μ gefunden, aus $\phi(x,y)$ =Konstante ergibt sich eine Losung wie oben, wobei man P bzw. Q durch μP bzw. μQ ersetzt hat.
Wir kann man ein integrierenden Faktor berechnen? Wir haben den Ansatz:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mu P}{\partial y} - \frac{\partial \mu Q}{\partial x} = 0 \\
\Rightarrow\quad & P\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial P}{\partial y} - Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - \mu\frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\
\Rightarrow\quad & \mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Wenn

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

unabhänging von y ist (und natürlich $Q(x,y) \neq 0$ in einer Umgebung) dann kann man $\mu = \mu(x)$ annehmen, d.h. μ hängt nur von x ab. Dann bestimmt man $\mu(x)$ aus

$$\mu'(x) = \frac{\mu}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right).$$

Analog wenn

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

unabhänging von x ist (und $P(x,y)\neq 0$ in einer Umgebung) dann kann man $\mu=\mu(y)$ annehmen und aus

$$\mu'(y)=\frac{-\mu}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

kann man $\mu(y)$ bestimmen.

Beispiel 1.18. Wir betrachten

$$y'=\frac{-(1+2x^2y^2)}{x^3y},\qquad y(1)=1.$$

So $P(x,y)=1+2x^2y^2$ und $Q(x,y)=x^3y$. Man bemerkt

$$\frac{\partial P}{\partial y}=4x^2y,\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=3x^2y,$$

so die Differentialgleichung ist nicht exakt. Weil

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{4x^2y-3x^2y}{x^3y}=\frac{1}{x}$$

unabhänging von y ist und $Q(x,y)\neq 0$ gilt in einer Umgebung von $(1,1)$, kann man $\mu(x)$ berechnen durch $\mu'(x)=\frac{\mu}{x}$. Man findet $\mu(x)=x$ als integrierenden Faktor. Nun ist

$$(x+2x^3y^2)dx+x^4ydy=0=d\phi$$

exakt. Dann

$$\begin{aligned}
\phi(x,y) &= C_0+\int_1^x(\tilde{x}+2\tilde{x}^3)d\tilde{x}+\int_1^y x^4\tilde{y}d\tilde{y}\\
&= C_0+\left(\frac{\tilde{x}^2}{2}+\frac{\tilde{x}^4}{2}\right)\Big|_1^x+\frac{x^4\tilde{y}^2}{2}\Big|_1^y\\
&= C_0+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2}-1+\frac{x^4y^2}{2}-\frac{x^4}{2}
\end{aligned}$$

Daher $x^4y^2=C-x^2$. Da $y(1)=1$ gilt, hat man $C=2$. Für $y>0$ die maximale Lösung durch $(1,1)$ ist

$$y=\sqrt{\frac{2-x^2}{x^4}}\qquad x\in(0,\sqrt{2}).$$

(c) Variation der Konstanten

Sind $g,h:I\to\mathbb{R}$ stetige Funktionen so heißt

$$y'=g(x)y+h(x)\tag{1.7}$$

eine *lineare Differentialgleichung* und die Differentialgleichung

$$y'=g(x)y\tag{1.8}$$

heißt die zugehörige *homogene Gleichung*. Um (1.8) zu lösen man wählt G eine Stammfunktion von g und erhält alle Lösungen $y = ce^{G(x)}$, mit $c \in \mathbb{R}$. Wir machen den Ansatz

$$y = c(x)e^{G(x)} \tag{1.9}$$

den als *Variation der Konstanten* bezeichnet ist. Wir nehmen an, dass (1.9) eine Lösung von (1.7) ist, dann gilt es $c'(x) = h(x)e^{-G(x)}$. Man bestimmt die Funktion $c(x) : I \to \mathbb{R}$ als folgende: da $c(x)e^{G(x)}$ eine Lösung von (1.7) ist, muss es gelten

$$y' = c'(x)e^{G(x)} + c(x)g(x)e^{G(x)} = g(x)y + h(x).$$

Daraus folgt $c'(x)e^{G(x)} = h(x)$. So erhält man $c(x)$ als Stammfunktion von he^{-G}.

Bemerkung 1.19. Ist $\tilde{y}$ eine Lösung von (1.7), dann ist

$$\{\tilde{y} + ce^G \ \mid \ c \in \mathbb{R}\}$$

die Menge *alle* Lösungen von (1.7). Es reicht eine einzige Lösung der inhomogen Gleichung zu finden um alle Lösungen zu erhalten.

Beispiel 1.20. Sei $y' = y + x$. Die homogene Gleichung $y' = y$ hat die Lösung $y = ce^x$. Der Variation der Konstante $y = c(x)e^x$ ergibt

$$y' = c'(x)e^x + c(x)e^x = y + x$$

Dann $c'(x)e^x = x$. Man findet die Stammfunktion $-(x+1)e^{-x}$ von $c'(x)$. Eine Lösung der inhomgene Gleichung ist somit

$$y = c(x)e^x = (-(x+1))e^{-x})e^x = -(x+1)$$

und alle Lösungen sind $\{ce^x - x - 1 \ \mid \ c \in \mathbb{R}\}$.

Beispiel 1.21. Ein Körper der Masse m falle unter dem Einfluß der Schwerkraft in einem widerstrebenden Mittel wobei wir annehmen, dass der Widerstand proportional zu Geschwindigkeit ist. Sei $v(t)$ die Geschwindigkeit zu Zeit t. Nach Newtonsgesetz erhält man die Differentialgleichung

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv,$$

wobei $k > 0$ ist die Proportionalitätskonstante und g ist die Erdbeschleunigung. Also $v' = g - \frac{k}{m}v$. Die homogene Gleichung $v' = -\frac{k}{m}v$ hat die Lösung $v = ce^{\frac{k}{m}t}$. Die Variation der Konstante $v(t) = c(t)e^{\frac{k}{m}t}$ liefert $c'(t) = ge^{\frac{k}{m}t}$, mit Stammfunktion $\frac{gm}{k}e^{\frac{k}{m}t} + c$. Da $v(0) = 0$, erhält man $c = -\frac{gm}{k}$. Daher folgt

$$v(t) = \left(\frac{gm}{k}e^{\frac{k}{m}t} - \frac{gm}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} = \frac{gm}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

Die Geschwindigkeit nimmt beim Fallen ständig zu und nähert sich exponentiell der Konstanten Endgeschwindigkeit

$$v_\infty = \lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{gm}{k}$$

Beispiel 1.22. Wir betrachten eine Population mit Anzahl $x(t)$ zu Zeit t. Seien $a > 0$ die Wachstumskonstante (bei $a < 0$ sprechen wir über Zerfallen) und $b > 0$ die zeitlich Konstante Zuwanderung (bei $b < 0$ sprechen wir über Auswanderung). Dies führt die lineare Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = x' = ax + b.$$

Man bemerkt, dass eine Lösung ist die Konstante $\varphi(t) = -\frac{b}{a}$. Alle Lösungen sind

$$\{\varphi(t) = -\frac{b}{a} + Ce^{at} \ \mid \ C \in \mathbb{R}\}$$

Sei $\varphi(0) = c_0$ der Anfangswert. Dann $C = c_0 + \frac{b}{a}$. Die Lösung mit $\varphi(0) = c_0$ ist

$$\varphi(t) = -\frac{b}{a} + \left(c_0 + \frac{b}{a}\right) e^{at}.$$

Man berechnet $\varphi'(t) = a(c_0 + \frac{b}{a})e^{at}$. Wir untersuchen den Verlauf von φ und unterschieden vier Fälle.
(A) Für $a > 0$, $b > 0$ (Wachstum und Zuwanderung) ist $\varphi(t)$ streng monoton wachsend da $\varphi'(t) > 0$ $\forall t > 0$ und zusammen mit $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = +\infty$ bedeutet dass die Population unbegrenzt wächst.

(B) Für $a < 0$, $b < 0$ (Zerfall und Auswanderung) ist $\varphi(t)$ streng monoton fallend da $\varphi'(t) < 0$ $\forall t > 0$ und $\varphi(t)$ hat eine Nullstelle

$$t_0 = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{b/a}{c_0 + b/a}\right)$$

der Zeitpunkt wo die Population ist ausgestorben.

(C) Für $a < 0$, $b > 0$ (Zerfall und Zuwanderung) es gilt $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = -\frac{b}{a} > 0$, also die Population strebt gegen $-\frac{b}{a}$ unabhängig von Anfangswert c_0. Man unterscheidet drei Fälle:

- $0 < c_0 < -\frac{b}{a}$: $\varphi'(t) > 0$ dann $\varphi(t)$ ist streng monoton wachsend gegen $-\frac{b}{a}$.
- $c_0 > -\frac{b}{a}$: $\varphi'(t) < 0$ dann $\varphi(t)$ ist streng monoton fallend gegen $-\frac{b}{a}$.
- $c_0 = -\frac{b}{a}$: $\varphi(t)$ ist konstant.

(D) Für $a > 0$, $b < 0$ (Wachstum und Auswanderung). Man unterscheidet drei Fälle:

- $0 < c_0 < -\frac{b}{a}$: $\varphi'(t) < 0$ dann $\varphi(t)$ ist streng monoton fallend und besitzt eine Nullstelle $t_0 > 0$ wie oben. Evtl. die Population stirbt aus.
- $c_0 > -\frac{b}{a}$: $\varphi'(t) > 0$ dann $\varphi(t)$ ist streng monoton wachsend und $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = +\infty$, also die Population wächst unbegrenzt.
- $c_0 = -\frac{b}{a}$: die Population ist konstant.

(d) Reduktion der Ordnung .

Bisher haben wir DG von 1. Ordnung behandeln. Nun betrachten wir DG der Form $F(x, y, y'y'') = 0$, in zwei besondere Fälle.

(i) DG ohne die abhängige Variable y: $F(x, y', y'') = 0$. Wir führen eine neue Variable an:

$$z := y', \qquad y'' = \frac{dz}{dx}.$$

Dann die Substitution liefert eine DG 1. Ordnung $F(x, z, \frac{dz}{dx}) = 0$.

Beispiel 1.23. Man betrachtet $xy'' - y' = 3x^2$. Wir setzen $z = y'$ und $z' = y''$. Dann

$$x\frac{dz}{dx} - z = 3x^2$$

ist eine lineare DG 1.Ordnung mit Lösungen $z = 3x^2 + c_1 x$, $c_1 \in \mathbb{R}$. Nach Trennung der Variablen findet man

$$y = x^3 + \frac{1}{2}c_1 x^2 + c_2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(ii) DG ohne die unabhängige Variable x: $F(y, y', y'') = 0$. Wir setzen:

$$z := y', \qquad z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}.$$

Dann die Substitution liefert eine DG 1. Ordnung $F(y, z, z\frac{dz}{dy}) = 0$.

Beispiel 1.24. Man betrachtet die DG 2. Ordnung $y'' + k^2 y = 0$. Wir setzen $z = y'$ und $z' = y'' = z\frac{dz}{dy}$. Das ergibt sich

$$zdz + k^2 ydy = 0.$$

Nach der Trennung der Variablen, findet man

$$z^2 = a^2k^2 - k^2y^2, \qquad \text{mit} \quad a^2 = \frac{2c}{k^2} > 0.$$

So bekommt die DG

$$y' = \pm k\sqrt{a^2 - y^2}$$

mit Lösung der Form $y = a\sin(\pm kx + b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, die auch als

$$y = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

geschrieben werden kann.

1.3. **Systeme von Differentialgleichungen.**

Wir behandeln Systeme von Differentialgleichungen der Form

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned} \tag{1.10}$$

Bezeichnung: Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine offene Menge und $y := (y_1, \dots, y_n)$. So $(x, y) := (x, (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^n$ wird durch n Funktionen $f_1, \dots, f_n$ gegeben:

$$f : (x, y) \mapsto (f_1(x, y), \dots f_n(x, y))$$

wobei $f_i : U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$. Mit dieser Bezeichnung, können wir das Systeme (1.10) in der Form

$$y' = f(x, y)$$

schreiben.

Definition 1.25. Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offene Menge, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig und $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ sodass $(x_0, c) \in U$. Eine differenzierbare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \varphi : [x_0 + \delta, x_0 - \delta] & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \end{array}$$

für ein $\delta > 0$, heißt eine **Lösung von** $y' = f(x, y)$ **durch** (x, c) wenn für alle $x \in [x_0 + \delta, x_0 - \delta]$ gilt

(1) $(x, \varphi(x)) \in U$
(2)

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1'(x) & = & f_1(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \\ \varphi_2'(x) & = & f_2(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \\ & \vdots & \\ \varphi_n'(x) & = & f_n(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \end{array}$$

(3) $\varphi_1(x_0) = c_1, \ldots, \varphi_n(x_0) = c_n$

Definition 1.26. Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^n$ gengüt einer **Lipschitz-Bedingung** wenn es ein $L > 0$ gibt mit

$$||f(x, y) - f(x, \tilde{y})|| \leq L||y - \tilde{y}||, \qquad \forall (x, y), (x, \tilde{y}) \in U,$$

dabei ist $||y|| = \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}$ die gewöhnliche Norm in $\mathbb{R}^n$. Ferner, f genügt **lokal einer Lipschitz-Bedingung**, wenn es zu jedem Punkt von U eine Umgebung $U' \subset U$ gibt , in der f einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Ähnlich wie (1.5) beweisst man:

Hauptsatz 1.27. *(Existenz- und Eindeutigkeitsatz)*
Es sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, die Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^n$ sei stetig und genüge einer lokal L-B. Dann existiert durch jeden Punkt $(x_0, c) \in U$ genau eine Lösung $\varphi : [x_0 + \delta, x_0 - \delta] \to \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ durch (x_0, c).

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, für $i, j = 1, \ldots n$ seien $a_{ij} : I \to \mathbb{R}$ und $b_i : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, setzt man

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \qquad b(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}$$

so ist $A : I \to \mathbb{R}^{n^2}$, $x \mapsto A(x)$ eine stetige Matrix und $b : I \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto b(x)$ ein stetiger Vektor. Dann heißt $y' = A(x) \cdot y + b(x)$ ein **lineares Differentialgleichungssystem**. Ausführlich geschriben lautet

$$\begin{array}{ccccccc} y_1' & = & a_{11}(x)y_1+ & \dots & +a_{1n}(x)y_n & b_1(x) \\ y_2' & = & a_{21}(x)y_1+ & \dots & +a_{2n}(x)y_n & b_2(x) \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ y_n' & = & a_{n1}(x)y_1+ & \dots & +a_{nn}(x)y_n & b_n(x) \end{array}$$

Behauptung: $f(x,y) = A(x) \cdot y + b(x)$ gengüt einer lokal Lipschitz-Bedingung. Somit geht durch jeden Punkt eine eindeutige Lösung.
Man kann beweisen, dass in diesem Fall die Lösungen auf ganz I existieren. Wir setzen

$$L(A,b) := \{\varphi : I \to \mathbb{R}^n \ \mid \ \varphi \text{ ist differenzierbar und } \varphi' = A\varphi + b\}$$

die Menge alle Lösungen von $y'Ay + b$. So $L(A,0)$ ist die Lösungsmenge der zugehörigen homogenen Gleichungssystem $y' = Ay$.

Bemerkung 1.28.
(1) $L(A,0)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, wo das neutrales Element ist die triviale Lösung $\varphi \equiv 0$.
(2) $L(A,b)$ ist ein affiner Raum und $L(A,0)$ ist der zugehörige Vektorraum. Ist $\varphi \in L(A,b)$, so ist
$$L(A,b) = \varphi + L(A,0).$$
Begründung: Aus $\varphi \in L(A,b), \varphi \in L(A,0)$ folgt $\varphi + \psi \in L(A,b)$, und aus $\varphi, \tilde{\varphi} \in L(A,b)$, folgt $\varphi - \tilde{\varphi} \in L(A,0)$.
(3) Aus Eindeutigkeitssatz: ist $\varphi \in L(A,0)$ und besitzt eine Nullstelle, so ist $\varphi \equiv 0$.

Satz 1.29. *Elemente $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in L(A,0)$ sind genau dann lineare unabhängig wenn sie in einem Punkt $x_0 \in I$ linear unabhängig sind.*

Erinnerung: $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in L(A,0)$ sind lineare unabhängig wenn für $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$

$$c_1\varphi_1 + \dots + c_k\varphi_k = 0 \quad \Rightarrow \quad c_i = 0, \ i = 1, \dots, k.$$

Beweis. $(\Rightarrow)$ Angenommen: $\exists x_0 \in I$ und $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ nicht alle Null, so dass

$$c_1\varphi_1(x_0) + \dots + c_k\varphi_k(x_0) = 0.$$

Wir setzen $\psi := c_1\varphi_1 + \dots + c_k\varphi_k$, dann ist $\psi \in L(A,0)$ und $\psi(x_0) = 0$. Nach Bemerkung (3) ist $\psi \equiv 0$, dann sind $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ lineare abhängig als Elementen von $L(A,0)$.
$(\Leftarrow)$

□

Definition 1.30. Eine Basis $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ von $L(A,0)$ bezeichnet man als **Fundamentalsystem** zur Differentialgleichungssystem $y' = Ay$

Satz 1.31. *Ein n-Tupel $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ von Elementen aus $L(A,0)$ ist genau dann ein Fundamentalsystem, wenn ein $x_0 \in I$ existiert so dass $\varphi_1(x_0), \dots, \varphi_n(x_0)$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^n$ sind.*

Beweis. ($\Leftarrow$) Es sei $x_0 \in I$ und $(\varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_n(x_0))$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Zu zeigen ist, dass jede $\psi \in L(A, 0)$ eindeutig als Linearkombination der $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ darstellbar ist. Zu $\psi(x_0)$ gibt es genau $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\psi(x_0) = \lambda_1\varphi_1(x_0) + \ldots + \lambda_n\varphi_n(x_0)$. Nach Eindeutigkeitssatz folgt $\psi(x) = \lambda_1\varphi_1(x) + \ldots + \lambda_n\varphi_n(x),\ \forall x \in I$.
($\Rightarrow$) Einfach. $\square$

Definition 1.32. Seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L(A, 0)$ dann heißt

$$W(x) := \det(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix}$$

die Wronski -Determinante von $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Aus Satz 1.31 folgt

Satz 1.33. *Wenn $W(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in I$ dann $W(x) \equiv 0$. Ferner, $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ ist genau dann ein Fundamentalsystem zu $y' = A(x)y$ wenn W nicht identisch Null ist.*

Satz 1.34. *Ist W die Wronski-Determiante eines n-Tupels $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ aus $L(A, 0)$ so gilt:*

$$W' = (Sp A(x))W$$

wobei $Sp(A)$ bezeichnet die Spur von A.

Somit: ist $S : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von Sp, so ist

$$W = ce^S.$$

Nun behandeln wir das inhomogene System $y' = A(x)y + b(x)$. Ist $\psi : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung davon, dann $L(A, b) = \psi + L(A, 0)$. Ist $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ ein Fundamentalsystem zu $y' = A(x)y$, ist

$$\{\psi + c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n \mid c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}\}$$

die Lösungsmenge des inhomogenen Systems.

1.4. **Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten.** Wir betrachten eine konstante Matrix $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Lemma 1.35. *Ist λ ein Eigenwert von $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ und $v \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor zu λ so ist*

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto e^{\lambda x}v$$

eine Lösung von $y' = Ay$.

Beweis. Sei λ ein Eigenwert von A. Daraus folgt $(e^{\lambda x}v)' = e^{\lambda x}\lambda v = e^{\lambda x}Av = A(e^{\lambda x}v)$. $\square$

Satz 1.36. *Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$, die aus Eigenvektoren von A besteht und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die zugehörige Eigenwerte, so ist*

$$(e^{\lambda_1 x}v_1, \ldots, e^{\lambda_n x}v_n)$$

ein Fundamentalsystem zu $y' = Ay$.

Beweis. Für $j = 1, \dots, n$ setzt man $\varphi_j : x \mapsto e^{\lambda_j x} v_j$. Nach dem vorherigen Lemma, sind φ_j Lösungen von $y' = Ay$. Ist $\varphi_j(0) = v_j$, dann sind $\varphi_1(0), \dots, \varphi_n(0)$ linear un abhängig. Nach Satz 1.31 sind $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ linear unabhänging und damit ein Fundamentalsystem. □

Beispiel 1.37. Gegeben sind zwei Bakterienkulturen, die sich gegenseitig bekämpfen. Man bezeichnet mit $x(t)$ bzw. $y(t)$, die Anzahl der Bakterien von Typ 1 bzw. von Typ 2, zu Zeit t und mit a^2 und b^2 die ,,Kämpf-Kraft" Konstanten wobei $a, b > 0$. Man hat ein Differentialgleichungssytem

$$\begin{aligned} x' &= \quad\quad -a^2 y \\ y' &= -b^2 x \end{aligned}$$

Die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a^2 \\ -b^2 & 0 \end{pmatrix}$$

sind $\lambda = \pm ab$. Der Eigenvektor zu $\lambda = ab$ ist $\binom{a}{-b}$ und zu $\lambda = -ab$ ist $\binom{a}{b}$. Damit ein Fundamentalsystem ist

$$\left(\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} e^{abt}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{-abt} \right).$$

Nun seien Anfangswerte $x(0) = A$ und $y(0) = B$. Aus der Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x(t) &= aC_0 e^{abt} + aC_1 e^{-abt} \\ y(t) &= -bC_0 e^{abt} + bC_1 e^{-abt} \end{aligned}$$

ergibt sich zu $t = 0$

$$\begin{aligned} A &= aC_0 + aC_1 \\ B &= -bC_0 + bC_1 \end{aligned}$$

Man rechnet die Konstanten C_0, C_1 aus:

$$C_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{a} + \frac{B}{b}\right) > 0 \quad C_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{a} - \frac{B}{b}\right).$$

Wir unterscheiden zwei Fälle $C_0 > 0$ und $C_0 = 0$ (der Fall $C_0 < 0$ folgt nach Vertausch der Funktionen x und y).

Fall $C_0 > 0$. Man hat $x(t) > 0$ für alle $t \geq 0$ und $y(t)$ besitzt eine Nullstelle $t_0 > 0$ mit

$$t_0 = \frac{1}{2ab} \ln\left(\frac{C_1}{C_0}\right).$$

In diesem Fall die Population von Type 2 ist zu t_0 ausgestorben. Da $x'(t_0) = 0$ gilt, $x(t)$ besitzt in t_0 ein Minimum.

Fall $C_0 = 0$. In diesem Fall $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$. Dann ist

$$x(t) = Ae^{-abt} \qquad y(t) = Be^{-abt}.$$

Die beiden Populationen sterben nie aus, gehen monotonfallend gegen 0. Der Quotient $\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{A}{B}$ ist konstant.

Beispiel 1.38. (Variation der Konstanten).
Zu lösen ist $y' = Ay + b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Zunächst findet man ein Fundamentalsystems des homogenen Gleichung $y' = Ay$. Die Eigenwerte von A sind $\lambda = -2$ und $\lambda = -1$ mit Eigenvektor $v_1 = \binom{-2}{1}$ zu Eigenwert -2, bzw. $v_2 = \binom{1}{-1}$ zu Eigenwert -1. Somit ist

$$\phi = (\varphi_1, \varphi_2) = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2x}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} \right)$$

ein Fundamentalsystem. Dann gilt $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 = \phi \cdot c$, mit $c = \binom{c_1}{c_2} \in \mathbb{R}^2$ alle Lösungen des homognes System $y' = Ay$.
Nun findet man eine „spezielle" Lösung ψ durch Variation der Konstanten. Ansatz: $\psi = \phi \cdot c$, mit $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Abbildung. Dann

$$\psi' = \phi' c + \phi c' = A\phi c + \phi c' = A\psi + \phi c' = A\psi + b$$

wo die letzte Gleichung folgt aus der Annahme, dass ψ eine Lösung ist. Daher folgt $b = \phi c'$, so $c' = \phi^{-1}(b)$ und man kann c ausrechnen. In dem Beispiel

$$\phi = \begin{pmatrix} -2e^{-2x} & e^{-x} \\ e^{-2x} & -e^{-x} \end{pmatrix} \qquad \text{dann} \qquad \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{e^{-3x}} \begin{pmatrix} -e^{-x} & -e^{-x} \\ -e^{-2x} & -2e^{-2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 3e^{x} \end{pmatrix}$$

Somit ist eine spezielle Lösung

$$\psi = \phi c = \begin{pmatrix} -2e^{-2x} & e^{-x} \\ e^{-2x} & -e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{2x} \\ 3e^{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Die Lösungsmenge ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} + c_1 e^{-2x} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Andere Perspektive um $y' = Ay$ zu lösen.

Definition 1.39. Für alle Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ die Reihe

$$e^A := \exp(A) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots .$$

Die Abbildung $\exp : A \mapsto e^A$ heißt Exponentialfunktion für Matrizen. Sie ist unendlich oft differenzierbar.

Beispiel 1.40.

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \forall a \in \mathbb{R} \quad \exp\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Einige Eigenschaften von exp:

- $e^0 = I_n$ ($n \times n$ Einheitsmatrix), e^A ist invertierbar.
- $e^{A+B} = e^A e^B$, für alle $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$ mit $AB = BA$.
- $\det e^A = e^{\mathrm{Sp} A}$

- $e^A = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{A}{n}\right)^n$.

Sei $D \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine Diagonalmatrix:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

Dann das DGS $y' = Dy$ hat als allgemeine Lösung

$$y = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} c_1 \\ \vdots \\ e^{\lambda_n x} c_n \end{pmatrix} = e^{Dx} c$$

wobei $c = (c_1, \dots, c_n)^t$. Nun nehmen wir an, dass $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ diagonalisierbar ist, d.h. existiert eine invertierbare Matrix P so dass $P^{-1}AP = D$ ist eine Diagonalmatrix wie in (1.11). Es gilt

$$e^{Dx} = P^{-1} e^{Ax} P.$$

Lemma 1.41. *Ist $\psi = e^{Dx}c$ eine Lösung von $y' = Dy$ (mit $c \in \mathbb{R}^n$) dann ist $\varphi = P\psi$ eine Lösung von $y' = Ay$.*

Beweis. Es gilt

$$\varphi' = P\psi' = P(D\psi) = A(P\psi) = A\varphi$$

und somit ist φ eine Lösung von $y' = Ay$, mit $\varphi(0) = P\psi(0) = Pc$. □

Bemerkung 1.42. Ist $\varphi = Pe^{Dx}\tilde{c}_0 = e^{Ax}P\tilde{c}_0 = e^{Ax}c_0$ eine Lösung des Anfangswertproblem $y' = Ay, \quad y(0) = c_0$, dann folt

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}(e^{Ax}c_0) = Ae^{Ax}c_0$$

und somit $\frac{d}{dx}(e^{Ax}) = Ae^{Ax}$.

Insbesondere, die Spalten der Matrix e^{Ax} bilden ein Fundamentalsystem zur $y' = Ay$. Sei $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ mit $\lambda_j \neq \lambda_k$ für $j \neq k$, $1 \le m \le n$ und

$$\begin{aligned} &\lambda_j \in \mathbb{R} \quad \text{für} \quad j = 1, \dots, p; \\ &\operatorname{Im} \lambda_j > 0 \quad \text{für} \quad j = p+1, \dots, p+q \end{aligned}$$

mit $p + 2q = m$. Ferner sei $\gamma_j := \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_j I)$ die geometrische Vielfachheit des EW λ_j und α_j seine algebraische Vielfachheit. So $1 \le \gamma_j \le \alpha_j$ und $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = n$. Sei

$$\{v_{jk}^l \ : \ j = 1, \dots, m; k = 1, \dots, \gamma_j; l = 1, \dots, l_{jk}\}$$

eine Jordan-Basis zu A in $\mathbb{C}^n$, also $l_{j1} + \cdots l_{j\gamma_j} = \alpha_j$ und es gilt

$$\begin{gathered} Av_{jk}^1 = \lambda_j v_{jk}^1 \\ Av_{jk}^l = \lambda_j v_{jk}^l + v_{jk}^{l-1}, \qquad \text{für} \quad i = 2, 3, \dots, l_{jk}, \qquad \text{falls } l_{jk} > 1. \end{gathered}$$

Die EV und verallgemeinerten EV zu reellen EW seien reell gewählt. Dann bilden die folgenden n Funktionen ein Fundamentalsystem zu $y' = Ay$:

$$e^{\lambda_j x}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{x^r}{r!}v_{jk}^{l-r}, \quad j=1,\dots,p;\ k=1,\dots,\gamma_j;\ l=1,\dots,l_{jk};$$

$$\mathrm{Re}\left(e^{\lambda_j x}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{x^r}{r!}v_{jk}^{l-r}\right), \quad \mathrm{Im}\left(e^{\lambda_j x}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{x^r}{r!}v_{jk}^{l-r}\right), \quad j=p+1,\dots,p+q;\ k=1,\dots,\gamma_j;\ l=1,\dots,l_{jk}.$$

Dabei gilt

$$\mathrm{Re}\left(e^{\lambda_j x}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{x^r}{r!}v_{jk}^{l-r}\right) = e^{\mathrm{Re}\lambda_j x}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{x^r}{r!}\left(\cos(\mathrm{Im}\,\lambda_j x)\mathrm{Re}\ v_{jk}^{l-r} - \sin(\mathrm{Im}\,\lambda_j x)\,\mathrm{Im}\,v_{jk}^{l-r}\right),$$

$$\mathrm{Im}\left(e^{\lambda_j x}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{x^r}{r!}v_{jk}^{l-r}\right) = e^{\mathrm{Re}\lambda_j x}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{x^r}{r!}\left(\cos(\mathrm{Im}\,\lambda_j x)\,\mathrm{Im}\,v_{jk}^{l-r} + \sin(\mathrm{Im}\,\lambda_j x)\mathrm{Re}\ v_{jk}^{l-r}\right).$$

1.5. **Koordinatentransformationen.**

Voraussetzungen: Seien $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $X \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : J \times X \to \mathbb{R}^n$ stetig und so dass $\partial_x f$ existiert und stetig ist. Sei $Y \subset \mathbb{R}^n$ offene Menge und $\Phi : J \times Y \to X$ stetig und differenzierbar mit

$$\det \partial_y \Phi(t,y) \neq 0 \qquad \forall (t,y) \in J \times Y.$$

Sei $I \subset J$ Intervall und $y : I \to Y$ eine Lösung von

$$y'(t) = \partial_y \Phi(t,y(t))^{-1}(f(t,\Phi(t,y(t))) - \partial_t \Phi(t,y(t))), \tag{1.12}$$

die **transformiertes System zu** $x' = f(t,x)$ **unter die Koordinatentransfomation** Φ. Dann ist $x : I \to \mathbb{R}$, $x'(t) := \Phi(t,y(t))$ eine Lösung von $x' = f(t,x(t))$.

Beispiel 1.43. Seien $J = X = Y = (0,\infty)$. Wir betrachten eine *homogene* Funktion $f(t,x)$, d.h. eine Funktion mit der Eigenschaft

$$f(\lambda t, \lambda x) = f(t,x) \quad \forall \lambda, t, x \in (0,\infty)$$

Die Koordinatentransformation $\Phi : J \times Y \to X$, $\Phi(t,y) = ty$ transformiert das Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(t,x(t)), \quad x(\tau) = \xi \tag{1.13}$$

in das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \frac{1}{t}(f(1,y(t)) - y(t)), \quad y(\tau) = \frac{\xi}{\tau} \tag{1.14}$$

und die Differentialgleichung in der neue Variable läßt sich durch Trennung der Variablen auslösen. Wenn $y : I \to (0,\infty)$ eine Lösung von (1.14) ist, dann ist $x'(t) := ty(t)$ eine Lösung von (1.13).

Zum Beispiel, man betrachtet das Anfangswertproblem

$$x'(t) = \frac{x}{t} + \frac{t^3}{x^3} = f(x,t), \qquad x(1) = 1.$$

Offensichtlich, gilt $f(\lambda t, \lambda x) = f(t,x),\ \forall \lambda, t, x > 0$. Wir setzen $\Phi(t,y) = ty$ und man überprüft dass $\partial_y \Phi(t,y) = t \neq 0$. Unter den Koordinatentransformation Φ ergibt sich das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \frac{1}{ty^3}, \qquad y(1) = 1,$$

das die maximale Lösung

$$y(t) = (4\ln t + 1)^{1/4}, \quad t > e^{-1/4}$$

hat (dabei muss $y > 0$). Dann die maximale Lösung für die originale Differentialgleichung ist

$$x(t) = t(4\ln t + 1)^{1/4}, \quad t > e^{-1/4}.$$

Beispiel 1.44. Rotationsinvariante Systeme. Seien $I = \mathbb{R}, X = \mathbb{R}^2$ und $Y = (0,\infty) \times \mathbb{R}$. Wir betrachten $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig, differenzierbar und der Vektorfeld f sei Rotationsinvariant, dass heißt

$$f(S_\theta x) = S_\theta f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \theta \in \mathbb{R} \text{ wobei } S_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Die Abbildung $S_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist eine Drehung mit Winkel θ durch der Ursprung. In diesem Fall, existieren $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen, die in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig differenzierbar sind, mit

$$f(x) = g(x_1^2 + x_2^2)x + h(x_1^2 + x_2^2)S_{\pi/2}x, \quad \forall y \in \mathbb{R}^2$$

wobei $x = \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2$. Das Anfangswert problem

$$x'(t) = f(x,t), \qquad x_0(0) = \begin{pmatrix} r_0 \cos\theta_0 \\ r_0 \sin\theta_0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_0 \neq 0$$

wird dann durch Polarkoordinaten

$$\Phi(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

in zwei entkoppelte Anfangswertproblem transformiert:

$$r'(t) = g(r(t)^2)r(t), \qquad r(0) = r_0 \text{ Amplitudenproblem}$$

$$\theta'(t) = h(r(t)^2), \qquad \theta(0) = \theta_0 \text{ Phasenproblem}$$

Beispiel 1.45. Als Beispiel von ein rotationsinvariante System betracht man das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) - x_2(t) - x_1(t)\sqrt{x_1(t)^2 + x_2(t)^2} \quad x_1(0) = 1/2 \\ x_2'(t) &= x_1(t) + x_2(t) - x_2(t)\sqrt{x_1(t)^2 + x_2(t)^2} \quad x_2(0) = 0 \end{aligned}$$

das ein rotationsinvariante System ist mit $g(r(t)^2) = 1 - r$ und $h(r(t)^2) = 1$. Das Amplitudenprblem ist

$$r'(t) = r - r^2 \qquad r(0) = 1/2,$$

mit maximale Lösung $r(t) = \frac{e^t}{1+e^t}, \quad t \in \mathbb{R}$. Das Phasenproblem ergibt $\theta'(t) = h(r^2) = 1$, $\theta(0) = 0$, so die maximale Lšung ist $\theta(t) = 1$. Dann ist die maximale Lšung des Anfangssystemes

$$x_1(t) = \frac{e^t}{1+e^t}\cos t, \qquad x_2(t) = \frac{e^t}{1+e^t}\sin t \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1.6. **Differentialgleichungen höhere Ordnung.**

Wir behandeln nun Differentialgleichungen n-ter Ordnung, $n \geq 2$ von der Form

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \tag{1.15}$$

Sie lassen sich auf ein System von n Differentialgleichungen 1. Ordnung zurükführen:

$$y_1 := y, \quad y_2 := y', \dots, \quad y_n := y^{(n-1)},$$

so ist (1.15) äquivalent zu

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{aligned}$$

Definition 1.46. Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig und $(x_0, c_0, c_1, \dots c_{n-1}) \in U$. Eine n-mal differenzierbar Funktion $\varphi : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}$ heißt eine Lösung von (1.15) durch $(x_0, c_0, c_1, \dots c_{n-1})$ wenn $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ gilt:

(1) $(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)) \in U$
(2) $\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x))$
(3) $\varphi(x_0) = c_0,\ \varphi'(x_0) = c_1, \dots, \varphi^{(n-1)} = c_{n-1}$.

Hauptsatz 1.47. *(Existenz- und Eindeutigkeitssatz) Sei $f : U \to \mathbb{R}$ stetig un lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt dann existiert durch jeden Punkt $(x_0, c_0, \dots, c_{n-1}) \in U$ genau eine Lösung von (1.15).*

Lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b$ die auf einem Intervall I stetig sind, schreibt man als

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = b(x). \tag{1.16}$$

Die Lösungen sind wieder auf ganz I definiert.

Satz 1.48. *Sind $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b : I \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert zu $x_0 \in I$ und $(c_0, \dots, c_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ von (1.16), mit $\varphi(x_0) = c_0, \varphi'(x_0) = c_1, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = c_{n-1}$. Ferner, die Lösungsmenge der homogene Gleichung*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0$$

ist ein n-dimensionale Vektorraum.

Definition 1.49. Sind $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ Lösungen der homogene Gleichungssystem so heißt

$$W(x) := \begin{vmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \cdots & \varphi_n' \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

die **Wronski-Determinante** von $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Wenn W eine Nullstelle besitzt dann ist $W \equiv 0$. Die Lösungen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sind lineare unabhängig genau dann, wenn $W(x) \neq 0$.

1.7. **Lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.**
Wenn die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ konstanten sind, die Lösungen von (1.16) sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Wir machen den Ansatz: $y = e^{\lambda x}$, so die k-te Ableitung ist $\lambda^k e^{\lambda x}$. Somit erhalten wir

$$(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots a_1\lambda + a_0)e^{\lambda x} = 0.$$

So ist λ eine Nullstelle des Polynoms $p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots a_1 t + a_0$ (das **charakteristisches Polynom** gennant wird), dann ist $e^{\lambda x}$ eine Lösung der Differentialgleichung.

Wir setzen $D^n := \frac{d^n}{dx^n}$. Für $p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots a_1 t + a_0$ setzten wir

$$L := p(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots a_1 D + a_0.$$

$L(D)$ heißt ein **linearer Differentialoperator**. Dann die Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, \qquad a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$$

kann man in der Form $Ly = 0$ mit $L = p(D)$ schreiben. Zur $p'(t) = \sum_{k=1}^{n} k a_k t^{k-1}$ gehört den Differentialoperator $L_1 := p'(D)$, also $L_1(y) = ny^{(n-1)} + (n-1)a_{n-1}y^{(n-2)} + \cdots + a_1 y$.

Lemma 1.50. *Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbar Funktion, so gilt:*

$$L_1(f) = L(xf) - xL(f).$$

Beweis. Es ist $(xf)' = f + xf'$, $(xf)'' = 2f' + xf''$. Allgemein gilt

$$(xf)^{(k)} = kf^{(k-1)} + xf^{(k)}.$$

Darauf folgt

$$L(xf) = \sum_{k=0}^{n} a_k (xf)^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} a_k (kf^{(k-1)} + xf^{(k)}) = L_1(f) + xL(f).$$

□

Aus dem Lemma ergibt:

Satz 1.51. *Es sei λ einer r-Fache Nullstelle des Polynoms*

$$p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots a_1 t + a_0$$

dann sind

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{r-1}e^{\lambda x}$$

Lösungen von $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$.

Beweis. Wir setzen $L = p(D)$, $L_1 = p'(D)$ und sei $f(x) = e^{\lambda x}$. Dann ist

$$L(e^{\lambda x}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k e^{\lambda x} = p(\lambda)e^{\lambda x}.$$

Wenn λ eine Nullstelle von $p(t)$ ist, dann $L(e^{\lambda x}) = 0$. Ist λ eine zweifache Nullstelle von $p(t)$, so $p'(\lambda) = 0$ und dann $L_1(e^{\lambda x}) = p'(\lambda)e^{\lambda x} = 0$. Daher

$$L(xe^{\lambda x}) = L_1(e^{\lambda x}) + xL(e^{\lambda x}) = 0.$$

Es folgt, dass $xe^{\lambda x}$ eine Lösung der Differentialgleichung $Ly = 0$ ist. Bei dreifachen Nullstellen betracht man $p'(D)$ anstatt von $p(D)$. Auf diese Weise erhält man die Behauptung. □

Satz 1.52. *Sei* $p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots a_1 t + a_0$, $L = p(D)$. *Es gelte*
$$p(t) = (t-\lambda_1)^{r_1} \cdots (t-\lambda_m)^{r_m},$$
dann bilden
$$\left\{ \begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_1 x}, & \cdots & x^{r_1-1}e^{\lambda_1 x} \\ & \vdots & & \vdots \\ e^{\lambda_m x}, & xe^{\lambda_m x}, & \cdots & x^{r_m-1}e^{\lambda_m x} \end{array} \right\}$$
ein Fundamentalsystem zu $Ly = 0$.

Beispiel 1.53. Bewegung des eindimensionalen harmonischen Oszillators. Die Schwingungsgleichung
$$x''(t) + 2\eta x'(t) + w_0 x(t) = 0$$
beschreibt die Bewegung eines Körpers der einer elastischen Feder befestigt ist. Dabei $x(t)$ ist der Entfernung von der Ruhelage zur Zeit t, $\eta > 0$ ist de Reibungskonstante und $w_0^2 > 0$ ist die Konstante für Rücktreibende Kraft. Die Nullstelle des charakteristisches Polynom sind $\lambda_{1,2} = -\eta \pm \sqrt{\eta^2 - w_0^2}$. Man unterscheidt die folgende Fälle.

(a) Kriechfall $\eta^2 > w_0^2$. In diesem Fall, beide Nullstelle sind reell und negativ und die allgemeine Lösung ist
$$x(t) = e^{-\eta t}(c_1 e^{wt} + c_2 e^{wt}), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$
mit $w := \sqrt{\eta^2 - w_0^2} > 0$. Die Auslenkung nimmt exponentiell mit der Zeit ab.

(b) Aperiodischer Grenzfall $\eta^2 = w_0^2$. Die allgemeine Lösung lautet
$$x(t) = e^{-\eta t}(c_1 + c_2 t), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
Qualitativ hat ein ähnlicher Verlauf wie in (a). Für die Anfangswerte $x(0) = 0, x'(0) = v_0 > 0$, die Lösung ist $x(t) = v_0 t e^{-\eta t}$. Zur Zeit $t_1 = \frac{1}{\eta}$ erreicht die maximale Auslenkung (man bemerkt $x'(\frac{1}{\eta}) = 0$)

(c) Schwingfall $\eta^2 < w_0^2$ (kleine Reibung). Man setzt $w : \sqrt{w_0^2 - \eta^2} \leq w_0$. Die komplexwertige Lösungen sind
$$e^{-\eta t}(c_1 e^{iwt} + c_2 e^{-iwt}), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$
Dann Real- und Imaginärteil davon sind Lösungen. Wegen $e^{iwt} = \cos wt + i \sin wt$ dann sind die reelle Lösungen
$$e^{-\eta t}(c_1 \cos wt + c_2 \sin wt) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
Angenommen: $(c_1, c_2) \neq (0,0)$. Setzt man $r := \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$. Wegen $\sin(t+\theta) = \cos t \sin\theta + \sin t \cos\theta$, kann θ so wählen, dass gilt
$$c_1 \cos wt + c_2 \sin wt = r \sin w(t+\theta).$$
Dann $c_1 = r \sin w\theta$ und $c_2 = r\cos w\theta$. Schließlich, alle reelle Lösungen sind
$$\{re^{-\eta t}\sin(wt+\theta) \ \mid \ r \geq 0, \theta \in \mathbb{R}\}.$$
Der Oszillation schwingt mit der Frequenz w, wobei die Amplitude exponentiell mit der Zeit abnimmt. Die Wellelänge ist $\frac{2\pi}{w}$.

Zussammenfassung.

Lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit Konstanten Koeffizienten:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, \qquad a_0, a_1, \cdots a_{n-1} \in \mathbb{R}. \tag{1.17}$$

Sei $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ mit $\lambda_j \neq \lambda_k, j \neq k$ $(1 \leq m \leq n)$ die Menge aller Nullstelle des charakteristisches Polynom $p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 t = 0$ und

$$\begin{array}{ll} \lambda_j \in \mathbb{R}, & j = 1, \dots, p \\ \lambda_j = \mu_j + i\nu_j, & \mu_j, \nu_j \in \mathbb{R}, \nu > 0, j = p+1, \dots p+q. \end{array}$$

Also $m = p + 2q$. Ferner sei

$$r_j := \min\{k \in \mathbb{N} \mid \frac{d^k}{dt^k} p(t)_{|t=\lambda_j} \neq 0\} \geq 1$$

die Vielfachheit von λ_j. Ein Fundamentalsystem von (1.17)

$$\begin{array}{ccc} x^\ell e^{\lambda_j x}, & j = 1, \dots, p. & \ell = 0, 1, \dots, r_{j-1}. \\ x^\ell e^{\mu_j x} \cos(\nu_j x), x^\ell e^{\mu_j x} \sin(\nu_j x), & j = p+1, \dots p+q. & \ell = 0, 1, \dots, r_{j-1}. \end{array}$$

1.8. **Variation der Konstanten Formel.** .

Sei $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ein Fundamentalsystem von

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

dann ist

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} \varphi_j(x) \int_{x_0}^{x} \frac{W(\varphi_1, \dots, \varphi_{j-1}, \varphi_{j+1}, \dots, \varphi_n)(s)}{W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(s)} b(s) ds \tag{1.18}$$

eine Lösung der inhomogenen DG

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x).$$

Dabei sind $W(\varphi_1, \dots, \varphi_{j-1}, \varphi_{j+1}, \dots, \varphi_n)$ bzw. $W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ die Wronski-Determinanten der $n-1$ Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_{j-1}, \varphi_{j+1}, \dots, \varphi_n$ bzw. der n Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Für $n = 2$ der Formel (1.18) ergibt

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\varphi_1(s)\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\varphi_2(s)}{\varphi_1(s)\varphi_2'(s) - \varphi_1'(s)\varphi_2(s)} b(s) ds$$

Beispiel 1.54. Man betrachtet die Differentialgleichung $y'' - y' - 6y = e^{-x}$. Das charakteristisches Polynom ist $t^2 - t - 6 = (t-3)(t+2)$, so bilden $\varphi_1 = e^{3x}, \varphi_2 = e^{-2x}$ ein Fundamentalsystem, dessen Wronski-Determinante is $W(x) = -5e^x$. Nach der Formel (1.18), ist

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{e^{3s}e^{-2x} - e^{3x}e^{-2s}}{-5e^s} e^{-s}\, ds = -\frac{1}{4}e^{-x}$$

eine Lösung der Differentialgleichung. Dann die allgemeine Lösung ist

$$c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 1.55. Man findet die allgemeine Lösung von $y'' - 2y' + y = 2x$. Das charakteristisches Polynom ist $t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$, so bilden $\varphi_1 = e^x, \varphi_2 = xe^x$ ein Fundamentalsystem, dessen Wronski-Determinante is $W(x) = e^{2x}$. Nach der Formel (1.18), ist

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{e^s xe^x - e^x se^s}{e^{2s}} 2s\ ds = 2x + 4$$

eine Lösung der Differentialgleichung. Dann die allgemeine Lösung ist

$$(c_1 + c_2 x)e^x + 2x + 4, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 1.56. Greift am eindimensionalen harmonischen Oszillation einen äußere harmonische Kraft an, so lautet die Bewegungsgleichung

$$x''(t) + w_0^2 x(t) = a \cos wt.$$

Ein Fundamentalsystem der homogene Differentialgleichung ist

$$x_1(t) = \cos w_0 t, \qquad x_2(t) = \sin w_0 t.$$

Die Formel (1.18) liefert die spezielle Lösung

$$x(t) = \frac{1}{w_0} \int_{t_0}^{t} (\cos w_0 s \sin w_0 t - \sin w_0 s \cos w_0 t) a \cos(ws) ds.$$

Aber man kann auch den Ansatz $x_{spez}(t) = c \cos wt$ machen und die Konstante c auslösen:

$$c(w_0^2 - w^2) = a \;\Rightarrow\; c = \frac{a}{w_0^2 - w^2}.$$

So die allgemeine Lösung ist

$$x(t) = c_1 \cos w_0 t + c_2 \sin w_0 t + \frac{a \cos wt}{w_0^2 - w^2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Schwingt mit der Frequenz der äußern Kraft, ihre Amplitude wird größer, je näher diese Frequenz der Eigenfrequenz des Oszillators kommt. Wenn $w_0 \to w$, $x(t) \to \infty$ und man spricht von einer Resonanzkatastrophe.

2. Asymptotisches Verhalten und Stabilität

Wir untersuchen den Langzeitverhalten von LÌosungen und ihre Stabilität (stetige AbhÌangigkeit von Anfangswert) auf unbeschränkren Intervallen $[x_0, \infty)$.

Definition 2.1. Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offene Menge, $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar auf D und $y : [x_0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichunssytem (DGS) $y' = f(x, y)$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 := y(x_0)$. Die Lösung heißt:

- **Stabil** (auf $[x_0, \infty)$) wenn gilt

  $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ so dass } \forall z_0 \in \mathbb{R}^n \text{ mit } ||y_0 - z_0|| < \delta$$

  das Anfangswertproblem (AWP)

  $$\begin{cases} z'(x) = f(x, z) \\ z(x_0) = z_0 \end{cases}$$

  eine Lösung z auf $[x_0, \infty)$ besitzt und $||y(x) - z(x)|| < \varepsilon$, $\forall x \geq x_0$.

- **Attraktiv** (auf $[x_0, \infty)$) wenn gilt
$$\exists \delta > 0 \text{ so dass } \forall z_0 \in \mathbb{R}^n \text{ mit } ||y_0 - z_0|| < \delta$$
das AWP
$$\begin{cases} z'(x) = f(x,z) \\ z(x_0) = z_0 \end{cases}$$
eine Lösung z auf $[x_0, \infty)$ besitzt und $\lim_{x\to\infty} ||y(x) - z(x)|| = 0$.
- **Asymptotisch stabil** falls y stabil und attraktiv ist.
- **Exponentiell stabil** falls $\delta, L, \omega > 0$ existieren, so dass $\forall z_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $||y_0 - z_0|| < \delta$ das AWP
$$\begin{cases} z'(x) = f(x,z) \\ z(x_0) = z_0 \end{cases}$$
eine Lösung z auf $[x_0, \infty)$ besitzt und
$$||y(x) - z(x)|| \leq L||y_0 - z_0||e^{-\omega(x-x_0)}, \quad \forall x \geq x_0.$$

Bemerkung 2.2. (1) Exponentiell stabil $\Rightarrow$ asymptotisch stabil $\Rightarrow$ stabil.
(2) Für $n = 1$ gilt: attraktivität $\Rightarrow$ Stabilität aber nicht für $n > 1$.
(3) Bei der Stabilität $\exists x_0$ ab dem *alle* Lösungen einem Abstand $< \varepsilon$ zur der Lösung y haben wenn $|x_0 - z - 0| < \delta$. Anderseits, bei der Attraktivität findet man für jede Lösung ein x_0 ab dem dies gilt, aber es kann für jede Lösung ein anderes x_0 sein.

Beispiel 2.3. Man betrachte das lineares AWP
$$\begin{cases} y'(x) = \alpha y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$
für $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Betrachte das AWP zu anderem Anfangswert
$$\begin{cases} \tilde{y}'(x) = \alpha \tilde{y} \\ \tilde{y}(x_0) = \tilde{y}_0 \end{cases}$$
Mit der Substitution $w := y - \tilde{y}$ erhält man $w'(x) = \alpha w$, $w(x_0) = y_0 - \tilde{y}_0$. Dann ist $w(x) = e^{\alpha x}(y_0 - \tilde{y}_0)$ eine Lösung des AWPs. Daraus folgt
$$|y(x) - \tilde{y}(x)| = |w(x)| = |y_0 - \tilde{y}_0|e^{\alpha x}.$$
Dann gilt:

- $\alpha < 0$: y ist exponentiell stabil
- $\alpha = 0$: y ist stabil
- $\alpha > 0$: y ist instabil

Bemerkung 2.4. Aufgrund der Linearität der DGS die (exponentiell- / asymptotisch- / -) Stabilität einer Lösung y des AWPs für $(y_0) \in \mathbb{R}^n$ äquivalent zur (exponentiell- / asymptotisch- / -) Stabilität der Konstante Nulllösung ist.

Beispiel 2.5. Betrachte
$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$
Die Eigenwerte sind $\lambda = \pm i$. Der Eigenvektor zu i ist $\binom{-i}{1}$ und zu $-i$, $v_2 = \bar{v}_1 = \binom{i}{1}$. Das komplexes Fundamentalsystem ist $e^{ix}v_1, e^{-ix}v_2$ und als reelles Fundamentalsystem erhalten wir $\{\binom{\sin x}{\cos x}, \binom{-\cos x}{\sin x}\}$ (die Real- und Imaginäreteil der komplexe Lösung $e^{ix}v_1$). Somit ergibt als allgemeine Lösung des AWPs
$$y(x) = y_{01}\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + y_{02}\begin{pmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$$
Ferner, ist
$$\left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\|^2 = (-y_{01}\sin x + y_{02}\cos x)^2 + (y_{01}\cos x + y_{02}\sin x)^2 = y_{01}^2 + y_{02}^2 = \left\| \begin{pmatrix} y_{01} \\ y_{02} \end{pmatrix} \right\|^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Folglich: Die Nulllösung (und damit jede beliebige Lösung des AWPs) ist stabil aber nicht asymptotisch stabil.

2.1. **Autonome DGS.**

Wir behandeln **autonome DGS**, die auf der Gestalt $y'(x) = f(y(x))$ sind, mit $f : D \to \mathbb{R}^n$ dabei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge ist.

Bemerkung 2.6. Die autonome DGS sind translatiosnsinvariant: Sei y eien Lösung von $y' = f(y)$ auf $[x_0, +\infty)$ dann ist $z(x) = y(x - x_0)$ eine Lösung von $y' = f(y)$ auf $[0, \infty)$ und es gilt: y ist (exponentiell- / asymptotisch- / -) stabil $\Leftrightarrow$ z ist (exponentiell- / asymptotisch- / -) stabil. Daher können wir annehmen dass $x_0 = 0$.

Definition 2.7. Eine Lösung y von $y'(x) = f(y)$ heißt **stationäre Lösung**, falls y eine konstante Funktion ist, die die DGS $y'(x) = f(y)$ löst, d.h. $y = z \ \forall x \in \mathbb{R}$ und z ist eine Nullstelle von f. Jede solche Nullstelle heißt **kritischer Punkt** (oder Ruhelage, oder Gleichgewichtspunkt).

Nun beschäftigen uns mit dem speziellen Fall der lineare autonome DGS
$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}). \tag{2.1}$$

Satz 2.8. *Alle Lösungen von (2.1) sind*
(i) stabil : wenn alle EW λ von A gilt $Re(\lambda) \le 0$ und außerdem die EW halbeinfach sind (d.h. die geometrische Vielfachheit = algebraische Vielfachheit).
(ii) asymptotisch stabile: falls für alle EW λ von A gilt $Re(\lambda) < 0$. In diesem Fall gilt:
$$\forall \omega \quad mit \quad s := max_{\lambda EW} Re(\lambda) < -\omega < 0$$
so dass
$$\|e^{Ax}y_0\| \le M_\omega \|y_0\| e^{-\omega x} \quad \forall x \ge 0 \quad y_0 \in \mathbb{R}^n,$$

mit $M_\omega \geq 1$ geeignet, d.h. alle Lösungen sind sogar exponentiell stabil.
Falls zusätzlich alle EW halbeinfach sind dann gilt sogar

$$\|e^{Ax}y_0\| \leq M\|y_0\|e^{sx} \tag{2.2}$$

für ein $M \geq 1$ und mit $s = max_{\lambda EW} Re(\lambda)$
(iii) instabil falls mindestens ein EW λ von A mit $Re(\lambda) > 0$ existiert oder falls λ mit $Re(\lambda) = 0$ existiert der nicht halbeinfach ist.

Beweis. Erinnerung: ein Fundamentalsystems von $y' = Ay$ besteht aus Lösungen aus der Form

$$e^{\lambda x}\vec{p}(x), e^{\alpha x}\cos(\beta x)\vec{r}(x), \quad e^{\alpha x}\sin(\beta x)\vec{q}(x)$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha + i\beta\mathbb{C}$ sind EW, $p, q, r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ sind Polynome und $\deg p > 0$ (resp. $\deg q,\ \deg p > 0$) $\Leftrightarrow \lambda$ (resp. $\alpha + i\beta$) nicht halbeinfach ist.

(i) $\Leftrightarrow$ alle Lösungen in einem Fundamentalsystem von $y' = Ay$ sind beschränkt auf $[0, \infty)$
$\Leftrightarrow$ alle spalten von e^{Ax} sind beschränkt auf $[0, \infty)$
$\Leftrightarrow \exists M \geq 1$ so dass $||e^{Ax}|| \leq M \quad \forall x \geq 0$
$\Leftrightarrow \exists M \geq 1$ so dass $||e^{Ax}y_0|| \leq M||y_0|| \quad \forall x \geq 0,\ y_0 \in \mathbb{R}^n$
$\Leftrightarrow$ die Nulllösungs ist stabil
$\Leftrightarrow$ jede Llösung ist stabil (iii) $\Leftrightarrow Re\lambda < 0 \quad \forall \lambda$ EW von A

$\Leftrightarrow$ alle Lösungen eines Fundamentalsystems von $y' = Ay$ konvergieren gegen 0 für $x \to \infty$
$\Leftrightarrow$ alle Lösungen von $y' = Ay$ sind asymptotisch stabil
Sei $\omega > 0$ mit $s < -\omega < 0$. Für jede Lösung y_i des Fundamentalsystems gilt

$$\begin{aligned} ||y_i(x)|| &= ||e^{\lambda_i x}p_i(x)|| \\ &\leq e^{sx}||p_i(x)|| \\ &= \exp((s+\omega)x)e^{\omega x}||p_i(x)|| \\ &\leq M_i e^{-\omega x} \text{ für ein } M_i \geq 1 \end{aligned}$$

Mit $M_\omega = max\{M_i \imath = 1, \ldots, n\}$ folgt die Behauptung. Wenn alle EW halbeinfach sind, dann p_i ist Kostante und es gilt

$$||y_i(x)|| \leq ||p_i|e^{sx} \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

somit (2.2) auch mit $-\omega = s$ gilt. □

Beispiel 2.9. Die konstante Lösung $x_0 = (0, 0)$ ist eine stationäre Lösung des DGSs

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 \\ x_2' = x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

Die EW der zugehörigen Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ sind $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ mit Eigenvektoren $v_1 = \binom{1}{1}, v_2 = \binom{0}{1}$. Da die EW haben Realteil < 0, x_0 ist asymptotisch stabil. Man skizzierte in das Phasenportrait der allgemeine Lösung

$$x(t) = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Mehere Phasenportraits: man betrachte $x' = Ax$, $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ und angenommen λ, μ EW von A mit $\lambda \neq \mu$. Die allgemeine Lösung ist

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 e^{\lambda t} v_1 + c_2 e^{\mu t} w_1 \\ x_2 &= c_1 e^{\lambda t} v_2 + c_2 e^{\mu t} w_2 \end{aligned}$$

wobei $\binom{v_1}{v_2}$ und $\binom{w_1}{w_2}$ sind die EV. Im Fall wenn $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ die allgemeine Lösung $x_1(t) = c_1 e^{\lambda t}, x_2 = c_2 e^{\lambda t}$. Im Phasenraum erhält man der radiale Fluß $\Phi(x,t) = e^{\lambda t} x$.

Beispiel 2.10. Komplexer Fall. Angenommen die matrix A hat EW $\lambda_1 = \gamma + i\omega$, $\lambda_2 = \gamma - i\omega$, mit EV $u + iv$ bzw. $u - iv$. Um die Phasenportrait zu skizzieren betrachte man die reelle Transformation

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^2 & \overset{\sim}{\to} & \mathbb{C} \\ u & \mapsto & 1 \\ v & \mapsto & i \end{array}$$

Dann der Fluß auf $\mathbb{R}^2$ geht in einen einfachen Fluß auf $\mathbb{C}$ über :

$$\Phi(z,t) := z e^{(\gamma + i\omega)t} = z e^{\gamma t} e^{i\omega t}$$

2.2. **Nicht lineare autonome DGS $y' = f(y)$.**

Satz 2.11. *(Linearisierte Stabilität)*
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offene Menge, $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbar Funktion, y_s einer kritischer Punkt und $\bar{y}_s$ die zugehörige stationäre Lösung. Weiter sei

$$J_f[y_s] = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right)_{1 \leq i,j \leq n} (y_s)$$

die Jacobimatrix von f in y_s. Dann gilt
(i) wenn jeder EW von $J_f[y_s]$ strikt negativen Realteil besitzt, ist $\bar{y}_s$ exponentiell stabil;
(ii) besitzt mindestens ein EW von $J_f[y_s]$ strikt positiv Realteil, so ist $\bar{y}_s$ instabil.

Bemerkung 2.12. Alle EW haben Realteil ≤ 0 und mindestens ein EW mit Realteil $= 0$ dann ist keine Aussage über die Stabilität der nicht-linearen DG möglich.

Bemerkung 2.13. Der Prinzip der linearisierte Stabilität ist in allemeinen für nicht-autonome Systeme falsch. Gegenbeisipel:
Das DGS

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + e^{2x} y_2 \\ y_2' &= -y_2 \end{aligned}$$

besitzt die stationäre Lösung $\bar{y}_s \equiv (0,0)$. Für $(y_1(0), y_2(0)) = (\xi_1, \xi_2)$ die maximale Lösung ist

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\xi_1 - \frac{\xi_2}{2}) e^{-x} + \frac{\xi_2}{2} e^{x} \\ \xi_2 e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Man bemerkt, dass $\lim_{x\to\infty} ||y|| = +\infty$ falls $\xi_2 \neq 0$. Dann die stationäre Lösung $\bar{y}_s$ ist instabil. Aber

$$J_f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & e^{2x} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

hat EW $\lambda = -1$ zweifach.

Beispiel 2.14. Wir betrachten das autonome nicht-lineare DGS

$$\begin{aligned} x' &= (2+x)(y-x) \\ y' &= y(2+x-x^2) \end{aligned}$$

Die Ruhelage sind : $(0,0), (-2,0), (-1,-1), (2,2)$. Da

$$J_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

einen EW λ mit $Re\lambda > 0$ besitzt, ist die zugehörige stationäre Lösung instabil (,,Sattel"). Wir erhalten auch

$$J_f(-2,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad J_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_f(2,2) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich, die Lösung $\bar{y}_s = (-2,0)$ ist auch instabil. Da die Matrizen $J_f(-1,-1)$ und $J_f(2,2)$ EW mit negativen Realteil besitzen, sind die zugehörige Lösungen exponentiell stabil.

Beispiel 2.15. Mathematisches Pendel ohne Reibung. Nach Newtonsgesetzte

$$my'' = \overrightarrow{F}_{tan} = -mg\sin(y)$$

wobei m =Masse, $\overrightarrow{F}_{tan}$= die tangentiel Komponente. Nach die Substitution $z = y'$ liefert ein DGS

$$\left\{ \begin{aligned} y' &= z \\ z' &= -g\sin y \end{aligned} \right. \tag{2.3}$$

Dann $f(y,z) = (z, -g\sin y)$ hat die kritische Punkte $(k\pi, 0)$, für $k \in \mathbb{Z}$. Die Ruhelage $\binom{0}{0}$ und $\binom{\pi}{0}$ hat physikalisch sinnvoll: im ersten Fall das Pendel hängt senkrecht nach unten, im zweiten hängt senkrecht nach oben.
Für den kritischer Punkt $y_s = \binom{\pi}{0}$:

$$J_f\left[\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g\cos y & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_f\left[\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g & 0 \end{pmatrix}.$$

Die EW sind $\lambda = \pm\sqrt{g}$ und nach dem Satz 2.11 $\binom{\pi}{0}$ ist instabil.
Für den kritischer Punkt $y_s = \binom{0}{0}$:

$$J_f\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g & 0 \end{pmatrix}.$$

Die EW sind $\lambda = \pm i\sqrt{g}$. Da $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ für alle EW der Prinzip der linearisierten Stabilität ist nicht anwendbar.

Aber es gibt physikalisch motivierte Erhaltungsgrößen,

$$E(y,z) = \frac{z^2}{2} + g\int \sin y = E_{kin} + E_{pot}$$

z.B. $E(y,z) = \frac{z^2}{2} - g\cos y$. Es gilt :

$$\frac{d}{dt}E(y(t),z(t)) = \nabla E(y(t),z(t)) \cdot \begin{pmatrix} y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = (g\sin(y(t)), z(t)) \cdot \begin{pmatrix} z(t) \\ -g\sin(y(t)) \end{pmatrix} = 0$$

für jede Lösung des DGSs $y' = z, z' = -g\sin y$, d.h. E ist konstant entlang der Lösungskurve. Solche Erhaltungsgrößen zur Untersuchung der Stabilität benutzt werden kann.

Definition 2.16. Sei $f : D \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig (L-B). Eine stetig differenzierbare Funktion $E : D \to \mathbb{R}$ heißt *erstes Integral* des DGSs $y' = f(y)$ wenn es gilt:

$$\nabla E(y) \cdot f(y) = 0 \qquad \forall y \in D.$$

(Hier $\nabla E = (\frac{\partial E}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial E}{\partial y_n})$ ist der Gradient von E).

Beispiel 2.17. Die Funktion $E(y,z) = \frac{z^2}{2} - g\cos(y)$ ist ein erstes Integral von

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -g\sin y \end{cases}$$

Bemerkung 2.18. Alle konstanten Funktionen sind erste Integral für jede DGS, also sie bringen keine zusätzliche Information über die Stabilität . Nicht jede DGS besitzt eine nicht-triviale erste Integrale.

Beispiel 2.19.

$$\begin{cases} y' = -y \\ z' = -z \end{cases}$$

hat die Lösung $\binom{y}{z}(t) = \binom{y_0}{z_0} \cdot e^{-t}, \quad (y_0, z_0) \in \mathbb{R}^2,\ t \in \mathbb{R}$. Angenommen, $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ein erstes Integral dieser; dann gilt:

$$E(y_0, z_0) = E(y_0 e^{-t}, z_0 e^{-t}) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} E(0,0), \quad \forall (y_0, z_0) \in \mathbb{R}^2$$

da E stetig und konstant entlang die Lösungskurve ist, d.h. $E(y_0, z_0) = E(0,0) \quad \forall (y_0, z_0) \in \mathbb{R}^2$, also ist E konstant.

Beispiel 2.20. Für ein zweidimensionale Hamilton'sche System

$$\begin{cases} y' = \frac{\partial}{\partial z} H(y,z) \\ z' = -\frac{\partial}{\partial y} H(y,z) \end{cases}$$

ist die Hamilton-Funktion H ein erstes Integral. Z.B. für das matematisches Pendel $E(y,z) = \frac{z^2}{2} - g\cos y$ ist die Hamilton-Funktion des systems (2.3).

Beispiel 2.21. (Räuber-Beute-Modell)

$$\begin{cases} y' = y(\alpha - \beta z) \\ z' = z(\delta y - \gamma) \end{cases}$$

mit $\alpha, \beta, \gamma\delta > 0$. Ist es ein Hamilton'sches Systems? Wir suchen $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$-Funktion mit $\frac{\partial}{\partial z} H(y,z) = y(\alpha - \beta z)$ und $\frac{\partial}{\partial y} H(y,z) = -z(\delta y - \gamma)$. Ist dies der Fall, dann ist H sogar eine $\mathcal{C}^2$-Funktion und muss gelten :

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} H(y,z) \stackrel{?}{=} \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} H(y,z)$$

aber $\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} H(y,z) = \alpha - \beta z$, $\frac{\partial^2}{\partial z \partial y} H(y,z) = \gamma - \delta y$, so ist kein Hamilton'sches System. Anderseits, ist

$$E(y,z) = \alpha \ln(|z|) - \beta z + \gamma \ln(|y|) - \delta y$$

ein erstes Integral auf jedem der offenen Quadranten.

Bemerkung 2.22. Für ein 2-dimensionales autonomes System

$$\begin{cases} y' = f(y,z) \\ z' = g(y,z) \end{cases} \qquad f, g : D \to \mathbb{R} \quad \mathcal{C}^1\text{-Funktionen}$$

mit $D \subset \mathbb{R}^2$ offene Menge ist

$$\frac{\partial}{\partial y} f(y,z) = -\frac{\partial}{\partial z} g(y,z) \quad \text{auf } D \tag{2.4}$$

eine notwendige Bedingung dafür, dass das System ein Hamilton-System ist. Ist D einfach zusammenhängend, dann ist (2.4) auch hinreichende Bedingung.

Welche Information liefert ein nicht-triviales erstes Integral?

Definition 2.23. Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig, y_s kritischer Punkt und $\bar{y}_s$ die zugehörige stationäre Lösung. Eine stetig differenzierbare Funktion $V : U \to \mathbb{R}$, mit $y_s \in U \subset D$ offene Menge, heißt

(i) **schwache Lyapunov-Funktion** des DGS in y_s wenn es gilt

$$\nabla V(y) \cdot f(y) \leq 0 \qquad \forall y \in U,$$

(ii) **starke Lyapunov-Funktion** der DGS in y_s wenn es gilt

$$\nabla V(y) \cdot f(y) < 0 \qquad \forall y \in U \setminus \{y_s\}.$$

Bemerkung 2.24. (1) V ist schwache (bzw. starke) Lyapunov-Funktion auf D $\Leftrightarrow$ V fällt entlang Lösungskurven, die ganz in U verlaufen, (bzw. strikt) monoton fallend, d.h.

$$\frac{d}{dt} V(y(t)) = \nabla V(y(t)) \cdot y'(t) = \nabla V(y(t)) \cdot f(t) \leq 0 \quad (\text{ bzw. } < 0)$$

für jede Lösung y, die in U verläuft.
(2) Erste Integrale sind schwache Lyapunov-Funktionen.

Beispiel 2.25. Wir betrachten wieder das Mathematische Pendel im Phasenraum, der y-z-Ebene. In diesem kann man die Trajektorien $\{(y(t), z(t)) \mid t \in I\}$ darstellen, wobei $(y, z) : I \to \mathbb{R}^2$ Lösung ist . Besitzt die DG ein erstes Integral E, so liegen sämtlichen Trajektorien in einer *Niveaumenge* :

$$N_c = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{z^2}{2} + \frac{gy^2}{2} = \tilde{c} + g = c, \; c \in \mathbb{R}\}$$

(hier $\cos y \sim 1 - \frac{y^2}{2}$ für $|y| << 1$ nach Taylor). Für beliebig vorgegebenes $\epsilon > 0$ es sei $c > 0$ die größte Konstante, so dass N_c noch in $B_\epsilon(0)$ liegt. Dann gilt mit $\delta = c > 0$, dass $\forall (y_0, z_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $||(y_0, z_0)|| < \delta$ die Lösung des AWPs ganz in $B_\epsilon(0)$ verläuft

Satz 2.26. *Sei $f : D \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig, y_s kritischer Punkt und $\bar{y}_s$ die zugehörige stationäre Lösung. Sei $V : U \to \mathbb{R}$ eine schwache (bzw. starke) Lyapunov-Funktion des DGS $y' = f(y)$ für die Ruhelage $y_s \in U$. Es gelte*

$$V(y_s) < V(y) \qquad \forall y \in U \setminus \{y_s\},$$

dann ist $\bar{y}_s$ stabil (bzw. asymptotisch stabil).

Beweis. Wir zeigen die Aussage nur für schwache Lyapunov-Funktion. O.B.d.A. (Ohne Beschränkung der Allgemeinheit) $y_s = 0$ und $V(0) = 0$. (denn: $\bar{y}_s$ stabile Lösung von $y' = f(y) \Leftrightarrow$ 0 stabile Lösung von $y' = \tilde{f}(y)$, wobei $\tilde{f} = f(y + y_s)$ und $\widetilde{V}(y) = V(y + y_s) - V(y_s)$ ist schwache Lyapunov-Funktion von $y' = \tilde{f}(y)$ für die Ruhelage 0 und $\widetilde{V}$ besitzt ein striktes Minimum in 0).
Sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass $B_\varepsilon(0) \subset U$.
Man definiert $m = m(\varepsilon) = \min\{V(y) \; : \; \|y\| = \varepsilon\} > 0$ nach Voraussetzung. Da V stetig ist und $V(0) = 0$, existiert $0 < \delta < \varepsilon$ mit

$$0 \leq V(y) \leq \frac{m}{2} \quad \forall y \in \overline{B_\delta(0)}.$$

Sei nun $y_0 \in \overline{B_\delta(0)}$ und y zugehörige maximale Lösung des AWPs

$$\begin{cases} y'(t) = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad \forall t \geq 0.$$

Sei $T^* := \sup\{T > 0, \|y(t)\| < \varepsilon, \; \forall t \in [0, T]\}$
Angenommen $T^* < \infty$.
Dann folgt aus der Stetigkeit der Lösung: $\|y(T^*)\| = \varepsilon$. Da $t \mapsto V(y(t))$ monoton fallend auf $[0, T^*]$ ist, folgt

$$m \leq V(y(T^*)) \leq V(y_0) \leq \frac{m}{2},$$

wiederspruch da $m > 0$. Folglich $T^* = \infty$ und 0 ist stabil. □

Beispiel 2.27. Noch mal das matematische Pendel: $y'' = -g \sin y$. Wir untersuchen die Stabilität der Ruhelage $(0, 0)$ des zugehöriges DGS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -g \sin y \end{cases} \tag{2.5}$$

Das erste Integral $E(y, z) = \frac{z^2}{2} - g \cos y$ ist also schwache Lyapunov-Funktion von (2.5). Außerdem gilt

$$E(0, 0) = -g < E(y, z), \qquad \forall (y, z) \in (-2\pi, 2\pi) \times \mathbb{R}$$

Es folgt nach dem Satz 2.26 $(0,0)$ ist stabil (aber nicht asymptotisch stabil, da keine Energie, z.B. durch die Reibung verloren geht).

Beispiel 2.28. Wir untersuchen die Stabilität der kritischer Punkten :

$$\begin{cases} y' = -z - y^3 \\ z' = y - z^3 \end{cases}$$

Offensichtlich ist $y_s = (0,0)$ ein kritischer Punkt des DGS.

$$f(y,x) = \begin{pmatrix} -z - y^3 \\ y - z^3 \end{pmatrix}, \quad (y,z) \in \mathbb{R}^2,\ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$$

$$J_f[(y,z)] = \begin{pmatrix} -3y^2 & -1 \\ 1 & -3z^2 \end{pmatrix}, \quad J_f[(0,0)] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

so die EW sind $\lambda = \pm i$ und der Prinzip der linearisierten Stabilität nicht anwendbar. Wir suchen nun eine Lyapunov-Funktion. Versuche

$$V(y,z) = \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}, \quad (y,z) \in \mathbb{R}^2$$

$$V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2), \quad V(0,0) < V(y,z) \quad \forall \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

und

$$\nabla V(y,z) \cdot f(y,z) = (y,z) \cdot \begin{pmatrix} -z - y^3 \\ y - z^3 \end{pmatrix} = -yz - y^4 + yz - z^4 < 0,\ \forall (y,z) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

$\Rightarrow$ V ist starke Lyapunov-Funktion und erfüllt die Ungleichung im Satz 2.26, dann ist $(0,0)$ asymptotisch stabil.

Beispiel 2.29. Mathematisches Pendel mit Reibung. Wir betrachten das klassisches Modell des Pendels (lineare Reibungskraft)

$$y'' = -ky' - g\sin(y), \quad k > 0 \quad (\text{ Reibungskraft } ky' \text{ }).$$

Dabei ist die Reibung proportional zur Geschwindigkeit und ihr entgegengesetzt. Allgemein ist eine Reibungskraft von der Form:

$$h(y') \text{ mit } h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), \quad h(0) = 0, \quad h(r) \cdot r > 0 \quad \forall r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Wir betrachten die kubische Reibungskraft: $h(r) = kr^3$. Das zu gehörige DGS 1. Ordnung ist dann:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -kz^3 - g\sin(y) \end{cases}$$

Ruhelage: $(0,0)$. Ein Kandidat für eine Lyapunov -Funktion ist die Energiefunktional:

$$E(y,z) = \frac{z^2}{2} - g\cos(y) \qquad (y,z) \in \mathbb{R}^2$$

ist $\mathcal{C}^1$-Funktion auf $\mathbb{R}^2$ und

$$\nabla E(y,z) \cdot \begin{pmatrix} z \\ -kz^3 - g\sin y \end{pmatrix} = -kz^4 \leq 0 \quad \forall (y,z) \in \mathbb{R}^2$$

So ist E eine schwache Lyapunov-Funktion aber da $\nabla E(y,z) \cdot f(y,z) = 0$ auf $\mathbb{R} \times \{0\}$ ist E keine starke Lyapunov-Funktion. Da E in $(0,0)$ ein lokales, striktes Minimum besitzt, ist die Ruhelage $(0,0)$ stabil. Über die asymptotische Stabilität der Ruhelage $(0,0)$ kann zum gegenwärtigen Zeitpunkt noch keine Aussage getroffen werden.

3. Rand- und Eigenwertprobleme für gewöhnliche DG

Wir betrachten lineare DG 2. Ordnung vom Typ

$$u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_0(x)u(x) = f(x) \tag{3.1}$$

mit $x \in [a,b]$, $u \in \mathcal{C}^k([a,b])$ und $a_0, a_1, f \in \mathcal{C}^0([a,b])$. Wir suchen u so dass zwei Randbedingungen erfüllt.

• Robin-Randbedingung

$$\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = \eta_1, \qquad \beta_0 u(a) + \beta_1 u'(a) = \eta_2$$

mit $\eta_1, \alpha_0, \alpha_1, \eta_2, \beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}$ Konstanten so dass

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 > 0, \qquad \beta_0^2 + \beta_1^2 > 0 \tag{3.2}$$

gilt. Besondere Fälle:

(1) Dirichlet-Randbedingung: $u(a) = \eta_1, u(b) = \eta_2$.
(2) Neumann-Randbedingung: $u'(a) = \eta_1, u'(b) = \eta_2$.
(3) Gemischte-Randbedingung: $u(a) = \eta_1, u'(b) = \eta_2$.

• Periodische Randbedingung

$$u(a) = u(b), \qquad u'(a) = u'(b).$$

Beispiel 3.1. (i) Das Randwertproblem (RWP) $u''(x) = 1, \quad x \in [a,b]$ und $u'(a) = u'(b) = 0$ besitzt keine Lösung.
(ii) Das RWP $u''(x) = 0, \quad x \in [a,b], \quad u'(a) = u'(b) = 0$ besitzt unendliche viele verschiedene Lösungen: alle Konstante Funktionen auf $[a,b]$ sind Lösungen.
(iii) Das RWP $u''(x) = 0, \quad x \in [a,b], \quad u(a) = u'(b) = 0$ besitzt genau eine Lösung: $u = 0$.
(iv) Das RWP $u''(x) + u(x)^2 = 1, \quad x \in [a,b], \quad u''(a) = u'(b) = 0$ besitzt genau zwei Lösungen: $u = \pm 1$.

Wir betrachten den Differentialoperator

$$(Lu)(x) := u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_0(x)u(x), \quad x \in [a,b] \quad (a,b \in \mathbb{R}, a < b)$$

und den Randdifferentialoperator

$$Ru := C\begin{pmatrix} u(a) \\ u'(a) \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} u(b) \\ u'(b) \end{pmatrix}$$

mit $C, D \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ und $a_1, a_0 \in \mathcal{C}^0([a,b])$. Wir untersuchen Lösungen des RWPs

$$\begin{cases} Lu = f \\ Ru = \eta \end{cases} \tag{3.3}$$

auf $[a,b]$, mit $f \in \mathcal{C}^0([a,b]), \eta \in \mathbb{R}^2$.

Hauptsatz 3.2. *Fredholm-Alternative.*
Unter den obigen Voraussetzungen gilt:
• *Entweder: besitzt das RWP*

$$\begin{cases} Lu = f \\ Ru = \eta \end{cases} \qquad \text{auf } [a,b]$$

für alle $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ und alle $\eta \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutige Lösung
• *oder: das zugehörige homogene RWP*

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ Ru = 0 \end{cases} \qquad \text{auf } [a,b]$$

besitzt eine nicht triviale Lösung.

Beweis. Sei $\{u_1, u_2\}$ ein Fundamentalsystem der homogenen DG $Lu = 0$. Dann ist die allgemeine Lösung der inhomogenen DG $Lu = f, \quad f \in \mathcal{C}^0([a,b])$, von der Form

$$u(x) = u_p(x) + c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x), \qquad x \in [a,b], \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

wobei u_p eine partikuläre Lösung der inhomogenen DG $Lu = f$ ist. Eine Lösung des RWPs (3.3) erhält man, wenn dies möglich ist, durch geeignetes Anpassen der Koeffizienten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Es muss gelten:

$$\begin{aligned} \eta = Ru &= Ru_p + C\begin{pmatrix} c_1 u_1(a) + c_2 u_2(a) \\ c_1 u_1'(a) + c_2 u_2'(a) \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} c_1 u_1(b) + c_2 u_2(b) \\ c_1 u_1'(b) + c_2 u_2'(b) \end{pmatrix} \\ &= Ru_p + \underbrace{\left[C \begin{pmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1'(a) & u_2'(a) \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} u_1(b) & u_2(b) \\ u_1'(b) & u_2'(b) \end{pmatrix} \right]}_{=:M} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Angenommen nun, dass das homogene RWP

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ Ru = 0 \end{cases} \qquad \text{auf } [a,b]$$

nur die triviale Lösung besitzt. Aus unseren Vorüberlegungen folgt dann aber (mit $u_p \equiv 0$), dass das Gleichungssystem

$$0 = \eta = R \cdot 0 + M\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

nur die triviale Lösung $\binom{c_1}{c_2} = \binom{0}{0}$ besitzt. D.h. aber gerade, dass $\det(M) \neq 0$, d.h. M invertierbar ist, und dann folgt sofort, dass für beliebige $\eta \in \mathbb{R}^2$ und beliebige partikuläre Lösungen u_p das Gleichungssystem

$$\eta = Ru_p + M\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

eine eindeutige Lösung besitzt. Somit folgt die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des inhomogenen RWPs (3.3) für beliebige $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ und beliebige $\eta \in \mathbb{R}^2$.

□

Für ein inhomogenes RWP (3.3) entweder es ist eindeutig lösbar und das gilt genau dann, wenn das homogene RWP nur trivial lösbar ist, oder das RWP besitzt keine Lösungen, oder das RWP besitzt unendliche viele Lösungen.

Beispiel 3.3. Man betrachte $y'' + y = 0$ mit Randwerte $y(0) = 1$ und $y(\frac{\pi}{2}) = 1$. Ein Fundamentalsystem der DG ist $\cos x, \sin x$ und die allgemeine Lösung ist $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Die Randbedingungen liefern:

$$1 = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1, \qquad 1 = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_2,$$

Dann besitzt das RWP die eindeutige Lösung $y(x) = \cos x + \sin x$.

Beispiel 3.4. Man betrachte $y'' + y = 0$ auf $[0, \pi]$ mit $y(0) = 1$ und $y(\pi) = 1$. Die allgemeine Lösung ist $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Die Randbedingungen liefern:

$$1 = y(0) = c_1, \qquad 1 = y(\pi) = c_1 \cos(\pi) + c_2 \sin(\pi) = -c_1,$$

Dann besitzt das RWP keine Lösung.

Beispiel 3.5. Man betrachte $y'' + y = 0$ auf $[0, \pi]$ mit $y(0) = 1$ und $y(\pi) = -1$. Die Randbedingungen liefern:

$$1 = y(0) = c_1, \qquad -1 = y(\pi) = c_1 \cos(\pi) + c_2 \sin(\pi) = -c_1,$$

Dann besitzt das RWP undendliche viele Lösungen $y(x) = \cos x + c_2 \sin x$ mit $c_2 \in \mathbb{R}$.

Wir nehmen im Folgenden an, dass die Randbedingung von der Form

$$Ru = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} R_1 u := \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = \eta_1 \\ R_2 u := \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = \eta_2 \end{matrix}$$

Weiter sei das homogene RWP

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ R_1 u = 0 \\ R_2 u = 0 \end{cases}$$

nur trivial Lösbar, d.h. es gilt :

$$\det\left(C \begin{pmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1'(a) & u_2'(a) \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} u_1(b) & u_2(b) \\ u_1'(b) & u_2'(b) \end{pmatrix} \right) \neq 0$$

wobei u_1, u_2 ein Fudamentalsystem von $Lu = 0$ bilden und $C = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ and $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$. Dies ist äquivalent zu

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 u_1(a) + \alpha_2 u_1'(a) & \alpha_1 u_2(a) + \alpha_2 u_2'(a) \\ \beta_1 u_1(b) + \beta_2 u_1'(b) & \beta_1 u_2(b) + \beta_2 u_2'(b) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} R_1 u_1 & R_1 u_2 \\ R_2 u_1 & R_2 u_2 \end{pmatrix} \neq 0 \tag{3.4}$$

In der nächste Lösungsmethode für das RWP gehen wir zunächst von einem beliebigen Fundamentalsystem zu einem dem RWP „angepassten" Fundamentalsystem über.

Lemma 3.6. *Sei u_1, u_2 ein beliebiges Fundamentalsystem von $Lu = 0$ und es gelte (3.4). Dann ist v_1, v_2 definiert durch:*

$$\begin{matrix} v_1 = c_{11} u_1 + c_{12} u_2 & \quad \text{mit} \quad & c_{11} = R_1 u_2 & c_{12} = -R_1 u_1 \\ v_2 = c_{21} u_1 + c_{22} u_2 & & c_{21} = R_2 u_2 & c_{22} = -R_2 u_1 \end{matrix}$$

ein Fundamentalsystem von $Lu = 0$ und es gilt: $R_1 v_1 = 0$ und $R_2 v_2 = 0$.

Beweis. Es gilt

$$R_1 v_1 = R_1 u_2 \cdot R_1 u_1 + (-R_1 u_1) \cdot R_1 u_2 = 0$$

Analog $R_2 v_2 = 0$.Man berechnet

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 u_2 & R_2 u_2 \\ -R_1 u_1 & -R_2 u_1 \end{pmatrix} := J, \qquad \det J \neq 0$$

wegen des obigen Rechnungen. Also ist $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{pmatrix}$ regulär, d.h. $\{v_1, v_2\}$ ist ein Fundamentalsystem.

□

Bemerkung 3.7. Wenn (3.4) nicht erfüllt ist, dann existiert im Allgemeinen kein Fundamentalsystem $\{v_1, v_2\}$ mit $R_1 v_1 = 0$ und $R_2 v_2 = 0$. Zum Beispiel bei

$$\begin{cases} u'' + u = 0 \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

Nun erinnern wir uns daran, dass eine partikuläre Lösung von $Lu = u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = f$ gegeben ist durch die 1. Komponente der Funktion

$$\begin{aligned} y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} &= \int_0^x \phi(x)\phi(s)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds \\ &= \int_0^x \begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} \frac{1}{v_1(s)v_2'(s) - v_2(s)v_1'(s)} \begin{pmatrix} v_2'(s) & -v_2(s) \\ -v_1'(s) & v_1(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds \end{aligned}$$

(Hier ist $\phi(x)$ die Fundamentalmatrix von $Ly = 0$. Dann

$$y_1(x) = \int_0^x \frac{v_2(x)v_1(s) - v_1(x)v_2(s)}{W(s)} f(s) ds,$$

die als die Variation der Konstanten-Formel bekannt ist. Daraus folgt

$$y_1(x) = \int_0^x \frac{v_2(x)v_1(s)}{W(s)} f(s) ds - \int_0^x \frac{v_1(x)v_2(s)}{W(s)} f(s) ds.$$

Da $\tilde{y} = \int_0^1 \frac{v_2(s)}{W(s)} f(s) ds \cdot v_1(x)$ eine Lösung von $Lu = 0$ ist, folgt dass auch $y_p(x) = y_1(x) + \tilde{y}(x)$ eine Lösung von $Lu = f$ auf $[0, 1]$ ist. Diese partikuläre Lösung ist der Form

$$y_p = \int_0^x \frac{v_2(x)v_1(s)}{W(s)} f(s) ds + \int_x^1 \frac{v_1(x)v_2(s)}{W(s)} f(s) ds.$$

Wir definieren die Funktion $G : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$G(x, s) := \begin{cases} \frac{v_2(x)v_1(s)}{W(s)}, & s \le x \\ \frac{v_1(x)v_2(s)}{W(s)}, & s \ge x \end{cases} \qquad (x, s) \in [0, 1]^2$$

so können wir die partikuläre Lösung von $Lu = f$ schreiben als:

$$y_p = \int_0^1 G(x, s) f(s) ds, \qquad x \in [0, 1].$$

Diese partikuläre Lösung y_p erfüllt auch die Randbedingung des RWPs:

$$\begin{aligned} R_1 y_p &= \alpha_1 y_p(0) + \alpha_2 y_p'(0) \\ &= \alpha_1 \int_0^1 \frac{v_1(0)v_2(s)}{W(s)} f(s)ds + \alpha_2 \left(\frac{v_2(0)v_1(0)}{W(0)} f(0) - \frac{v_1(0)v_2(0)}{W(0)} f(0) + \int_0^1 \frac{v_1'(0)v_2(s)}{W(s)} f(s)ds \right) \\ &= \underbrace{(\alpha_1 v_1(0) + \alpha_2 v_1'(0))}_{=R_1 v_1 = 0} \int_0^1 \frac{v_2(s)}{W(s)} f(s)ds \end{aligned}$$

Analog rechnet man die 2. Randbedingung $R_2 y_p = 0$ nach. Somit ist y_p die gesuchte eindeutige Lösung des RWPs.

$$\begin{cases} Lu = f \\ R_1 u = R_2 u = 0 \end{cases}$$

Die Funktion G erfüllt die folgende Eigenschaften:

(1) Die Funktion G ist stetig auf $[0,1]^2$; G ist auf $D^r = \{(x,s) \in [0,1]^2 \mid x \geq s\}$, so wie auf $D^l = \{(x,s) \in [0,1]^2 \mid x \leq s\}$, zweimal stetig partiell nach x differenzierbar.

(2) $G_x^r(x,x) - G_x^l(x,x) = 1$, wobei $G^r = G_{|D_r}$ und $G^l = G_{|D_l}$. G macht beim Durchlauf der Diagonalen einen Sprung der Höhe 1.

(3) $\forall (x,s) \in [0,1]^2$ gilt $LG(\cdot, s) = 0 \quad (s \neq x)$ denn:

(4) Es gilt

$$R_1 G(\cdot, s) = R_2 G(\cdot, s) = 0 \qquad \forall s \in (0,1)$$

denn:

analog folgt $R_2 G(., s) = 0$

Hauptsatz 3.8. *Falls eine Funktion $G : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ die obigen Eigenschaften $1 - 4$ erfüllt, dann gilt: $\forall f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ ist*

$$y(x) = \int_0^1 G(x,s) f(s) ds, \qquad x \in [0,1]$$

die eindutige Lösung des RWPs

$$\begin{cases} Lu = f \\ R_1 u = R_2 u = 0 \end{cases}$$

und G ist die einzige Funktion mit diesen Eigenschaften.

Beweis. Eindeutigkeit: Seien $G_1, G_2 : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit den Eigenschaften 1-4. Dann: $\forall f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ ist

$$\int_0^1 G_1(x,s) f(s) ds = \int_0^1 G_2(x,s) f(s) ds \qquad x \in [0,1]$$

denn dies ist die eindeutige Loŝung des RWP. Sei $x_0 \in [0,1]$; wähle dann $f(s) := G_1(x_0,s) - G_2(x_0,s) \ \in \mathcal{C}^0([0,1])$, $s \in [0,1]$. Dann gilt

$$\int_0^1 (G_1(x,s) - G_2(x,s))(G_1(x_0,s) - G_2(x_0,s)) ds = 0 \qquad \forall x \in [0,1]$$

insbesondere für x_0:

$$\int_0^1 (G_1(x_0,s) - G_2(x_0,s))^2 ds = 0 \qquad \Rightarrow \qquad G_1(x_0,s) = G_2(x_0,s) \quad \forall s \in [0,1].$$

Da $x_0 \in [0,1]$ beliebig gewählt wurde, folgt: $G_1 \equiv G_2$ auf $[0,1]^2$. Da G wie oben konstruiert die Eigenschaften 1-4 hat, folgt somit, dass die Funktion G durch die Eigenschaften eindeutig bestimmt ist. Da wie oben gesehen $y(x) := \int_0^1 G(x,s)f(s)ds,\ x \in [0,1]$, Lösung des RWPs ist, folgt die Behauptung. □

Definition 3.9. Die eindeutig durch 1-4 bestimmte Funktion heißt Green'sche Funktion des RWPs

$$\begin{cases} Lu = f \\ R_1 u = R_2 u = 0 \end{cases}$$

Beispiel 3.10. Man betrachte das RWP:

$$\begin{cases} u'' = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Ein Fundamentalsystem ist $\{1, x\}$ von der DG $y'' = 0$ $(\lambda = 0)$. Man überprüft:

$$\det\begin{pmatrix} R_1 u_1 & R_1 u_2 \\ R_2 u_1 & R_2 u_2 \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \det\begin{pmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_1(1) & u_2(1) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

So ist das RWP eindeutig lösbar. Man bekommt ein neues Fyundamentalsystem $\{v_1, v_2\} = \{-x, x-1\}$ und $W(x) = -1$. Dies erfüllt offenbar: $R_1 v_1 = R_2 v_2 = 0$. Das homogene RWP ist demnach nur trivial lösbar. Somit besitzt das RWP eine Green'sche Funktion.

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{s(x-1)}{1} & s \leq x \\ \frac{x(s-1)}{1} & s \geq x \end{cases} = \begin{cases} s(x-1) & s \leq x \\ x(s-1) & s \geq x \end{cases}, \qquad (x,s) \in [0,1]^2$$

Das inhomogene RWP

$$\begin{cases} y'' = 1 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

besitzt demnach die eindeutige Lösung

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^1 G(x,s) \cdot 1 ds = (x-1)\int_0^x s ds + x\int_x^1 (s-1) ds \\ &= (x-1)\left(\frac{x^2}{2} - 0\right) + x\left(\frac{1}{2} - 1 - \frac{x^2}{2} + x\right) \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Beispiel 3.11. Sei $L = D^2 + 1$ und das RWP auf $[0, \pi/2]$

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ u(0) = u(\pi/2) = 0 \end{cases}$$

Ein Fundamentalsystem ist $\{\sin x, \cos x\}$ von der DG $u'' + u = 0$. Man überprüft:

$$\det \begin{pmatrix} R_1 u_1 & R_1 u_2 \\ R_2 u_1 & R_2 u_2 \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \det \begin{pmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_1(\pi/2) & u_2(\pi/2) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

So ist das RWP eindeutig lösbar. Man bekommt ein neues Fyundamentalsystem $\{v_1, v_2\} = \{\sin x, -\cos x\}$. Dies erfüllt offenbar: $R_1 v_1 = R_2 v_2 = 0$. Das homogene RWP ist demnach nur trivial lösbar. Somit besitzt das RWP eine Green'sche Funktion.

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{-\cos s(\sin x)}{1} & x \leq s \\ \frac{-\sin s(\cos x)}{1} & x \geq s \end{cases}, \qquad (x,s) \in [0, \pi/2]^2$$

Das inhomogene RWP

$$\begin{cases} u'' + u = 1 \\ u(0) = u(\pi/2) = 0 \end{cases}$$

besitzt demnach die eindeutige Lösung

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^{\pi/2} G(x,s) \cdot 1 ds = -\cos x \int_0^x \sin s ds - \sin x \int_x^{\pi/2} \cos s ds \\ &= \cos x(\cos x - \cos 0) - \sin x(\sin(\pi/2) - \sin x) \\ &= 1 - \cos x - \sin x \end{aligned}$$

3.1. **Differentialoperator vom Sturm-Liouville-Type.** Seien $L = a_0 + a_1 D + a_2 D^2$ der Differentialoperator mit $a_0, a_1, a_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Wir definieren auf $\mathcal{C}^0([a,b])$ das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) g(x) dx \qquad f, g \in \mathcal{C}^0([a,b])$$

(symmetrische bilinear Form). Wir behandeln die Frage wann L selbstadjungiert ist, d.h.

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle$$

für f, g die in den Randpunkte a und b verschwinden.

Definition 3.12. Seien $p, q : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen und $p(x) > 0$ $\forall x \in [a,b]$. Dann heißt

$$L := q + p'D + pD^2$$

ein Differentialoperator vom Sturm-Liouville-Type. Also $Ly = qy + p'y' + py'' = qy + (py')'$

Lemma 3.13. *Seien $p, q : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen und $L = q + p'D + pD^2$, dann gilt $\forall f, g \in \mathcal{C}^2([a,b])$:*

(1) $f(Lg) - g(Lf) = \left(p \cdot \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} \right)'$

(2) $\langle f, Lg \rangle - \langle Lf, g \rangle = \left(p \cdot \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} \right) \Big|_a^b$

(3) *Wenn* $f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle Lf, g\rangle = \langle f, Lg\rangle$
(4) *Wenn* $p(a) = p(b) = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle Lf, g\rangle = \langle f, Lg\rangle$

Beweis. (1) Es gilt

$$(py')' = Ly - qy \tag{3.5}$$

und daher

$$\begin{aligned}
\left(p \cdot \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix}\right)' &= (f(pg') - g(pf'))' = f'(pg') + f(pg')' - g'(pf') - g(pf')' \\
&= f(pg')' - g(pf')' \underbrace{=}_{(3.5)} f(Lg - qg) - g(Lf - qf) \\
&= fLg - gLf
\end{aligned}$$

(2) Es folgt durch Integration in (1).

(3) $\left(p \cdot \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix}\right)\Big|_a^b = (pfg' - pgf')\Big|_a^b = 0.$

(4) Analog zu (3) □

Angenommen $p(x) > 0$. Wir betrachten $\tilde{L} := \frac{1}{p}L = \frac{q}{p} + \frac{p'}{p}D + D^2$. Für $\tilde{L}$ haben wir gezeigt dass zum RWP genau eine Greensche Funktion $\tilde{G}$ existiert. Dann ist $G(x,s) := \frac{\tilde{G}(x,s)}{p(s)}$ die zu L gehörende Greensche-Funktion.

Satz 3.14. *Wenn das homogene Sturm-Liouville RWP*

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}$$

nur die triviale Lösung besitzt, dann existiert zum diesem RWP genau eine Green' sche Funktion G *und es gilt*

$$G(x,s) = G(s,x) \qquad \forall x, s \in [a,b]$$

Beweis. Nach dem Satz 3.8 existiert eine Greensche Funktion durch

$$G^l(x,s) = \frac{v_1(x)v_2(s)}{p(s)W(s)}, \qquad G^r(x,s) = \frac{v_1(s)v_2(x)}{p(s)W(s)}.$$

Wir haben $W = v_1 \cdot v_2' - v_2 \cdot v_1'$. Aus 3.13 (1) folgt

$$(pW)' = v_1(Lv_2) - v_2(Lv_1) = 0$$

wegen $Lv_1 = Lv_2 = 0$. Daher ist $pW =: c$ konstant. Dann $\forall a \le x < s \le b$ (auf D^l) gilt

$$G(x,s) = G^l(x,s) = \frac{v_1(x)v_2(s)}{c} = G^r(s,x) = G(x,s).$$

Analog für $a \le s < x \le b$ (auf D^r). □

Mit Hilfe der Greensche Funktion behandeln wir Eigenwertprobleme.

Definition 3.15. $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt Eigenwerte zum RWP wenn existiert $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, $u \neq 0$ $u \in \mathcal{C}^2([a,b])$ mit

$$Lu + \lambda u = 0, \quad u(a) = 0, \ u(b) = 0.$$

in diesem Fall u heißt Eigenfunktion zum λ

Bemerkung 3.16. (1) Hier $Lu = -\lambda u$, anders als in der linearen Algebra.
(2) Ein homogenes RWP besitzt genau dann eine nicht triviale Lösung wenn 0 ein Eigenwert ist

Satz 3.17. *Ist L ein Sturm-Liouville Operator auf $[a,b]$ und sind $\lambda_1 \neq \lambda_2$ Eigenwerte zum RWP und u_1, u_2 Eigenfunktionen zu λ_1, λ_2, so gilt:*

$$\langle u_1, u_2 \rangle = 0.$$

Beweis. Die Eigenfunktionen u_1, u_2 verschwinden in a, b und daher gilt nach 3.13 (3)

$$\langle Lu_1, u_2 \rangle = \langle u_1, Lu_2 \rangle.$$

Daraus folgt nach lineare Algebra $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$. Denn:

$$-\lambda_1 \langle u_1, u_2 \rangle = \langle -\lambda_1 u_1, u_2 \rangle = \langle Lu_1, u_2 \rangle = \langle u_1, Lu_2 \rangle = \langle u_1, -\lambda_2 u_2 \rangle = -\lambda_2 \langle u_1, u_2 \rangle.$$

So $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle u_1, u_2 \rangle = 0$, daher $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$. □

Satz 3.18. *Es sei 0 kein Eigenwert des zu L auf $[a,b]$ gehörende Sturm-Liouvilleschen EWPs. Ist dann G die Green'sche Funktion, so ist u genau dann Eigenfunktion zum Eigenwert λ, wenn gilt:*

$$\int_a^b G(x,s)u(s)ds = -\frac{1}{\lambda}u(x).$$

Beweis. Für $u(a) = u(b) = 0$ gilt

$$Lu = f \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_a^b G(x,s)f(s)ds = u(x).$$

Mit $f := -\lambda u$ folgt die Behauptung. □

Satz 3.19. *Ist $L = q + p'D + pD^2$ ein Sturm-Liouville -Operator auf $[a,b]$ mit $q(x) \leq 0$, $\forall x \in [a,b]$ und ist $\lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwert. Dann ist $\lambda > 0$*

Beweis. Ist u Eigenfunktion zu λ, d.h. $Lu = -\lambda$. Daher,

$$\begin{aligned} \lambda ||u||^2 &= \langle \lambda u, u \rangle = -\langle Lu, u \rangle = -\int_a^b (qu + (pu')')udx \\ &= -\int_a^b qu^2 dx - \int_a^b (pu')'udx \end{aligned}$$

Partielle integration ergibt

$$\int_a^b (pu')'udx = pu'u\Big|_a^b - \int_a^b pu'u'dx = -\int_a^b p(u')^2 dx < 0.$$

Dann folgt $\lambda ||u||^2 > -\int_a^b qu^2 dx \geq 0$ und daher $\lambda > 0$. □

Beispiel 3.20. *Die schwingende Saite*
Wir betrachten eine schwingende elastische Saite der Länge ℓ Der Elastizitätsmoodul der Saite sei $p(x) > 0$ und die Massendichte $r(x)$ sei konstant $r \equiv 1$. Für die Auslenkung $u(x,t)$ der Saite an der Stelle x zur Zeit t gilt die partielle DG

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t),$$

für $x \in [0,\ell],\ t \geq 0$. Oder (Schwingungsgleichung)

$$(p(x)u_x(x,t))_x = u_{tt}(x,t).$$

Die Saite ist an ihren Endpunkten fest eingespannt, d.h.

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0,\ t \geq 0.$$

Die Anfangsbedingungen für Ort und Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ sind

$$u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = g(x), \qquad x \in [0,\ell].$$

Wobei $p, f, g \in \mathcal{C}^2([0,\ell])$ mit $p > 0$ und

$$f(0) = g(0) = f(\ell) = g(\ell) = 0.$$

Wir suchen eine Funktion $u \in \mathcal{C}^2([0,\ell] \times [0,\infty), \mathbb{R})$ mit
(1) $(p(x)u_x(x,t))_x = u_{tt}(x,t)$
(2) $u(0,t) = 0, \quad u(\ell,t) = 0, \quad t \geq 0$
(3) $u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad x \in [0,\ell]$

Ansatz:

$$u(x,t) = v(x) \cdot w(t)$$

und setzen $u' := \frac{\partial u}{\partial x}$, $\dot{u} := \frac{\partial u}{\partial t}$

$$(p(x) \cdot v'(x))' \cdot w(t) = \ddot{w}(t) \cdot (v(x)).$$

Für alle x, t ist also

$$\frac{(p(x) \cdot v'(x))'}{v(x)} = \frac{\ddot{w}(t)}{\dot{w}(t)}$$

die Linke Seite hängt nur von x, die rechte nur von t ab ; daher ist dies konstant $=: -\lambda$ und damit erhält man :

$$(pv')' + \lambda v = 0, \qquad \ddot{w} + \lambda w = 0.$$

Setzt man

$$Lv = \frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}v\right),$$

so ergibt sich

$$\frac{Lv}{v} = \frac{\ddot{w}}{w} = -\lambda \tag{3.6}$$

Damit hat man (mit $q = 0$) ein Sturm-Liouville-Eigenwertproblem $Lv + \lambda v = 0$. Die Funktion v soll die Randbedingung (2) realisieren. Wir setzen also

$$\mathcal{D}(L) = \{y \in \mathcal{C}^2([0,1]) \ \mid\ y(0) = 0, \quad y(\ell) = 0\}$$

und verlangen $v \in \mathcal{D}(L)$. Aus $Lv + \lambda v = 0$ folgt λ ist Eigenwert zu L. Insbesondere gilt nach 3.19 die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ zu L sind positiv. Aus 3.6 folgt dann für w:

$$w_n(t) = A_n \cos\sqrt{\lambda_n}t + B_n \sin\sqrt{\lambda_n}t$$

mit Konstanten A_n, B_n.

Ist dann v_n Eigenfunktion von L zum Eigenwert λ_n, so bekommen die partikuläre Lösung

$$v_n(x)(A_n \cos\sqrt{\lambda_n}t + B_n \sin\sqrt{\lambda_n}t)$$

von (1) die bereits die Randbedingungen (2) realisiert. Die $v_1, v_2, \dots$ bilden eine Hilbertbasis. Bei genügender Konvergenz wird man wird man die allgemeine Lösung von (1) mit den Randbedingungen (2) in der Form

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)(A_n \cos\sqrt{\lambda_n}t + B_n \sin\sqrt{\lambda_n}t) \tag{3.7}$$

bekommen. Wegen $v_n \in \mathcal{D}_L$ realisiert u die Randbedingungen (2). Für die RB (3): die Fourierentwicklungen von f und g lauten:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n(x), \quad a_n = \langle f, v_n\rangle, \qquad g = \sum_{n=1}^{\infty} b_n v_n(x), \quad b_n = \langle g, v_n\rangle.$$

Koeffizientenvergleich mit 3.7 für $t = 0$ liefert $A_n = a_n$; Koeffizientenvergleich mit der nach t differenzierten Reihe 3.7 für $t = 0$ ergibt $B_n = \frac{b_n}{\sqrt{\lambda_n}}$. Mit den Fourierkoeffizienten a_n, b_n folgt als Lösung des Problems $(1), (2), (3)$:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)(a_n \cos\sqrt{\lambda_n}t + \frac{b_n}{\sqrt{\lambda_n}} \sin\sqrt{\lambda_n}t)$$

Hauptsatz 3.21. *Sei λ EW zu L. Dann bilden die Eigenfunktionen zu λ ein endlich-dimensionalen Teilraum von*

$$\mathcal{D}(L) := \{u \in \mathcal{C}^2([a,b]) \ \mid \ u(a) = u(b) = 0\}.$$

Seine Dimension e_λ heißt die geometrische Vielfachheit von λ. Die EW von L bilden eine Folge $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ die sich in der Form $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ anordnen lässt. Jede EW ist so eingeführt, wie e_λ. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty.$$

Zu den EW λ_n gibt es in $L_2([a,b])$ eine Hilbertbasis $v_n \in \mathcal{D}(L)$ von EF zu λ_n. Jedes $f \in L_2([a,b])$ hat eine Fourierentwicklung:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, v_n\rangle v_n.$$

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und nimmt f die Randbedingungen

$$f(a) = f(b) = 0$$

an, so konvergiert die Reihe gleichmäßig in $[a,b]$.

Beispiel 3.22. Spezialfall des konstanten Elastizitätsmoduls: $a > 0$ und $p(x) = a^2, \ \forall x \in [0,\ell]$. Die DG sind dann

$$a^2 v'' + \lambda v = 0, \qquad \ddot{w} + \lambda w = 0.$$

Wir setzen $f = \sin x, \ g = 0, \ \ell = \pi$. Wegen $v(0) = 0$ ist $v(x) = c \cdot \sin\frac{\sqrt{\lambda}}{a}x$ und aus $v(\ell) = 0$ folgt $\frac{\sqrt{\lambda}}{a}\ell = n\pi$.

4. Elemente der Funktionalanalysis

Ein Skalarprodukt in einem Vektor Raum V definiert eine Metrik und erlaubt uns Winkel zwischen Vektoren mässen, so über Orthogonalität zu sprechen. In der folgenden V ist einer $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Definition 4.1. Ein Skalarprodukt auf V ist eine Abbildung $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ so dass $\forall u, v, w \in V$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt :

(1) Bilinearität

$$\langle \lambda u + \mu v, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \mu\langle v, w\rangle, \qquad \langle w, \lambda u + \mu v\rangle = \lambda\langle w, u\rangle + \mu\langle w, v\rangle$$

(2) Symmetrie $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$

(3) Für $v \neq 0$, $\langle v, v\rangle > 0$

Das paar $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ist ein euklidische Vektorraum.

Bemerkung 4.2. Ein Skalarprodukt induziert eine Norme durch $||v|| : \sqrt{\langle v, v\rangle}$ und $(V, ||\cdot||)$ heißt ein normierter Raum. Weiter kann man den Winkel φ zwischen v, w durch die Gleichung $\langle v, w\rangle = ||v|| \cdot ||w|| \cos\varphi$ definieren.

Beispiel 4.3. (1) Das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist $\langle x, y\rangle := x_1y_1 + \cdots x_ny_n$, $x, y \in \mathbb{R}^n$
(2) Auf $\mathcal{C}^0([a, b])$, $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Definition 4.4. Zwei Vektoren v, w in einem euklidischem Vektorraum sind orthogonal (zueinander senkrecht) wenn $\langle v, w\rangle = 0$ (auch $v \perp w$). Seien $U, W \subset V$ Unterräume, dann ist $U \perp W \;\Leftrightarrow\; u \perp w\ \forall u \in U,\ \forall w \in W$. Man schreibt $U^\perp := \{v \in V \mid v \perp u,\ \forall u \in U\}$.

Bemerkung 4.5. Eigenschaften

(1) (Pythagoras) $||v + w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2$ für alle $v, w \in V$ mit $v \perp w$
(2) (Parallelogrammgleichung) $||v + w||^2 + ||v - w||^2 = 2||v||^2 + 2||w||^2$
(3) (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) $|\langle v, w\rangle| \leq ||v|| \cdot ||w||$ und die Gleichung gilt $\Leftrightarrow$ v, w linear abhängig sind.

Satz 4.6. *(Zerlegungssatz)*
Ist $U \subset V$ Unterräume eines euklidischen Vektorraum V und $\dim U < \infty$, dann

$$V = U \bigoplus U^\perp$$

Als Folgerung, in einem endlich-dimensionalen euklidischen Raum gibt es immer ein Orthonormalbasis.

Definition 4.7. Eine Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ von V heißt Orthonormalbasis wenn $\forall i, j$ gilt

$$\langle b_i, b_j\rangle = \delta_{ij} \quad \text{und} \quad ||b_i|| = 1$$

Mittels des Schmidtschen Orthonormalisierunsverfahren erhält mann eine Orthonormalbasis.

Beispiel 4.8. *Fourierpolynome* Problemstellung: Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ stetig. Wie kann man $a_0, \dots, a_m, b_1, \dots b_m$ wählen so dass

$$s_m(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

f am besten approximiert ? d.h. so dass

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - (\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right)^2 dx$$

minimal ist.

Wir betrachten den endlichen Unterraum $U_m \subset \mathcal{C}^0([-\pi, \pi], \mathbb{R})$

$$U_m =: span\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos mx, \sin mx\}$$

Satz 4.9. *Für $n, k \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(kx)dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(kx)dx = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ \pi & n = k \end{cases}$$

Beweis. Für die erste Gleichung man bemerkt, dass $\cos(nx)\sin(kx)$ eine ungerade Funktion ist, so das Integral ist 0.
Für $k \neq n$ gilt

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+n}\sin(k+n)x + \frac{1}{k-n}\sin(k-n)x\right)\right] \\ = \; & \frac{1}{2}(\cos(k+n)x + \cos(k-n)x) = \cos(kx)\cos(nx) \end{aligned}$$

Daher folgt, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)dx = 0$ (man benutzt $\cos(k \pm m) = \cos k \cos m \mp \sin k \sin m$).
Analog für $\sin(nx)\sin(kx)$.
Aus $\cos^2 x = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$, folgt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{4n}\sin(2nx) + \frac{x}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

und aus $\sin^2 x = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$ folgt die andere Gleichung. □

Satz 4.10. *Seien $u_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ die Funktionen*

$$u_0(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad u_{2n-1}(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \qquad u_{2n}(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx.$$

Dann ist $\{u_0, u_1, \dots, u_{2m}\}$ eine Orthonormalbasis in U_m.

Definition 4.11. Die Koeffizienten

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \qquad b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \qquad n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

heißen die *Fourier Koeffizienten* von f und

$$s_m(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

ist das m-te Fourierpolynom von f.

Folglich: s_m ist das trigonometrische Polynoms dass f „im quadratischen Mittel" am besten approximiert, d.h.

$$||f(x) - s_m||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_m(x))^2 dx$$

ist minimal

4.1. **Hilberträume und Forurierreihen.**

Definition 4.12. Ein normierter Raum $(X, ||\cdot||)$ über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ heißt **vollständig** oder ein **Banachraum** wenn in ihm jede Cauchy-Folge konvergent ist.
Als Erinnerung: $(x_k) \subset X$ ist eine Cauchy-Folge wenn: $\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon)$ mit $||x_k - x_l|| < \epsilon$, $\forall k, l \geq N(\epsilon)$.
Ein euklidischer VR $(\mathcal{H}, \langle\ ,\ \rangle)$ der versehen mit der Norm $||x|| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ vollständig ist, heißt Hilbertraum.

Beispiel 4.13. (1) $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ ist ein Hilbertraum.
(2) $(\mathbb{C}^n, \langle\ ,\ \rangle)$, mit $\langle x, y\rangle = x_1\bar{y}_1 + \cdots + x_n\bar{y}_n$ ist ein komplexener Hilbertraum.
(3) Für jeden Quader $I = I_1 \times \cdots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ ist $L_2(I)$ ist

$$L_2(I) = \{f \text{ messbare Funktion auf } I \mid \int_I f^2 dx < \infty\}/\{f = 0 \text{ fast überall }\}$$

mit $||f||_2^2 := \int_I f^2 dx$, ein Hilbertraum. In einem normierten VR die Konvergenz ist definiert. Im Hilbert VR $L_2(I)$, (f_n) konvergiert gegen f wenn $\forall \epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\int_I (f(x) - f_n(x))^2 dx < \epsilon\ \forall n \geq N$.

Satz 4.14. *(Stetigkeit des Skalarprodukts) In einem euklidischen VR gilt:*
(1) Wenn die Folgen (v_n) und (w_n) konvergieren, dann

$$\langle \lim_{n\to\infty} v_n, \lim_{n\to\infty} w_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle v_n, w_n\rangle.$$

(2) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ konvergiert dann

$$\langle \sum_{n=1}^{\infty} v_n, w\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle v_n, w\rangle$$

Beweis. Setzen $v = \lim_{n\to\infty} v_n, w = \lim_{n\to\infty} w_n$. Nach Cauchy-Schwartzschen Ungleichung ist

$$|\langle v_n, w_n\rangle - \langle v, w\rangle| = |\langle v_n, w_n - w\rangle + \langle v_n - v, w\rangle| \leq ||v_n|| \cdot ||w_n - w|| + ||v_n - v|| \cdot ||w||,$$

daraus folgt (1) und wenn dies auf die Folge $r_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$ anwendet ergibt sich (2). □

Das Ziel ist einen Zerlegungssatz für unendliche VR zu haben.

Lemma 4.15. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\mathcal{U} \subset \mathcal{H}$ abgeschlossen. Dann zu jedem $f \in \mathcal{H}$ existiert ein Element $f_0 \in \mathcal{U}$ mit*

$$||f - f_0|| \leq ||f - g|| \qquad \forall g \in \mathcal{U}$$

Beweis. Sei $\delta := \inf_{g\in\mathcal{U}}||f-g||$. Zu $n\in\mathbb{N}$ existiert $g_n\in\mathcal{U}$ mit

$$\delta \leq ||f-g_n|| < \delta + \frac{1}{n}$$

Wir werden zeigen dass (g_n) eine Cauchy-Folge ist. Wir setzen $v := f-g_n$, $w := f-g_m$. Dann ist

$$v+w = 2\left(f-\frac{g_n+g_m}{2}\right), \qquad v-w = g_m-g_n.$$

Da $\frac{g_n+g_m}{2}\in\mathcal{U}$,

$$||f-\frac{g_n+g_m}{2}||^2 \geq \delta^2$$

und damit

$$\begin{aligned} ||g_m-g_n||^2 &= 2||f-g_n||^2+2||f-g_m||^2-4||f-\frac{g_n+g_m}{2}||^2 \qquad \text{(Parallelogrammgleichung)} \\ &\leq 2||f-g_n||^2+2||f-g_m||^2-4\delta^2 \end{aligned}$$

Daher ist (g_n) eine Cauchy-Folge. Aus der Vollständigkeit von $\mathcal{H}$ folgt $g_n\to f_0$ für ein $f_0\in\mathcal{H}$. Da $\mathcal{U}$ abgeschlossen ist, $f_0\in\mathcal{U}$ und es gilt $\delta = ||f-f_0||$ □

Hauptsatz 4.16. *Zerlegungssatzt*
Ist $\mathcal{U}\subset\mathcal{H}$ abgeschlossen, so gilt

$$\mathcal{H} = \mathcal{U}\oplus\mathcal{U}^\perp$$

Beweis. Zu $v\in V$ wählt man $v_0\in U$ wie im Lemma 4.15. Behauptung: $v_1 := v-v_0\in U^\perp$. Angenommen $v_1\notin U^\perp$, dann folgt: es gibt ein $u\in U$ mit $\langle v_1,u\rangle\neq 0$ und wir können annehmen dass $||u||=1$. Wir setzen

$$\lambda := \langle v_1,u\rangle.$$

Dann

$$\begin{aligned} ||v_1-\lambda u||^2 &= \langle v_1-\lambda u, v_1-\lambda u\rangle \\ &= ||v_1||^2-2\lambda\langle v_1,u\rangle+\lambda^2||u||^2 \\ &= ||v_1||^2-2\lambda^2+\lambda^2 = ||v_1||^2-\lambda^2 < ||v_1||^2 \end{aligned}$$

so $||v_1-\lambda u|| < ||v_1|| = ||v-v_0||$ und dies ist ein Widerspruch zu Lemma 4.15. Dies zeigt die Behauptung. Somit ist $v = v_0+v_1$ mit $v_0\in U$ und $v_1\in U^\perp$. Daher $V = U+U^\perp$, aus $U\cap U^\perp = \{0\}$ folgt $V = U\oplus U^\perp$. □

Satz 4.17. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\mathcal{U}\subset\mathcal{H}$ ein abgeschlossener Unterraum, dann ist*

$$\mathcal{P}_\mathcal{U}:\mathcal{H}\to\mathcal{H},\ f\mapsto f_0$$

für $f = f_0+f_1$ mit $f_0\in\mathcal{U}$, $f_1\in(\mathcal{U})^\perp$ eine Projektion (d.h. $\mathcal{P}_\mathcal{U}^2 = \mathcal{P}_\mathcal{U}$) und $\mathcal{P}_\mathcal{U}$ ist selbstadjungiert.

In der folgenden betrachten wir $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum.

Definition 4.18. Eine Folge (b_n) in $\mathcal{H}$ heißt Orthonormalfolge, wenn für alle $n,m\in\mathbb{N}$ gilt

$$\langle b_n,b_m\rangle = \delta_{n,m}.$$

Wann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty x_nb_n$? Wir brauchen das nächste Lemma um die Frage zu antworten.

Lemma 4.19. *Seien $b_1, \dots, b_n \in \mathcal{H}$ und es gelte $\langle b_i, b_j\rangle = 0$ für $i \neq j$. Dann ist*
$$||b_1 + \cdots + b_n||^2 = ||b_1||^2 + \cdots + ||b_n||^2.$$

Satz 4.20. *Ist (b_n) eine Orthonormalfolge in $\mathcal{H}$, so gilt:*
$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n b_n \text{ ist konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \text{ ist konvergent}$$

Beweis. Nach dem Satz von Pythagoras gilt für $k \leq m$
$$||\sum_{n=k}^{m} x_n b_n||^2 = \sum_{n=k}^{m} ||x_n b_n||^2 = \sum_{n=k}^{m} x_n^2.$$
Daher ist $\sum_{n=1}^{\infty} x_n b_n$ genau denn eine Cauchy-Reihe, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ eine ist. Weil $\mathcal{H}$ und $\mathbb{R}$ vollständig sind, folgt daraus die Behauptung.

□

Satz 4.21. *Besselsche Ungleichung*
Ist (b_n) eine Orthonormal Folge in $\mathcal{H}$, so gilt für alle $f \in \mathcal{H}$:
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\langle f, b_n\rangle)^2 \leq ||f||^2$$

Beweis. Für $N \in \mathbb{N}$ ist
$$0 \leq \langle f - \sum_{n=1}^{N} \langle f, b_n\rangle b_n, f - \sum_{n=1}^{N} \langle f, b_n\rangle b_n\rangle = ||f||^2 - \sum_{n=1}^{N} (\langle f, b_n\rangle)^2,$$
so
$$\sum_{n=1}^{N} (\langle f, b_n\rangle)^2 \leq ||f||^2$$
und daraus folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{N} (\langle f, b_n\rangle)^2$ und die Ungleichung. □

Definition 4.22. Eine Hilbert-Basis in $\mathcal{H}$ ist eine Orthonormalfolge (b_n) mit der Eigenschaft: ist $f \in \mathcal{H}$ und gilt $\langle f, b_n\rangle = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ so folgt $f = 0$.

Bemerkung 4.23. Bei Hilbert-Basis die Folge (b_n) ist „maximal" : wenn es ein $f \neq 0$ gibt mit $\langle f, b_n\rangle = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, dann ist $(\frac{f}{||f||}, b_1, b_2, \dots)$ eine Orthonormalfolge. Eine Hilbert-Basis bezeicht man auch als vollständiges Orthonormalsystem.

Hauptsatz 4.24. *Charakterisierung der Hilbert-Basis*
Es sei (b_n) eine Orthonormalfolge im Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann sind die folgende Aussage äquivalent:

(1) *$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Hilbert-Basis in $\mathcal{H}$,*
(2) *für $\mathcal{M} := span\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{H}$,*
(3) *für jedes $f \in \mathcal{H}$ gilt $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, b_n\rangle b_n$,*

(4) *für alle* $f, g \in \mathcal{H}$ *gilt die Parsevalsche Gleichung*

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, b_n \rangle \cdot \langle g, b_n \rangle,$$

(5) *für jedes* $f \in \mathcal{H}$ *gilt die Besselschegleichung*

$$||f||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (\langle f, b_n \rangle)^2.$$

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (3) : Sei (b_n) eine Hilbert-Basis und $f \in \mathcal{H}$. Nach der Besselungleichung konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} (\langle f, b_n \rangle)^2$. Aus 4.20 folgt, dass auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, b_n \rangle b_n := g$$

konvergiert. Wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts für $m \in \mathbb{N}$

$$\langle f - g, b_m \rangle = \langle f, b_m \rangle - \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, b_m \rangle \langle b_n, b_m \rangle = \langle f, b_m \rangle - \langle f, b_m \rangle = 0,$$

und da (b_n) eine Hilbert-Basis ist, folgt $f = g$.
(3) $\Rightarrow$ (1): klar.
(3) $\Rightarrow$ (4) wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts.
(4) $\Rightarrow$ (5) mit $f = g$
(5) $\Rightarrow$ (1) : Aus $\rangle = \langle f, b_n \rangle = 0$ und (5) folgt $||f||^2 = 0$ und somit $f = 0$.
(3) $\Rightarrow$ (2) : Für $f \in \mathcal{H}$ ist $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, b_n \rangle b_n$, also $f \in \overline{\mathcal{M}}$, somit $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{H}$.
(2) $\Rightarrow$ (1) : Wenn (b_n) keine Hilbert-Basis ist, dann existiert $f \in \mathcal{H}$ mit $||f|| = 1$ und $f \perp b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Für jedes $g \in \mathcal{M}$ ist $f \perp g$ und daher $||f - g||^2 = ||f||^2 + ||g||^2 \geq 1$, daraus folgt $f \in \overline{\mathcal{M}}$(es gibt keine Folge in $\mathcal{M}$ die gegen f konvergiert), somit $\overline{\mathcal{M}} \neq \mathcal{H}$. □

Folgerung: In einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ kann man jedes $f \in \mathcal{H}$ in eine Reihe

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, b_n \rangle b_n$$

entwickeln, die man als Fourierreihe bezeichnet.

Beispiel 4.25. Sei

$$\ell_2 := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \text{ konvergiert } \}$$

der euklidische Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle (x_n), (y_n) \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$. Man kann zeigen, dass ℓ_2 ein Hilbertraum ist. Man setzt $b_n := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ so ist (b_n) eine Hilbertbasis.

4.2. **Komplexe Hilbertraäume.**

Definition 4.26. Sei U ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Ein hermitische Skalarproukt in U ist eine sesquilineare Form $\langle cdot, \cdot\rangle : U \times U \to \mathbb{C}$ die $\forall u, v, w \in U$, $\lambda\mathbb{C}$ die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- $\langle \lambda u + v, w\rangle = \bar{\lambda}\langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$
- $\langle w, \lambda u + v\rangle = \lambda\langle w, u\rangle + \langle w, v\rangle$
- $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$
- $\langle u, u\rangle > 0 \quad \forall u \neq 0$

Wir definiert ein komplexen Hilbertraum als ein euklidischer Vektorraum $(\mathcal{H}, \langle cdot, \cdot\rangle)$ der vollständig bzgl. der induzierten Norm ist. Die Sätze 4.16, 4.21, 4.24 gelten unverändert für komplexer Hilberträume, nur die Parsevalsche Gleichung lautet jetzt:

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, b_n\rangle \overline{\langle g, b_n\rangle}$$

wobei die b_n eine Hilbert-Basis bilden.

Fourierreihe.

Hauptsatz 4.27. *In $\mathcal{H} = L_2([-\pi, \pi])$ die Funktionen $u_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$*

$$u_0(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad u_{2n-1}(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \qquad u_{2n}(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx.$$

bilden Hilbert-Basis. Für jedes $f \in L_2([-\pi, \pi])$ gilt daher

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, u_n\rangle u_n$$

mit

$$a_0 := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f dx, \qquad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \qquad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

die Fourierkoeffizienten. Die ist die Fourierreihe von f.

Bei Fourierreihe unterscheidet man verschidene Konvergenzbegriffe:

- punktweise Konvergenz
- gleichmäßige Konvergenz
- Konvergenz bezüglich der in $L_2([-\pi, \pi])$ definiert Norm („im Quadratmittel”)

Satz 4.28. *Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ von beschränkter Variation und $f(-\pi) = f(\pi)$; f werde periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt und die Fortsetzung auch mit f bezeichnet. Wenn f in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig ist , dann konvergiert die Fourierreihe in x gegen $f(x)$.*

Dabei heißt f von beschränkter Variation, wenn es ein $M > 0$ gibt, so dass für jede Zerlegung $-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k = \pi$ gilt

$$\sum_{j=1}^{k} |f(x_j) - f(x_{j-1})| \leq M$$

Satz 4.29. *Wenn $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ mit $f(-\pi) = f(\pi)$ stetig und stückweise stetig differenzierbar ist, dann konvergiert die Fourierreihe der periodischen Fortsetzung von f gleichmässig gegen f.*

Beispiel 4.30. Wir berechnen die Fourierreihe von

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ \pi & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Wir haben

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

mit

$$\begin{aligned} a_0 := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f dx &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{\pi} \pi \cdot dx \right) = \pi, \\ a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \pi \cos nx dx = 0, \\ b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \pi \sin nx dx = \frac{1}{n}(1 - \cos n\pi) \\ &= \frac{1}{n}(1 - (-1)^n) \end{aligned}$$

so $b_{2n} = 0$ und $b_{2n+1} = \frac{2}{2n+1}$. Somit erhält man

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin((2n+1)x)}{2n+1} = \frac{\pi}{2} + 2 \sin x + \frac{2 \sin(3x)}{3} + \frac{2 \sin(5x)}{5} + \cdots$$

Beispiel 4.31. Wir berechnen die Fourierreihe von

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-\pi}{2} & -\pi \leq x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Diese Funktion ist die Funktion in Beispiel 4.30 minus $\frac{\pi}{2}$ dann

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin((2n+1)x)}{2n+1} = 2 \sin x + \frac{2 \sin(3x)}{3} + \frac{2 \sin(5x)}{5} + \cdots$$

Beispiel 4.32. Für Funktionen f definieren und integrierbar auf $[-L, L]$, die L-periodisch sind, man setzt

$$F(x) = f\left(\frac{Lx}{\pi}\right).$$

Dann ist $F(x)$ integrierbar auf $[-\pi, \pi]$. Ist

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

die Fourier Reihe von F dann mit der Substitution $t = \frac{Lx}{\pi}$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)\right).$$

mit

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{Lx}{\pi}\right)dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{Lx}{\pi}\right)\cos nx dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{Lx}{\pi}\right)\sin nx dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \end{aligned}$$

Hier das Variablenwechseln ist $t = \frac{L}{\pi}x$, so $-\pi \leq x \leq \pi \quad \Leftrightarrow \quad -L \leq t \leq L$. Zum Beispiel, man berechnet die Fourierreihe von

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -2 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 x dx &= \frac{1}{2}, \\ a_n = \frac{1}{2}\int_0^2 x\cos(n\frac{\pi x}{2})dx &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2(\cos(n\pi) - 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2((-1)^n - 1) \\ b_n = \frac{1}{2}\int_0^2 x\sin(n\frac{\pi x}{2})dx &= -2\frac{\cos(n\pi)}{n\pi} = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1} \end{aligned}$$

Somit erhält man

$$f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

Beispiel 4.33. (*Temperaturverteilung auf einer kreisförmigen Platte*)
Gegeben sind: eine Substanz mit der Dichte ϑ, dem Wärmleitvermögen k und der spezifischen Wärme c
Für die Temperatur $T = T(x, y, z, t)$ an der Stelle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ zur Zeit t gilt die Wärmeleitungsgleichung

$$\Delta T = \frac{\vartheta c}{k}\frac{\partial T}{\partial t}$$

(Hier: $\Delta = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$). Wenn die Temperatur unabhängig von der Zeit ist $\Delta T = 0$. Wir betrachte das Ebene Problem: Auf dem Rand ∂E einer Platte

$$\bar{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

sei Zeitunabhängige Temperatur $\rho : \partial E \to \mathbb{R}$ vorgegeben. Gesuch wird: die Temperaturverteilung im Innern $\bar{E}$, also eine stetige Funktion $T : \bar{E} \to \mathbb{R}$ die in E harmonisch ist (d.h. $\Delta T = 0$) und so dass $T_{|\partial E} = \rho$. Wir behandeln im Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ so $\rho : \partial E \to \mathbb{R}$ ist 2π-periodisch. Wir suchen $T = T(r,\varphi)$ auf $\{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ 0 \leq r \leq 1\}$ mit $T(1,\varphi) = \rho(\varphi)$, die für $0 \leq r \leq 1$ beliebig stetig differenzierbar ist $T \in C^\infty([0,1] \times [0,2\pi])$ und $\Delta T = 0$ in Polarkoordinaten d.h.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0$$

Ansatz: $T(r,\varphi) = v(r) \cdot w(\varphi)$ mit $v' = \frac{dv}{dr}$, $\dot{w} = \frac{dw}{d\varphi}$. Wir erhalten

$$v''w + \frac{1}{r}v'w + \frac{1}{r^2}v(r)\ddot{w} = 0$$

Für alle r, φ

$$\frac{r^2 v''(r) + rv'(r)}{v(r)} = -\frac{\dot{w}(\varphi)}{w(\varphi)}$$

dies ist eine Konstante $-\lambda$. Dann

$$r^2 v'' + rv' - \lambda v = 0, \qquad \ddot{w} + \lambda w = 0$$

Die zweite Gleichung ergibt sich $w(\varphi) = c_1\cos(\sqrt{\lambda}\varphi) + c_2\sin(\sqrt{\lambda}\varphi)$. So w soll Periode 2π haben, daher $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{N}_0$ und $\lambda = n^2 \in \mathbb{N}$. In der erste Gleichung:

$$r^2 v'' + rv' - n^2 v = 0$$

liefert die Lösungen (mit Hilfe des Ansatzes $v(r) = r^\alpha$)

$$v(r) = C_1 r^n + C_2 r^{-n}$$

und da v in 0 definiert sein soll, $v(r) = Cr^n$ mit $C \in \mathbb{R},\ n \in \{0,1,2,3,\ldots\}$. Damit die allgemeine Lösung ist

$$T(r,\varphi) = v(r)w(\varphi) = r^n(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi).$$

Um eine partikuläre Lösung zu finden, machen wir den Ansatz

$$T(r,\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi)$$

und die Fourierreihe für ρ ist

$$\rho = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi).$$

Da $T(1,\varphi) = \rho(\varphi) \ \Rightarrow A_n := a_n$ und $B_n := b_n$. Daher folgt

$$T(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi).$$

Konkretes Beispiel: $\rho : \partial E \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto 100x^2$ zeitlich konstante Temperatur vorgegeben. In Polarkoordinaten:

$$\rho(\varphi) = 100\cos^2\varphi.$$

Da $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$ gilt, erhält man die Fourierentwicklung

$$\rho(\varphi) = 100\cos^2\varphi = 50 + 50\cos 2\varphi$$

Nach der obigen Formel

$$T(r,\varphi) = 50 + 50r^2\cos(2\varphi).$$

In (x,y)-Koordinaten

$$T(x,y) = 50(x^2 - y^2 + 1).$$

Man bemerkt dass T harmonisch ist, d.h. $\Delta T = 0$. Auf dem Rand $\partial E = \{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1\}$ ist $T(x,y) = 100x^2$. Die Isotherme $\{(x,y) \in E \mid T(x,y) = c\}$ für $0 \le c \le 100$ sind die Hiperbelstücke $\{(x,y) \in E \mid x^2 - y^2 = \frac{c}{50} - 1\}$.

4.3. **Normierte Vektorräume.** Wir behandeln Vektorräume U über $\mathbb{R}$ bzw. über $\mathbb{C}$ $(= \mathbb{K})$.

Definition 4.34. Eine Abbildung $||\cdot|| : U \to [0,\infty)$ heißt Norm in U wenn $\forall u, v \in U$, $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

- $||u|| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0$
- $||\lambda u|| = |\lambda| ||u||$
- $||u + v|| \le ||u|| + ||v||$

Weitere Ungleichungen

- $||a|| - ||b|| \le ||a + b||$
- $||a - b|| - ||c - d|| \le ||a - c|| + ||b - d||$ (Vierecksungleichung)

Sei $(U, ||\cdot||)$ ein normierter Vektorraum. Durch $d(u,v) := ||u - v||$ ist eine Metrik in V definiert. Dies liefert den Begriff von Konvergenz in U.

Beispiel 4.35. Sei $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ die Menge alle reellle stetige Funktionen auf $[a,b]$. Wir definieren die Normen

$$(a) \qquad ||f||_\infty := \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$$

$$(b) \qquad ||f||_1 := \int_a^b |f(t)| dt$$

Für $p \ge 1$, $p \in \mathbb{R}$,

$$(c) \qquad ||f||_p := \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

Wir überprüfen dass $||f||_\infty$ eine Norm ist.

- $||f||_\infty = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = 0\ \forall t \in [a,b] \quad \Leftrightarrow \quad f \equiv 0.$
- $||cf||_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |cf(t)| = |c| \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| = |c| ||f||_\infty$
- $||f+g||_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)+g(t)| \le \sup_{t\in[a,b]}\{|f(t)|+|g(t)|\} \le \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |g(t)| = ||f||_\infty + ||g||_\infty$

Definition 4.36. Eine Folge $u_1, u_2, \dots$ aus U heißt konvergent wenn sie konvergent bzgl. der durch $||\cdot||$ induzierten Metrik ist, d.h. wenn $\exists u \in U$ mit

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists j_0 \in \mathbb{N}, s.d. \; ||u_j - u|| \leq \epsilon \quad \forall j \geq j_0$$

Man schreibt $u = \lim_{j\to\infty} u_j$ (u ist der Grenzwert der Folge)

Seien $u_1, u_2, \dots$ aus U die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} u_j$ heißt konvergent wenn die Folge der Partialsummen $s_k := \sum_{j=0}^{k} u_j$ konvergente ist. Man schreibt

$$\sum_{j=0}^{\infty} u_j := \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} u_j = \lim_{k\to\infty} s_k$$

Eine Folge $u_1, u_2, \dots$ aus U heißt Cauchy-Folge wenn gilt

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists j_0 \in \mathbb{N}, s.d. \; ||u_j - u_k|| \leq \epsilon \quad \forall j, k \geq j_0$$

Bemerkung 4.37. (1) Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge ($||u_j - u_k|| \leq ||u_j - u|| + ||u - u_k|| \leq \epsilon$)
(2) Jede Cauchy-Folge ist beschränkt d.h. $\sup\{||u_j|| \;\;|\;\; j \in \mathbb{N}\} < \infty$
($||u_j|| \leq ||u_{j_0}|| + ||u_j - u_{j_0}|| \leq M + \epsilon, \quad \forall j \in \mathbb{N}$ wobei $M := max\{||u_j|| \;\;|\;\; j = 1, \dots, j_0\}$).

Definition 4.38. $(U, ||\cdot||)$ ist vollständig wenn jede Cauchy-Folge in U konvergiert. Ein normierter vollständiger Raum heißt Banachraum.
Eine Menge $M \subseteq U$ heißt offen wenn $\forall u \in M, \exists\, \epsilon > 0$ so dass

$$\{v \in U \;\;|\;\; ||v - u|| < \epsilon\} \subset M.$$

Eine Menge $M \subseteq U$ heißt abgeschlossen wenn für jede konvergente Folge (u_n) aus M gilt dass ihr Grenzwert ebenfalls in M liegt.
U heißt endlich-dimensional wenn existieren lineare unabhängige Vektoren $u_1, \dots, u_n \in U$ mit $U = span\{u_1, \dots, u_n\}$.

Beispiel 4.39. Der normierte Raum $(\mathcal{C}^0([a,b]), ||\cdot||_\infty)$ ist ein Banachraum. Sei (u_n) eine Cauchy Folge aus $\mathcal{C}^0([a,b])$ d.h. $\forall \epsilon > 0, \; \exists N \in \mathbb{N}$ so dass

$$|u_{n+p}(x) - u_n(x)| \leq \sup_{x\in[a,b]} |u_{n+p}(x) - u_n(x)| = ||u_{n+p} - u_n||_\infty \leq \epsilon \qquad \forall n \geq N, p > 0.$$

Dann für alle $x \in [a,b]$, $(u_n(x))$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$, so existiert $u(x) := \lim_{n\to\infty} u_n(x)$. Wir nehmen $p \to \infty$ in der vorherigen Zeile und erhalten $\forall \epsilon > 0, \; \exists N \in \mathbb{N}$ so dass

$$\sup_{x\in[a,b]} |u_n(x) - u(x)| = ||u_n - u||_\infty \leq \epsilon \qquad \forall n \geq N.$$

Dann $u_n \to u$. Wir sollten zeigen, dass u stetig ist. Sei $x \in [a,b]$. Für $\epsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N}$ so dass

$$\sup_{z\in[a,b]} |u_N(x) - u(x)| = ||u_N - u||_\infty \leq \epsilon/3.$$

Da u_N stetig ist $\exists \delta > 0$ so dass

$$|u_N(y) - u_N(x)| \leq \epsilon/3$$

für alle $y \in [a,b]$ mit $|y-x| \leq \delta$. Es folgt

$$|u(y)-u(x)| \leq |u(y)-u_N(y)| + |u_N(y)-u_N(x)| + |u_N(x)-u(x)| \leq \epsilon$$

für alle $y \in [x-\delta, x+\delta] \cap [a,b]$. Damit ist u stetig und $\mathcal{C}^0([a,b])$ ein Banachraum.

Beispiel 4.40. $\mathcal{C}^0([a,b])$ mit $||\cdot||_1$ ist nicht vollständig.

Satz 4.41. *Die folgende Aussage sind äquivalent:*

(i) $\dim U < \infty$
(ii) *Jede injektive lineare Abbildung $U \to U$ ist surjektiv*
(iii) *Jede surjektive lineare Abbildung $U \to U$ ist injektiv*
(iv) *Wenn $V \subseteq U$ Teilraum ist und wenn eine bijektive lineare Abbildung $U \to V$ existiert, dann $U = V$.*

Beweis. (ii) und (iii) folgen aus der Gleichung $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim U < \infty$. □

Beispiel 4.42. Sei $U = \mathbb{R}[x]$ der Vektorraum alle Polynomen mit reellen Koeffizienten. Dann ist die lineare Abbildung

$$A : P(x) \mapsto xP(x)$$

injektiv: $xP(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(x) = 0$. Aber nicht surjektiv: die konstante Polynomen sind nicht in dem Bild. Anderseits die lineare Abbildung

$$B : P(x) \mapsto P'(x)$$

ist surjektiv (jedes Polynom besitzt eine Stammfunktion, die ein Polynom ist) aber nicht injektiv: $B(\lambda) = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Satz 4.43. *Die folgende Aussage sind äquivalent (Topologische Kriterien):*

(i) $\dim U < \infty$
(ii) *alle Normen sind äquivalent, d.h. für alle zwei Normen $||\cdot||_1$ und $||\cdot||_2$, $\exists a,b > 0$ so dass*
$$a||u||_1 \leq ||u||_2 \leq b||u||_1 \quad \forall u \in U$$
(iii) *Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.*
(iv) *Jede Teilraum (VR) von U ist abgeschlossen.*
(v) *Jede lineare Abbildung $U \to \mathbb{K}$ ist stetig*

Beispiel 4.44. In einem unendlichem Vektorraum nicht alle Norme sind äquivalent. Z.B. $\exists\, d > 0$ mit $||f||_1 \leq d||f||_\infty$ $\forall f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ aber es existiert keine $c > 0$ mit $||f||_\infty \leq c||f||_1$ $\forall f \in \mathcal{C}^0([a,b])$. Angenommen $\exists c > 0$ mit $||f||_\infty < c||f||_1$. Wir definieren für jedes $\epsilon > 0$

$$f_\epsilon(t) = \begin{cases} 1 - t/\epsilon & 0 \leq t \leq \epsilon \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases}$$

dann

$$||f_\epsilon||_\infty = 1 \leq c||f_\epsilon||_1 = c\int_0^1 |f_\epsilon| dx = c\epsilon/2 \quad \forall \epsilon > 0.$$

so erhält man ein Widerspruch.

Beispiel 4.45. In einem unendlichem Vektorraum nicht alle Teilräume sind abgeschlossen. Man bemerkt $\mathbb{K}[x] \subset \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ ist einer Teilraum. Aber $\mathbb{K}[x]$ ist bzgl. keine Norm $||\cdot||_p$ mit $1 \leq p \leq \infty$ abgeschlossen. Z. B.

$$u_j := \sum_{k=0}^{j} \frac{x^k}{k!} \ \in \ \mathbb{R}[x]$$

und $u_j \to e^x$ gleichmäßig aber e^x ist kein Polynom. Wenn e^x ein Polynom $P(x)$ von Grad n wäre, hätten wir $P^{(n+1)}(x) \equiv 0$ aber die n-te Ableitung von e^x ist $e^x \neq 0$.

Beispiel 4.46. In einem unendlichem Vektorraum U nicht alle lineare abbildungen $U \to \mathbb{K}$ sind stetig. Die Abbildung $u \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{K}) \mapsto u(0)$ ist linear und stetig bzgl. $||\cdot||_\infty$:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad s.d. \quad |\tilde{u}(0) - u(0)| \leq \epsilon \text{ wenn } ||\tilde{u} - u||_\infty \leq \delta$$

Aber unstetig bzgl. $||\cdot||_p$ $1 \leq p < \infty$. Z.B. beim Beispiel 4.44

$$||f_\epsilon||_1 = \int_0^\epsilon |1 - t/\epsilon| dt = \epsilon/2 \to 0, \qquad \epsilon \to 0$$

aber $f_\epsilon(0) = 1, \quad \forall \epsilon$.

Beispiel 4.47.
Sei $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ der Vektorraum alle stetige Funktionen $u : [a,b] \to \mathbb{K}$ mit der Norm

$$||u||_p := \left(\int_a^b |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leq p \leq \infty$$

und

$$||u||_\infty := \max_{a \leq x \leq b} |u(x)|.$$

Die Dreieckungleichung gilt für $||\cdot||_p$, $1 \leq p \leq \infty$ wegen der Minkowski-Ungleichung

$$\left(\int_a^b |u(x) + v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Definition 4.48. (*Konvergenz für Fuktionenfolgen*)
Sei (u_n) eine Folge in $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

(a) (u_n) konvergiert punktweise gegen eine Funktion u wenn $\forall x \in [a,b]$ gilt $|u_n(x) - u(x)| \to 0$ für $n \to \infty$ d.h.

$$\forall x \in [a,b], \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{ so dass } \quad |u_n(x) - u(x)| \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

(b) (u_n) konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion u wenn $\forall x \in [a,b]$ gilt $||u_n - u||_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |u_n(x) - u(x)| \to 0$ für $n \to \infty$ d.h.

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{ so dass } \quad |u_n(x) - u(x)| \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in [a,b].$$

(c) (u_n) konvergiert gegen eine Funktion u bzgl. $||\cdot||_p$ $(1 \leq p < \infty)$ wenn es gilt

$$||u_n - u||_p = \left(\int_a^b |\tilde{u}(x) - u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty,$$

d.h. wenn es gilt

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{so dass} \quad \left(\int_a^b |u_n(x) - u(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Bemerkung 4.49. (1) Eine Folge $u_1, u_2, \ldots$ aus $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ konvergiert gegen $u \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ bzgl. $||u||_\infty \Leftrightarrow (u_n)$ gleichmäßig gegen u konvergiert d.h.

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists j_0 \in \mathbb{N} \quad |u_j(x) - u(x)| \leq \epsilon \quad \forall x \in [a,b], \quad \forall j \geq j_0.$$

(2) Wenn $u_n \to u$ gleichmäßig $\Rightarrow u_n$ auch Punktweise konvergiert und bzgl. jeder Norm $||\cdot||_p$. Ferner, u ist auch stetig.

(3) Wenn $u_n \to u$ bzgl. der Norm $||\cdot||_p \Rightarrow u_n \to u$ konvergiert bzgl. Norm $||\cdot||_q$, $\quad \forall q \quad 1 \leq q \leq p$.

Beispiel 4.50. Sei $f_n(x) = \frac{n}{1+(xn)^2}$ auf $[0,1]$. Für $x \neq 0$ konvergiert $f_n(x)$ punktweise gegen 0 aber $f_n(0) = n$ konvergiert nicht für $n \to \infty$. Dann die Folge konvergiert nicht.

Beispiel 4.51. Sei $f_n(x) = \sin\left(x + \frac{1}{n}\right)$ auf $\mathbb{R}$. Offensichtlich, konvergiert f_n gegen $\sin x$ punktweise. Mit Hilfe der trigonometrischen Identitäten erhält man

$$\left|\sin\left(x + \frac{1}{n}\right) - \sin x\right| = \left|2\sin\left(\frac{1}{2n}\right)\cos\left(x + \frac{1}{2n}\right)\right| \leq 2\sin\left(\frac{1}{2n}\right) \leq \frac{1}{n} \to 0$$

So $\sin\left(x + \frac{1}{n}\right) \to \sin x$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$.

Satz 4.52. *Sei (u_n) eine Folge aus $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Wenn $u_n \to u$ gleichmäßig konvergiert, dann ist $u \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$*

Beispiel 4.53. Sei $h_n(x) = e^{-n|x-2|}$, $x \in \mathbb{R}$. Für x fest, $e^{-n|x-2|} \to 0$ falls $x \neq 2$ und konvergiert gegen 1 falls $x = 2$. So h_n konvergiert punktweise gegen eine Funktion h die nicht stetig ist, wegen des Satzes 4.52 die Konvergenz ist nicht gleichmäßig.

Satz 4.54. *Sei (f_n) eine Folge aus $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$, mit $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervalll. Wenn $f_n \to f$ gleichmäßig konvergiert, dann konvergiert die Folge der Stammfunktionen $F_n(x) := \int_a^x f_n(t)dt$ punktweise $\forall x \in I$ und*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)dt = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt = \int_a^x f(t)dt =: F(x).$$

Ferner, wenn I abgeschlossen und beschränkt ist, dann $F_n \to F$ gleichmäßig.

Beispiel 4.55. Sei $\psi_n(x) = n^2 x e^{-n|x|}$ für $x \in [0, \infty)$, Offensichtlich, konvergiert ψ_n gegen $\psi \equiv 0$ punktweise. Nach dem Satz 4.54 die Konvergenz nicht gleichmäßig ist. Denn

$$\int_0^\infty n^2 t e^{-n|t|} dt = -tne^{-nt}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty ne^{-nt} dt = -e^{-nt}\Big|_0^\infty = 1$$

aber $\int_0^\infty \psi dt = 0$.

Beispiel 4.56. *Banachraum $L_p(I)$.* Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$. Für $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ setzt man

$$\mathcal{L}_p(I) = \{ f \text{ messbaren Funktionen auf } I \;\mid\; |f|^p \text{ Lebesgue-integrierbar } \}$$

und wir defineren

$$||f||_p := \left(\int_I |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Es gilt

Satz 4.57. *$\mathcal{L}_p(I)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, für $f, g \in \mathcal{L}_p(I)$, $c \in \mathbb{R}$ gilt*

(1) $||cf||_p = |c| ||f||_p$
(2) $||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$
(3) $||f|| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0$ *fast überall*

So $|| \cdot ||_p$ definiert eine Pseudonorm in $\mathcal{L}_p(I)$. Um einen normierten Raum zu erhalten, definieren wir eine Äquivalenzrelation in $\mathcal{L}_p(I)$:

$$f, g \in \mathcal{L}_p(I), \qquad f \sim g \quad \Leftrightarrow \quad f - g = 0 \text{ f.ü.}$$

Man setzt $\mathcal{N}(I) := \{f \in \mathcal{L}_(I) \;\mid\; f = 0 \text{ f.ü.}\}$. Die Menge der Äquivalenzklassen bezeichnet man als den Quotientenraum

$$L_p(I) := \mathcal{L}_p(I)/\mathcal{N}(I).$$

Da die Operationen unabhängig der Wahl der Represäntanten sind, berechnet man mit einem Repräsentanten. In $L_p(I)$ definiert $|| \cdot ||_p$ eine Norm:

$$||f||_p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \text{ in } L_p(I)$$

Hauptsatz 4.58. *(von Riesz-Fischer) $\forall p \geq 1$, $L_p(I)$ ist ein Banachraum.*

Satz 4.59. *(Satz von Hölder) Seien $p, q \in \mathbb{R}$ so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $f \in L_p(I)$, $g \in L_q(I)$, dann $fg \in L_1(I)$ und*

$$||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_q$$

Mit Hilfe dieses Satzes, zeigen wir die Minkowski-Ungleichung

$$f, g \in L_p(I) \quad \Rightarrow \quad ||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$$

Beweis. Wenn $||f+g||_p = 0$, die Ungleichung ist erfüllt.

$$
\begin{aligned}
||f+g||_p^p = \int_I |f+g|^p dx &\leq \int_I (|f|+|g|)|f+g|^{p-1}dx \\
&= \int_I |f(x)||f+g|^{p-1}dx + \int_I |g||f+g|^{p-1}dx \\
&\leq \left[(\int_I |f|^p dx)^{1/p} + (\int_I |g|^p dx)^{1/p} \right] \left(\int_I |f+g|^{p-1(\frac{p}{p-1})} dx \right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&= (||f||_p + ||g||_p) \frac{||f+g||_p^p}{||f+g||_p}
\end{aligned}
$$

□

Definition 4.60. Sei $(U, ||\cdot||)$ ein normierter Vektorraum, $A \subset U$ ist eine konvexe Menge wenn $\forall x, y \in A$, $tx + (1-t)y \in A$, $\quad \forall t \in [0,1]$

Beispiel 4.61.
- Teilräume sind konvexe Menge
- $\overline{B}_\epsilon(x_0) = \{x \in U \mid ||x - x_0|| \leq \epsilon\}$, $\forall \epsilon > 0, x_0 \in U$ ist eine konvexe Menge
- Sei $A \subset U$ konvex und $u \in U$, dann ist $A + u := \{x + u \mid x \in A\}$ eine konvexe Menge

Satz 4.62. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Jede abgeschlossene konvexe Menge $A \subset \mathcal{H}$ besitzt ein eindeutige element mit kleinster Norm.*

Beweis. Sei $\delta := \inf_{x \in A} ||x||$. Für $x, y \in A$, $\frac{1}{2}(x+y) \in A$ wegen der Konvexität. Daher $||x+y||^2 \geq 4\delta^2$. Es gilt

$$||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2) - ||x+y||^2 \leq 2(||x||^2 + ||y||^2) - 4\delta^2.$$

Eindeutigkeit: Angenommen $||x|| = ||y|| = \delta$. Dann ist $||x-y||^2 \leq 2(||x||^2 + ||y||^2) - 4\delta^2 = 0$ und damit $||x-y|| = 0$, d.h. $x = y$.

Existenz: Sei (x_n) eine Folge aus A so dass $||x_n|| \to \delta$. Dann gilt

$$||x_n - x_m||^2 \leq 2(||x_n||^2 + ||x_m||^2) - 4\delta^2 \ \to \ 0.$$

Somit ist (x_n) eine Cauchy-Folge. Nach der Vollständigkeit von $\mathcal{H}$, existiert es $x \in \mathcal{H}$ mit $x_n \to x$. Da A abgeschlossen ist $x \in A$ und $||x|| = \lim_{n\to\infty} ||x_n|| = \delta$. □

Korollar 4.63. *Sei $A \neq \emptyset$, $A \subset \mathcal{H}$ abgeschlossen und konvex. Dann für jedes $v \in \mathcal{H}$ existiert ein eindeutiges Element $u_0 \in A$ mit*

$$||v - u_0|| \leq ||v - u|| \qquad \forall u \in A.$$

Beweis. Sei $v \in \mathcal{H}$. Wir betrachten die Menge $A - v =: A'$. Nach Satz 4.62 existiert es ein eindeutig $v_0 \in A'$ mit kleinstern Norm. Dann

$$||v_0|| = \inf_{v' \in A'} ||v'|| = \inf_{u \in A} ||u - v||$$

Wir setzen $u_0 = v_0 + v$, so $||u_0 - v|| = ||v_0|| = \inf_{u \in A} ||u - v||$. □

Wir werden beschäftigenn mit linearen Abbildungen auf Banachräume (vollständige normierte Räume), d.h. Operatoren wie Δ oder Sturm-Liouville-Operatoren.

4.4. **Beschränkte lineare Operatoren.**

Definition 4.64. Seien V, W normierte Vektorräume; eine lineare Abbildung $A : V \to W$ heißt beschränkt, wenn ein $c > 0$ existiert mit

$$||A(f)|| \leq c||f|| \qquad \forall f \in V.$$

Statt $A(f)$ schreiben wir auch Af. Für eine lineare Abbildung A definieren wir

$$||A|| := \sup_{f \in V \setminus \{0\}} \frac{||Af||}{||f||} = \sup_{g \in V \setminus \{0\}, ||g||=1} ||Ag||, \qquad ||A|| = +\infty \quad \text{ist zugelassen}$$

Also: A ist beschränkt $\Leftrightarrow \quad ||A|| < \infty$.

Beispiel 4.65. (a) Die lineare Abbildung $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $Ax = ax$, $a \in \mathbb{R}$ definiert, ist beaschränkt und $||A|| = |a|$
(b) In jedem normierten Raum X die Identität $I : X \to X$ ist beschränkt und $||I|| = 1$. Wenn $||A|| = 0$ dann ist $A = 0$ $(0 = ||A|| = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{||Ax||}{||x||} \ \Rightarrow ||Ax|| = 0 \ \Rightarrow Ax = 0 \quad \forall x \in X)$.

Beispiel 4.66. Eine orthogonale Projektion in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist eine lineare Abbildung $\mathcal{P} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ so dass $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ und $\langle \mathcal{P}x, y \rangle = \langle x, \mathcal{P}y \rangle$, $\forall x, y \in \mathcal{H}$. Dann ist $\mathcal{P}$ beschränkt. Für $\mathcal{P} \neq 0$, $||\mathcal{P}|| = 1$. Sei $x \in \mathcal{H}, \ \mathcal{P}x \neq 0$. Nach Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$||\mathcal{P}x|| = \frac{\langle \mathcal{P}x, \mathcal{P}x \rangle}{||\mathcal{P}x||} = \frac{\langle x, \mathcal{P}^2 x \rangle}{||\mathcal{P}x||} = \frac{\langle x, \mathcal{P}x \rangle}{||\mathcal{P}x||} \leq ||x||$$

daher $||\mathcal{P}|| \leq 1$. Wenn $\mathcal{P} \neq 0$, $\exists x \in \mathcal{H}$ mit $\mathcal{P}x \neq 0$ und

$$||\mathcal{P}(\mathcal{P}x)|| = ||\mathcal{P}x|| \quad \Rightarrow \quad \frac{||\mathcal{P}(\mathcal{P}x)||}{||\mathcal{P}x||} = 1$$

dann $||\mathcal{P}|| \geq 1$. Damit $||\mathcal{P}|| = 1$.

Satz 4.67. *Seien V, W normierte Vektorräume und $A : V \to W$ lineare Abbildung. Die Abbildung A ist genau dann stetig, wenn A beschränkt ist.*

Beweis. $(\Leftarrow)$ Sei A beschränkt, d.h. $||Ax|| \leq c||x|| \ \forall x \in V$. Zu $v \in V$ und $\epsilon > 0$ wählt man $\delta := \epsilon/c$. Dann

$$||Ax - Av|| \leq c||x - v|| < c\delta = \epsilon \qquad \text{wenn } ||x - v|| < \delta.$$

Daher ist A stetig. $(\Rightarrow)$ Sei A stetig, insbesondere ist A stetig in 0. Dann existiert es zu $\epsilon = 1$ ein $\delta > 0$ mit

$$||Ay|| < 1 \qquad \text{für} \qquad ||y|| < \delta.$$

Ist $x \neq 0, \ x \in V$ so setzt man $y := \frac{\delta}{2||x||} x$, so $||y|| < \delta$. Dann ist $||Ay|| < 1$

$$\Rightarrow ||Ax|| = \left|\left| A\left(\frac{2||x||}{\delta} y \right) \right|\right|$$

und mit $c := 2/\delta$ folgt, dass A beschränkt ist. $\square$

Bemerkung 4.68. (1) Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Norm $||\cdot||$ und $\{b_1,\dots,b_n\}$ eine Basis. Eine Folge (v_k) aus V, mit $v_k=\sum_{i=1}^n a_{k,i}b_i,\ a_{k,i}\in\mathbb{C}$, konvergiert gegen $v=\sum_{i=1}^n a_ib_i\in V \quad\Leftrightarrow\quad (a_{ki})\to a_i \qquad \forall i=1,\dots,n$. Damit folgt: jede lineare Abbildung $A:V\to\mathbb{C}$ stetig ist. Weil: $Av\in\mathbb{C}$. Zu zeigen:

$$v_k\to v \quad\Rightarrow\quad Av_k\to Av\in\mathbb{C}$$

Aber

$$v_k\to v \quad\Rightarrow\quad a_{i,k}\to a_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^n a_{k,i}Ab_i\to\sum_{i=1}^n a_iAb_i$$

(2) Die Stetigkeit von A in unendliche-dimensionalen Fall ist nicht immer Wahr.

Satz 4.69. *(Hilfsatz) Ist V ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum und sind $b_1,\dots,b_n\in V$ linear unabhängig, so gibt es ein $c>0$, so dass $\forall x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$ gilt:*

$$\sum_{j=1}^n |x_j|\le c||\sum_{j=1}^n x_jb_j||$$

Beweis. Die Menge $M:=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n|x_j|=1\}$ im $\mathbb{R}^n$ ist kompakt. Dann die stetige Funktion $M\to\mathbb{R},\ x\mapsto||\sum_{j=1}^n x_jb_j||$ nimmt das Minimum $m\ge 0$ an. Da $b_1,\dots,b_n$ linear unabhängig sind, ist $m>0$ (Die Norm ist 0 $\Leftrightarrow\ x=0\ \Leftrightarrow\ x_j=0\ \forall j\ \Rightarrow x\notin M$) . Dann

$$||\sum_{j=1}^n x_jb_j||\ge m>0 \quad \text{für} \quad \sum_{j=1}^n|x_j|=1.$$

Sei $x\in\mathbb{R}^n,\ x\ne 0$ und $s:=\sum_{j=1}^n|x_j|>0$. Dann ist $\sum_{j=1}^n|x_j/s|=1$, daher folgt $||\sum_{j=1}^n\frac{x_j}{s}b_j||\ge m$. Man setzt $c:=1/m$, so folgt

$$s\le c||\sum_{j=1}^n x_jb_j||$$

□

Folgerung: Ist $\{b_1,\dots,b_n\}$ eine Basis von V, dann existiert es $c>0$ so dass für $v=\sum_{j=1}^n x_jb_j$ gilt

$$\sum_{i=1}^n|x_j|\le c||v||$$

d.h. bei endlich-dimensionalen normierten Vektorräumme Konvergenz $\Leftrightarrow$ komponentweiser Konvergenz.

Satz 4.70. *Sei V ein endlich-dimensionaler normierter Vektorraum, sei (v_k) eine Folge in V, $v\in V$. Ist dann $(b_1,\dots,b_n)$ eine Basis von V und ist $v_k=\sum_{j=1}^n x_j^{(k)}b_j,\ v=\sum_{j=1}^n x_jb_j$ so gilt*

$$\lim_{k\to\infty}v_k=v \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{k\to\infty}x_j^{(k)}=x_j,\quad j=1,\dots,n.$$

Beweis. (⇒) Aus $\lim_{k\to\infty} v_k = v$ und $\sum_{j=1}^n |x_j^{(k)} - x_j| \leq c||v_k - v||$ (Hilfsatz) folgt

$$\lim_{k\to\infty} x_j^{(k)} = x_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

(⇐) Wir setzen $r := \max\{||b_j|| \mid j = 1, \dots, n\}$. Wir haben $\forall \epsilon > 0$, $\exists N_j \in \mathbb{N}$ mit $|x_j^{(k)} - x_j| < \epsilon/nr$ wenn $k \geq N_j$. Wir setzen $N = \max N_j$. Dann

$$||v_k - v|| \leq \sum_{j=1}^n |x_j^{(k)} - x_j|||b_j|| \quad \leq \quad r\left(\sum_{j=1}^n \frac{\epsilon}{nr}\right) = \epsilon$$

für $j = 1, \dots, n$ und $k \geq N$. □

Satz 4.71. *Ist V ein endlich-dimensionaler normierter Vektorraum, so ist V ein Banachraum und jede lineare Abbildung $V \to W$ in einen normierten Vektorraum W ist stetig.*

Beweis. (a) Sei (v_k) eine Cauchy -Folge in V. Wählen wir eine Basis $(b_1, \dots, b_n)$ von V; für $k, m \in \mathbb{N}$ nach Proposition 4.69

$$\sum_{j=1}^n |x_j^{(k)} - x_j^{(\ell)}| \leq c||v_k - v_\ell|| < \epsilon \quad \forall k, \ell \geq \mathbb{N}.$$

Daher ist jede Folge $(x_j^{(k)})_k$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ und wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ gegen x_j konvergiert. Somit $\lim_{k\to\infty} v_k = \sum x_j b_j =: v$.
(b) Sei $A : V \to W$ linear. Es gibt ein $r > 0$ mit $(b_1, \dots, b_n)$ Basis von V

$$||Ab_1|| \leq r, \dots, ||Ab_n|| \leq r.$$

Für $v = \sum_{j=1}^n x_j b_j \in V$ ist Proposition 4.69:

$$||Av|| = ||\sum_{j=1}^n x_j Ab_j|| \leq r\sum_{j=1}^n |x_j| \leq r \cdot c||\sum_{j=1}^n x_j b_j|| = rc||v||$$

daher ist A beschränkt. □

Nun betrachten auch unendliche dimensionale Vektorräume.

Beispiel 4.72. Sei $I := [0, 2\pi]$, $V := \mathcal{C}^\infty(I)$ mit der Norm

$$||f||_I := \sup_{x\in I} |f(x)| \quad \text{für} \quad f \in V$$

Für $n \in \mathbb{N}$ setzt man $h_n : I \to \mathbb{R}$. $x \mapsto \frac{1}{n}\sin(n^2 x)$. Es ist

$$|h_n(x)| = |\frac{1}{n}\sin(n^2x)| \leq \frac{1}{n}, \qquad ||h_n||_I = 1/n, \qquad h_n'(x) = n\cos(n^2x), \quad ||\frac{d}{dx}h_n||_I = n,$$

dann $h_n(x) \to 0$ punktweise $\forall x \in [0, 2\pi]$ und $h_n'(x)$ konvergiert nicht , z. B. $h_n'(0) = n$. Somit ist die lineare Abbildung $\frac{d}{dx} : V \to V,\ f \mapsto \frac{d}{dx}f$ nicht stetig, weil die nicht beschränkt ist: $\nexists\, c > 0$ mit

$$||h_n'|| = n \leq c||h_n(x)|| = \frac{c}{n}$$

Nun behandeln komplexe Hilberträume $\mathcal{H}$ und lineare Abbildung über $\mathbb{C}$.

Definition 4.73. Eine lineare Abbildung $A : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ zeichnet man auch als lineares Funktional.

Beispiel 4.74. Sein $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $g \in \mathcal{H}$ ein festes Element. Die Abbildung

$$A: \quad \begin{aligned} \mathcal{H} &\to \mathbb{C} \\ f &\mapsto \langle g, f\rangle \end{aligned}$$

ist ein stetiges lineares Funktional (oder beschränkt) denn, nach der Cauchy-Schwarz Ungleichung $|\langle g, f\rangle| \leq ||g||||f||$ gilt

$$||A|| = \sup_{||f||=1} ||Af|| = \sup_{||f||=1} |\langle g, f\rangle| \leq \sup_{||f||=1} ||g||||f|| = ||g||.$$

Hauptsatz 4.75. *(Darstellungssatz von Riesz-Fréchet)*
Sein A ein beschränktes lineares Funktional im komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann gibt es genau ein $g \in \mathcal{H}$ mit

$$Af = \langle g, f\rangle \quad \forall f \in \mathcal{H}$$

und g heißt das erzeugende Element von A, es ist $||A|| = ||g||$

Beweis. Eindeutigkeit: Sei $g_1 \in \mathcal{H}$ andere Element mit dieser Eigenschaft. Dann

$$\langle g - g_1, f\rangle = \langle g, f\rangle - \langle g_1, f\rangle = Af - Af = 0, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Setzt man $f = g - g_1$ folgt $\langle g - g_1, g - g_1\rangle = 0$, daher $g - g_1 = 0$, d.h. $g = g_1$.
Existenz: Angenommen $A \neq 0$ (ansonsten $g = 0$). Dann $\operatorname{Ker} A \neq \mathcal{H}$. Da A stetig ist, ist $\operatorname{Ker} A$ abgeschlossen ($\operatorname{Ker} A = A^{-1}(0)$, $\{0\} \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen). Nach dem Zerlegungssatz $\mathcal{H} = (\operatorname{Ker} A) \oplus (\operatorname{Ker} A)^\perp$. Daher $\exists h \in (\operatorname{Ker} A)^\perp$ mit $||h|| = 1$. Man setzt $c := A(h) \in \mathbb{C}$. Dann gilt für jedes $f \in \mathcal{H}$:

$$A(c \cdot f - A(f) \cdot h) = cA(f) - A(f)A(h) = 0.$$

Dann $c \cdot f - A(f) \cdot h \in \operatorname{Ker} A$. Wegen $h \in (\operatorname{Ker} A)^\perp$ folgt:

$$0 = \langle h, cf - A(f)h\rangle = \langle h, cf\rangle - A(f)\langle h, h\rangle = c\langle h, f\rangle - A(f) = \langle \bar{c}h, f\rangle - A(f).$$

Somit $A(f) = \langle \bar{c}h, f\rangle \quad \forall f \in \mathcal{H}$. Man setzt $g := \bar{c}h$. Aus Cauchy-Schwarzen Ungleichung $|\langle g, f\rangle| \leq ||g||||f||$ folgt

$$||A|| \leq ||g||$$

Aus $Ag = \langle g, g\rangle$ d.h. $\frac{|Ag|}{||g||} = ||g||$ folgt $||A|| = ||g||$. □

Bemerkung 4.76. Satz 4.75 gilt auch für reelle Hilberträumen.

Beispiel 4.77. Sei $\mathcal{H} = L_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ und A ein stetiges lineares Funktional, dann existiert es ein eindeutiges $g \in L_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ so dass

$$Af = \int_{\mathbb{R}^n} f\bar{g}dx \quad f \in L_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$$

Wie in lineare Algebra hat man zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V den Dualraum V^*

$$V^* = \{f : V \to \mathbb{R} \;\mid\; f \text{ lineare Abbildung } \}$$

Bei einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ betrachtet man

$$\mathcal{H}^* = \{A : \mathcal{H} \to \mathbb{R} \;\mid\; A \text{ stetiges lineares Funktional } \}$$

(oder $\mathcal{H} \to \mathbb{C}$). $\mathcal{H}^*$ ist durch

$$||A|| := \sup_{f \in \mathcal{H} \setminus \{0\}} \frac{||Af||}{||f||}$$

einer normierter Raum. Die Abbildung

$$J : \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}, \quad A \mapsto g$$

durch dem Darstellungssatz definiert. Es ist

$$J(A_1 + A_2) = J(A_1) + J(A_2) \qquad J(\lambda A) = \bar{\lambda} J(A), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Auf Grund der Abbildung J kann man $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{H}^*$ identifizieren und man sagt, dass $\mathcal{H}$ zu sich selbst dual ist. Eigentlich haben gleichnorm, also isomorph als Banachräume.

Bemerkung 4.78. Der Dualraum von L_p, für $p \neq 2$ oder $\mathcal{C}^0([a,b])$ sind nicht isomorph zu dem originalen Raum. Allgemein: $\mathcal{B}$ ein Banachraum, $\mathcal{B} \nsim \mathcal{B}^*$.

Beispiel 4.79. *Anwendung in der Quantenmechanik.*
In Quantenmechanik die Observables (beobachtbar) eines Systems sind durch Elementen im einem Raum $\mathcal{A}$ von linear Operatoren in einem Hilbertraum dargestellt: $\mathcal{H}$

$$\textit{Observables} \quad \leftrightarrow \quad A \in \mathcal{A} := \{A : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \;\mid\; \text{ Operatoren } \}.$$

Ein Zustand (state) ω eines quantenmechaniken Systems ist ein lineares Funktional $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaften

- $\omega(A^*A) \geq 0$
- $\omega(I) = 1$, normalization.

Hier: $\omega(A)$ ist der Wert des Observables A in der Zustand ω des Systems. Z.B. $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ mit $\langle z, w \rangle = \sum \bar{z}_i w_i$, $\mathcal{A} = M_{n \times n}(\mathbb{C})$ ist ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$\langle A, B \rangle := Sp(A^*B)$$

wobei $A = (a_{ij})$ und $A^* = (\bar{a}_{ji})$ ist die transponiert konjugiert. Nach dem Riesz-Fréchet Darstellungssatz: für jedes Zustand ω existiert ein eindeutiges Element $\rho \in \mathcal{A}$ mit

$$\omega(A) = Sp(\rho^* A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

4.5. **Lineare Operatoren.**

Definition 4.80. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$, $\mathcal{D} \neq \{0\}$. Ein linearer Operator (oder lineare Transformation) T in $\mathcal{H}$ ist eine lineare Abbildung $T : \mathcal{D} \to \mathcal{H}$, wobei $\mathcal{D} = \mathcal{D}(T)$ heißt Definitionsbereich von T und $T(\mathcal{D}) = \mathcal{R}(T)$ ist der Wertbereich von T.

Beispiel 4.81. $\mathcal{H} = L_2([a,b])$, $\mathcal{D} = \mathcal{C}^0([a,b])$. Sei $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig (z.B. die Greensche Funktion zu einem Sturm-Liuoville Operator). Dann ist für $f \in \mathcal{D}$

$$(Tf)(x) = \int_a^x K(x,y)f(y)dy, \quad x \in [a,b].$$

Die Funktion Tf ist offensichtlich stetig also $Tf \in \mathcal{C}^0([a,b]) \subset \mathcal{H}$ und $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ ist linear. Weiter, ist T beschränkt:

$$\begin{aligned}
||Tf||_{L_2} = \left(\int_a^b \left|\int_a^x |K(x,y)f(y)|dy\right|^2 dx\right)^{1/2} &\leq \left(\int_a^b \left(\int_a^b |K(x,y)||f(y)|dy\right)^2 dx\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_a^b \left(\sup_{x,y\in[a,b]} |K(x,y)| \int_a^b |f(y)|dy\right)^2 dx\right)^{1/2} \\
&= \sqrt{b-a} \sup_{x,y\in[a,b]} |K(x,y)| \; ||f||_1 \\
&= (b-a) \sup_{x,y\in[a,b]} |K(x,y)| \; ||f||_2
\end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung folgt aus $||f \cdot g||_1 \leq ||f||_2 \; ||g||_2$, mit $g = 1$. dann gilt es

$$||T|| \leq \sup_{x,y\in[a,b]} |K(x,y)|(b-a).$$

Beispiel 4.82. Sei $\mathcal{H} = L_2([a,b])$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}(L) = \{u \in \mathcal{C}^2([a,b]) \mid u(a) = u(b) = 0\}$ und die Sturm-Liouville-Operator

$$Lf = (pf')' + qf, \quad f \in \mathcal{D}(L)$$

mit $p \in \mathcal{C}^1([a,b]),\ p > 0$ und $q \in \mathcal{C}^0([a,b])$. Dann ist $L : \mathcal{D} \to \mathcal{H}$ ein linearer Operator:

$$L(f+g) = (p(f+g)')' + q(f+g) = (pf')' + (pg')' + qf + qg = Lf + Lg, \quad L(\lambda f) = \lambda L(f).$$

Im Allgemeinen, ist dieser Operator nicht stetig.

Zum Beispiel, $Lf = f''$ (also $p \equiv 1,\ q \equiv 0$). Sei $f \in \mathcal{D}(L) = \{u \in \mathcal{C}^2([0,\pi]) \mid u(0) = u(\pi) = 0\}$. Für die Eigenfunktion $\sin kx,\ k \in \mathbb{N}$ zu den Eigenwerte k^2 gilt

$$\frac{||L(\sin kx)||_{L_2}}{||\sin kx||_{L_2}} = k^2,$$

so kann der Operator nicht beschränkt sein.

Hauptsatz 4.83. *(Fortsetzung durch Schließung) Sei $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein beschränkter linearer Operator in einem Hilbert space $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(T)$; $\mathcal{D}(T)$ sei dichter Teilraum von $\mathcal{H}$. Dann hat T eine und nur eine beschränkte Fortsetzung $\overline{T}$ auf $\mathcal{H}$. Weiter, $||T|| = ||\overline{T}||$.*

Beweis. Wir setzen $\mathcal{D} := \mathcal{D}(T)$. Da T beschränkt ist $\exists c > 0$ mit

$$||Tx|| \leq c||x|| \quad \forall x \in \mathcal{D}.$$

Sei $x \in \mathcal{H}$. Wegen $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{H}$ existiert eine Folge (x_n) in $\mathcal{D}$ die gegen x konvergiert. Insbesondere, ist (x_n) eine Cauchy-Folge. Wegen

$$||Tx_n - Tx_m|| \leq c||x_n - x_m||$$

ist (Tx_n) eine Cauchy Folge in $\mathcal{H}$. Wegen der Volllständigkeit von $\mathcal{H}$, (Tx_n) konvergiert und man setzt $\overline{T}(x) := \lim_{n\to\infty} Tx_n$. Ist auch (x'_n) eine Folge in $\mathcal{D}$ die gegen x konvergiert, dann $\lim_{n\to\infty}(x_n - x'_n) = 0$ und somit $\lim_{n\to\infty}(Tx_n - Tx'_n) = 0$. So ist $\overline{T}(x)$ unabhängig von der Wahl der Folge (x_n). So wir haben eine Abbildung $\overline{T} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ sinvoll definiert die auf $\mathcal{D}$ mit T überstimmt. $\overline{T}$ ist linear: Zu $x, y \in \overline{\mathcal{H}}$ wählt man die Folgen $(x_n), (y_n)$ in $\mathcal{D}$ mit $x_n \to x$ und $y_n \to y$. Dann ist

$$\overline{T}(\lambda x + \mu y) = \lim_{n\to\infty}(\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} x_n + \mu \lim_{n\to\infty} y_n = \lambda\overline{T}(x) + \mu\overline{T}(y).$$

Aus $||Tx_n|| \leq ||T|| \cdot ||x_n||$ für $x_n \in \mathcal{D}$ folgt $||\overline{T}x|| \leq ||T|| \cdot ||x||$ für $x \in \mathcal{H}$; somit $||\overline{T}|| \leq ||T||$. Da

$$\sup_{x\in\mathcal{H}\setminus\{0\}} \frac{||\overline{T}x||}{||x||} \geq \sup_{x\in\mathcal{D}\setminus\{0\}} \frac{||Tx||}{||x||},$$

$||\overline{T}|| \geq ||T||$ und damit $||\overline{T}|| = ||T||$. Weil es zu jedem $x \in \mathcal{H}$ eine Folge (x_n) in $\mathcal{D}$ gibt, die gegen x konvergiert, ist die stetige Fortsetzung $\overline{T}$ auf $\mathcal{H}$ eindeutig bestimmt.

□

Satz 4.84. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ beschränkter Operator mit $\mathcal{D} = \mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$. Dann $\exists T^*$ Operator in $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{H}$ und*

$$\langle x, Ty\rangle = \langle T^*x, y\rangle \qquad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

T^* ist beschränkt un es gilt $||T^*|| = ||T||$; T^* heißt die Adjungierte zu T. Außerdem gilt $T^{**} = (T^*)^* = T$.

Beweis. Sei $x \in \mathcal{H}$ fest aber beliebig. Dann ist $A_x(y) : \langle x, Ty\rangle$ ein lineares Funktional. Wegen

$$|A_x(y)| = |\langle x, Ty\rangle| \leq ||x||||Ty|| \leq ||x|| \cdot ||T|| \cdot ||y||$$

ist A_x ein beschränktes lineares Funktional in $\mathcal{H}$ mit $||A_x|| \leq ||T|| \cdot ||x||$. Nach dem Darstellunssatz 4.75 existiert ein eindeutiges Element $x^* \in \mathcal{H}$ mit

$$A_x(y) = \langle x, Ty\rangle = \langle x^*, Ty\rangle.$$

Wir definieren $T^*(x) := x^*$. Wegen der Eindeutigkeit von x^* und die Linearität des Skalarprodukts ist T^* linear.

Nun wenden wir den Satz zu T^* an. So existiert $(T^*)^*$ mit

$$\langle (T^*)^*x, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = \overline{\langle T^*y, x\rangle} = \overline{\langle y, Tx\rangle} = \langle Tx, y\rangle$$

$\forall x, y \in \mathcal{H}$, dann $(T^*)^* = T^{**} = T$.
Für jedes $x \in \mathcal{H}$ gilt:

$$||TX||^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle \leq ||TT^*x||\ ||x|| \leq ||T||\ ||T^*||\ ||x||^2.$$

Analog zeigt mann $||T^*|| \leq ||T||$. Dann ist $||T^*|| = ||T||$ □

Beispiel 4.85. *Fourier-Transformation*
Die Fourier- Transformation ist das Kontinuierliche Analogon zur Fourier-Reihe. Sei $f \in \mathcal{H} = L_2^{\mathbb{C}}([-\pi,\pi])$. Die Funktionen

$$\begin{aligned} b_n : [-\pi,\pi]) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{Z}$ bilden eine Hilbertbasis von $L_2^{\mathbb{C}}([-\pi,\pi])$. So für $f \in \mathcal{H}$ haben wir die Fourier-Entwicklung

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{c}_n e^{inx} \quad \text{mit} \quad \hat{c}_n := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

Man beweist

$$\langle b_k, b_l \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{ilx} dx = \delta_{kl}$$

Vergleich zwischen discret und kontinuierlich:

$$\begin{aligned} \text{Fourier Reihe} &\rightsquigarrow Fourier - Transformierte \\ n \in \mathbb{Z} &\rightsquigarrow \varepsilon \in \mathbb{R} \\ \hat{c}_n &\rightsquigarrow \hat{f}(\varepsilon) \\ \sum_n &\rightsquigarrow \int d\varepsilon \end{aligned}$$

Dann ist

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\varepsilon) e^{i\varepsilon x} d\varepsilon \qquad \hat{f}(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i\varepsilon x} dx.$$

Man bezeichnet $\hat{f}$ als die Fourier-Transformierte von f.

Definition 4.86. Sei $f \in L_1(\mathbb{R})$, dann definieren wir

$$\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \qquad y \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixy} dx$$

die Fourier-Transformierte von f.

Eigenschaften:

- $\hat{f}$ ist beschränkt : $|\hat{f}(y)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < +\infty, \quad f \in L_1(\mathbb{R})$.
- $\hat{f}$ ist stetig: $y_n \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ dann ist

  $$\hat{f}(y_n) - \hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} (e^{-ixy_n} - e^{-ixy}) f(x) dx$$

  Da $\lim_{n\to\infty}(e^{-ixy_n} - e^{-ixy}) f(x) = 0$, $\lim_{n\to\infty} \hat{f}(y_n) = \hat{f}(y)$.
- Umkehrformel: $f \in L_1(\mathbb{R})$ und $\hat{f} \in L_1(\mathbb{C})$, dann

  $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) e^{ixy} dy.$$

Sei $\mathcal{H} = L_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. Der Operator $T : L_1(\mathbb{R}) \to \mathcal{H}, f \mapsto \hat{f}$ ist linear und wegen der **Plancherel Gleichung**

$$||Tf||_2 = ||f||_2,$$

er st auch beschränkt. Sei

$$\mathcal{C}_0^\infty := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \ \mid \ f \text{ ist } \infty\text{-stetig differenzierbar mit kompakt Träger } \}.$$

Hier *kompakt Trager* bedeutet, dass die Menge $\{x \in \mathbb{R} \ \mid \ f(x) \neq 0\}$ ist kompakt. Insbesondere, ist $f \in \mathcal{C}_0^\infty$, dann $f \in L_1(\mathbb{R})$ (d.h. $\int_{\mathbb{R}} |f|dx < \infty$). Es gilt $\overline{\mathcal{C}_0^\infty} = \mathcal{H}$ ($\mathcal{C}_0^\infty$ ist dicht in $\mathcal{H}$). Nach dem Satz 4.83 existiert es ein eindeutige lineare Fortsetzung $\overline{T} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ von T die auch beschränkt ist. Aber es gibt keine allgemeine Formel für $\overline{T}$ da allgemein ist $|e^{-ixy}f(x)|$ über $\mathbb{R}$ nicht integrierbar.

Nach Satz 4.84 besitzt T eine Adjungierte $T* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ die auch einer beschränkter linearer Operator ist.

Wir wählen $f, g \in \mathcal{C}_0^\infty$. Es gilt

$$\langle Tf, g\rangle = \langle f, T^*g\rangle.$$

So

$$\begin{aligned}
\langle Tf, g\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(y)dy\right) g(x)}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overline{\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(y)\overline{g(x)}dy\right)}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overline{f} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{ixy} f(y)g(x)dx\right) dy \\
&= \langle f, T^*g\rangle.
\end{aligned}$$

Da $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ dichter Teilraum von $\mathcal{H}$ ist, dann jedes $f \in \mathcal{H}$ kann durch Funktionen aus $\mathcal{C}_0^\infty$ approximiert werden, d.h. $\exists f_n \in \mathcal{C}_0^\infty$ mit $f_n \to f$. Dann $\forall g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ gilt

$$0 = lim_{n\to\infty} \langle f_n, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} g(x)dx - T^*g\rangle = \langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} g(x)dx - T^*g\rangle$$

Dann ist

$$T^*g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} g(x)dx = \overline{T\overline{g}}.$$

Wir wenden wieder den Satz 4.83 um eine lineare beschränktere Fortsetzung $T^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ zu erhalten.

Definition 4.87. Sei H ein linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit dichtem Definitionsbereich $\mathcal{D}(H) \subset \mathcal{H}$. Für alle $f, g \in \mathcal{D}(H)$ sei

$$\langle Hf, g\rangle = \langle f, Hg\rangle,$$

dann heißt H hermitesch. Ist $\mathcal{D}(H) = \mathcal{H}$ so ist H selbstadjungiert.

Bemerkung 4.88. Einer selbstadjungiert Operator in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist beschränkt. Um dies zu zeigen, benutzen wir den Satz vom abgeschlossenen Graphen, der laut: Sei $A : X \to Y$ linear Operator zwischen Banach Räume. Dann ist A beschränkt (und somit stetig) $\Leftrightarrow$ A ein abgeschlossener Operator ist (d. h. der Graph $\Gamma(A) := \{(x, Ax) \ \mid \ x \in X\})$ abgeschlossen in

$X \times Y$).
Beweis: Sei $(x_n, Ax_n) \to (x, y)$ für $n \to \infty$. Z.z. $y \in A(X)$. Für alle $z \in \mathcal{H}$ gilt

$$\langle z, Ax - y\rangle = \langle z, Ax\rangle - \langle z, y\rangle = \langle Az, x\rangle - \langle z, y\rangle = \lim\langle Az, x_n\rangle - \lim\langle z, Ax_n\rangle = 0$$

damit ist $Ax = y$.

Definition 4.89. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, und $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{R}(T)$ ein bijektiver linearer Operator. Dann ist $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \to \mathcal{D}(T)$ der inverse Operator zu T. Man zeigt dass T^{-1} ein linear Operator ist mit $\mathcal{D}(T^{-1}) = \mathcal{R}(T)$ und $\mathcal{R}(T^{-1}) = \mathcal{D}(T)$.

Satz 4.90. *Kriterium von Toeplitz*
Ein beschränkter linerarer Operator T hat einen in $\mathcal{H}$ inversen beschränkten Operator $T^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H}$ (insbesondere $\mathcal{D}(T^{-1}) = \mathcal{R}(T) = \mathcal{H}$) $\Leftrightarrow$
(1) $\exists d > 0$ so dass $||Tx|| \geq d||x||, \quad \forall x \in \mathcal{H}$.
(2) Ist $T^*x = 0 \quad \Rightarrow x = 0$.

Beweis. Zuerst bemerkt man, dass Bedingung (2) äquivalent zu $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp = \{0\}$ ist. Weiter gilt, $(\operatorname{Im} T)^\perp = \{0\} \;\Leftrightarrow \overline{\operatorname{Im} \mathcal{H}} = \mathcal{H}$.

($\Rightarrow$) Angenommen $\mathcal{H} \neq \{0\}$ und T hat einen inversen beschränkten Operator T^{-1}. Da T surjektive ist, $(\operatorname{Im} T)^\perp = \operatorname{Ker} T^* = \{0\}$. Man setzt $d := ||T^{-1}||^{-1} > 0$. So $\forall x \in \mathcal{H}$ gilt

$$d||x|| = d||T^{-1}Tx|| \leq d||T^{-1}|| \cdot ||Tx|| = ||Tx||.$$

($\Leftarrow$) Man setzt $U := \operatorname{Im} T$. Es existiert $d > 0$ so dass $\forall\, x \in \mathcal{H}$, $x \neq 0$ gilt $||Tx|| \geq d||x|| > 0$. Dann $Tx \neq 0$ und somit $\operatorname{Ker} T = \{0\}$, d.h. T ist injektiv. Wir behaupten, dass U vollständig ist. Sei $(y_n) \subset U$ eine Cauchy Folge, so $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n$ mit $y_n = Tx_n$. Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert es $N \in \mathbb{N}$ mit $||y_n - y_m|| < d\epsilon \qquad \forall n, m \in \geq N$. Daher folgt

$$||x_m - x_n|| \leq \frac{||T(x_n - x_m)||}{d} = \frac{||Tx_n - Tx_m)||}{d} < \epsilon$$

so $(x_n) \subset \mathcal{H}$ ist Cauchy . Dann $\exists\; x = \lim_{n\to\infty} x_n$, so $y := Tx \in U$. Die Steigkeit von T liefert

$$y = Tx = T(\lim_{n\to\infty}) = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

und damit ist U vollständig. Insbesondere, ist U abgeschlossen und damit $\overline{U} = U = \mathcal{H}$. So ist T bijektive. Sei $S := T^{-1}$, dann gilt es

$$||Sx|| \leq \frac{||TSx||}{d} = \frac{||x||}{d}.$$

Daraus folgt S ist beschränkt mit $||S|| \leq \frac{1}{d}$. □

4.6. **Unitäre Operatoren.**

Definition 4.91. Ein $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ linearer Operator heißt unitär wenn er: (1) Isometrisch ist d.h $\forall x, y \in \mathcal{H}$ gilt $||Ux|| = ||x||$ und damit $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$;
(2) surjektiv ist.

Bemerkung 4.92. Ist U unitär, dann ist U bijektiv, dann $\exists U^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$:

$$Ux = Uy \Rightarrow \langle Ux, z\rangle = \langle Uy, z\rangle \ \forall z \in \mathcal{H}.$$

Da U surjektive ist

$$\langle Ux, Uw\rangle = \langle Uy, Uw\rangle \ \forall w \in \mathcal{H}.$$

Daraus folgt

$$\langle x, w\rangle = \langle y, w\rangle \ \forall w \in \mathcal{H} \ \to \ x = w$$

damit ist U injektiv. Aus $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ folgt

$$\langle U^{-1}x', U^{-1}y'\rangle = \langle x', y'\rangle$$

mit $Ux = x'$ und $Uy = y'$. Somit ist U^{-1} auch unitär.

Die Menge $\mathcal{U} := \{U : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \ | \ U \text{ unitär } \}$ ist eine Gruppe mit $\circ$.

Satz 4.93. *Sei U ein beschränkter linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{D}(U) = \mathcal{H}$. Es gilt*

$$U \text{ ist unitär} \quad \Leftrightarrow \quad U(U^*) = (U^*)U = Id.$$

Beweis. ($\Rightarrow$) Angenommen ist U unitär. Dann ist

$$\langle x, y\rangle = \langle Ux, Uy\rangle = \langle x, U^*Uy\rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{H},$$

daher $U^*U = Id$. Da U^{-1} unitär ist, folgt

$$\langle x, U^*y\rangle = \langle Ux, y\rangle = \langle U^{-1}Ux, U^{-1}y\rangle = \langle x, U^{-1}y\rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{H},$$

somit $U^* = U^{-1}$. Dann $UU^* = Id$.
($\Leftarrow$) Ist $U(U^*) = (U^*)U = Id$. Dann

$$\langle U^*x, U^*y\rangle = \langle UU^*x, y\rangle = \langle x, y\rangle \quad \text{und} \quad \langle Ux, Uy\rangle = \langle x, U^*Uy\rangle = \langle x, y\rangle$$

Somit sind U und U^* isometrisch. Nach Toeplitz Kriterium existiert es eine Inverse zu U ((1) $||U(x)|| = ||x||, \ \forall x \in \mathcal{H}$, (2) Ist $U^*x = 0$ dann $||U^*x|| = ||x|| = 0$ und damit $x = 0$). So ist U^* der zu U inverse Operator und es ist $\mathcal{D}(U^{-1}) = \mathcal{R}(U) = \mathcal{H}$, daher ist U surjektiv. ☐

Beispiel 4.94. Sei $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$, die Fourier-Transformierte $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ besitzt ein Inverse $T^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ und $T^{-1} = T^*$ auf $\mathcal{H}$. Nach dem Satz 4.93, T ist unitär.

4.7. **Schwache Konvergenz.** In $\mathbb{C}^n$ gilt das Häufungsstellenprinzip von Bolzano-Weierstrass: *Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen (mit unendliche vielen Gliedern) enthält eine konvergente Teilfolge*
oder
jede beschränkter Folge komplexer Zahlen hat einen Häufungspunkt
Man verallgemeinert den Satz zu $\mathbb{C}^n$ durch komponentweise Konvergenz. Erinnerung: einen Folge in $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ konvergiert genau dann, wenn jede Komponente konvergiert. In unendlich-dimensionaler Banachräume dies gilt nicht mehr.

Definition 4.95. Sei $\mathcal{B}$ ein Banchraum (über $\mathbb{C}$). Eine Folge (u_n) in $\mathcal{B}$ heißt *schwach konvergent*, wenn $(f(u_n))$ eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$ ist für jedes $f^* \in \mathcal{B}^*$.
Im Fall des Hilbertraums $\mathcal{H}$: $(x_n) \subset \mathcal{H}$ konvergert schwach gegen ein $x^* \in \mathcal{H}$, wenn $\forall y \in \mathcal{H}$ gilt

$$\langle x_n, y\rangle \to \langle x^*, y\rangle, \quad n \to \infty$$

(weil jedes Funktional in $\mathcal{H}$ ist auf der Form $x \mapsto \langle x, y\rangle$ für ein $y \in \mathcal{H}$).
Bezeichnung:

$$u_n \rightharpoonup u, \quad n \to \infty, \quad u_n \text{ ist schwach konvergent gegen } u.$$

Bemerkung 4.96. Konvergenz $\Rightarrow$ schwache Konvergenz

Beispiel 4.97. Sei $\ell_2 := \{x = (x_n) \subset \mathbb{C} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ Hilbertraum mit der Norm $||x|| = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{1/2}$. Sei $x^{(k)} = (x_n^{(k))}$ eine beschränkte Folge in ℓ_2 mit $||x^{(k)}|| \leq c$. $x^{(k)}$ schwach in ℓ_2 gegen $x^* = (x_n^*)$ konvergiert, wenn $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt

$$x_n^{(k)} = \langle x^{(k)}, e^k\rangle \to x_n^* \quad \text{als } k \to \infty.$$

wobei $e^k = (\delta_{nk})_{n\in\mathbb{N}} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ ist der Hilbertbasis von ℓ_2. Z. B. die Folge e^k konvergiert schwach gegen Null, da $\delta_{nk}) \to 0 \quad$ als $k \to \infty$. Aber $||e^k||_{\ell_2} = 1$, d.h. (e^k) konvergiert nicht gegen Null bzgl. der Norm in ℓ_2.

Substitut für das Häufungsstellenprinzip von Bolzano-Weierstrass:

Satz 4.98. *Jede beschränkte Folge im Hilbertraum enthält eine schwach konvergente Teilfolge*

Beweis. (Skizze) Sei (φ_n) eine beschränkte Folge und setzt $L = span\{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist für jedes $\psi \in \mathcal{H}$ die Folge $(\langle\psi, \varphi_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt (in $\mathbb{C}$) (nach Cauchy-Schwarz: $|\langle\psi, \varphi_n\rangle| \leq ||\psi||||\varphi_n|| \leq ||\psi||M$). Setzte $\psi = \varphi_1$ dann (nach Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{C}$) existiert eine Teilfolge $(\varphi_n^{(1)})$ von (φ_n) so dass $(\langle\varphi_1, \varphi_n^{(1)}\rangle)$ konvergiert. Davon $\exists$ Teilfolge $(\varphi_n^{(2)})$ so dass $(\langle\varphi_2, \varphi_n^{(2)}\rangle)$ konvergiert (wenn man $(\langle\varphi_2, \varphi_n^{(1)}\rangle)$ betrachtet). Diesen Prozess setzt man fort und erhält Teilfolgen $(\varphi_n^{(k)})$ von $(\varphi_n^{(k-1)})$ so dass $(\langle\varphi_k, \varphi_n^{(k)}\rangle)$ konvergiert. Für die Diagonalfolge $(\varphi_n^{(n)})$ gilt dann

$$(\langle\varphi_k, \varphi_n^{(n)}\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{konvergiert } \forall k \in \mathbb{N}$$

also, wegen der linearität des Skalarsprodukt, konvergiert $(\langle\varphi, \varphi_n^{(n)}\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $\varphi \in L$. Man muss noch beweisen, dass diese Folge auch für alle $\varphi \in \bar{L}$ konvergiert. Trivialweise konvergiert dann $(\langle\psi, \varphi_n^{(n)}\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $\psi \in \bar{L}^\perp$. Daraus folgt $(\varphi_n^{(n)})$ eine schwach konvergente Teilfolge der Folge (φ_n) ist. $\square$

Bemerkung 4.99. Man bemerkt dass $(\varphi_n^{(n)})$ eine schwache Cauchy Folge ist. Da jeder Hilbertraum schwach folgenvollsändig ist, ist $(\varphi_n^{(n)})$ konvergent.

4.8. Das Spektrum eines Operators in einem Banachraum.

Erinnerung: Ein Banach Raum über $\mathbb{R}$ bzgl. $\mathbb{C}$ ist ein normierter Vektorraum (über $\mathbb{R}$ bzgl. $\mathbb{C}$) der vollständig ist. Z.B. $L_p([a, b])$ mit der Norm $||f|| = (\int_a^b |f|^p)^{1/p}$ oder $\mathcal{C}^k([a, b])$ mit der Norm

$$||f|| = ||f||_J + ||f'||_J + \cdots + ||f^{(k)}||_J, \quad ||f||_J := \max_{x\in J} |f(x)|, \quad J = [a, b].$$

Satz 4.100. *Satz von Banach*
Sei $\mathcal{B}$ ein Banachraum, $T : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ beschränkter linearer Operator. Sei T bijektiv. Dann ist T^{-1} ein stetiger linearer Operator mit $\mathcal{D}(T) = \mathcal{B}$.

Die Operatoren, die Vorausetzungen dieses Satzes erfüllen, werden beschränkt invertierbar gennant.

Definition 4.101. Sei $\mathcal{B}$ ein Banachraum, wir definieren

$$\mathcal{L}(\mathcal{B}) := \{T : \mathcal{B} \to \mathcal{B}\} \mid \ \mathcal{D}(T) = \mathcal{B},\ T \text{ beschränkter Operator } \}$$

Wir beschäftigen uns mit der Frage: Wann ist $T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ invertierbar?
Bezeichnung: Für $S, T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$, $ST = S \circ T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ und $T^n = T \circ \cdots \circ T \in \mathcal{L}(\mathcal{B}),\ n \in \mathbb{N}$. Wir setzen $T^0 = Id$. Es gilt $||ST|| \leq ||S||||T||$ und $||T^n|| = ||T||^n$.

Motivation. Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$, de geometrische Reihe konvergiert: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$. Weil: $S_n := \sum_{k=0}^{\infty} x^k$, dann

$$(1-x)S_n = (1-x)(1 + x + \cdots + x^n) = 1 - x^{n+1} \quad \Rightarrow \quad S_n = \frac{1-x^n}{1-x}$$

Daher

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Analog haben wir:

Lemma 4.102. *Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$. Ist $||T|| < 1$ so ist $I - T$ beschränkt invertierbar und*

$$||(I-T)^{-1}|| \leq \frac{1}{1-||T||}$$

Beweis. Seien $x \in \mathcal{B}$, $M, N \in \mathbb{N}$ mit $M + 1 \leq N$. Die Folge (S_N) mit $S_N(x) := \sum_{n=0}^{N} T^n x$, ist wegen $||T|| < 1$ eine Cauchy Folge in $\mathcal{L}(\mathcal{B})$: für $\epsilon > 0$,

$$||(S_N - S_M)(x)|| = ||\sum_{n=M+1}^{N} T^n x|| \quad \leq \quad \sum_{n=M+1}^{N} ||T^n x|| \leq \sum_{n=M+1}^{N} ||T||^n ||x||$$

$$\Rightarrow \quad ||S_N - S_M|| \leq \sum_{n=M+1}^{N} ||T||^n < \epsilon \quad \forall N, M \geq N_0$$

Da $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ ein Banachraum ist (**??**), konvergiert die Folge S_N in $\mathcal{L}(\mathcal{B})$, d.h. $\exists \quad \lim_{N\to\infty} S_N = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$. Insbesondere gilt $\lim_{N\to\infty} T^n = 0$. Da $(I-T)S_N = S_N(I-T) = I - T^{N+1}$, folgt

$$I = \lim_{N\to\infty}(I - T^{N+1}) = \lim_{N\to\infty}(I-T)S_N = (I-T)\lim_{N\to\infty} S_N = (I-T)\sum_{n=0}^{\infty} T^n$$

also

$$(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Mit Hilfe der geometrischen Reihe, kann man die Norm von $(I-T)^{-1}$ beschränken. $\square$

Satz 4.103. *Seien $S, T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ und S beschränkt invertierbar. Sei*

$$||S - T|| < \frac{1}{||S^{-1}||}.$$

Dann ist auch T beschränkt invertierbar.

Beweis. Sei $Q := (S - T)S^{-1}$, dann ist $||Q|| < 1$. Nach Lemma 4.102, ist $I - Q$ beschränkt invertierbar. Mit $Q = I - TS^{-1}$, gilt es $TS^{-1} = I - Q$ und damit $T = (I - Q)S$. Daher folgt

$$||T|| \leq ||I - Q|| ||S|| < \infty \quad \text{und} \quad T^{-1} = S^{-1}(I - Q)^{-1}.$$

□

Definition 4.104. Für $T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ definiert man das *Spektrum von T*:

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ | \ T - \lambda I \text{ ist nicht bijektiv } \},$$

das *Punktspektrum von T*:

$$\sigma_P(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ | \ T - \lambda I \text{ ist nicht injektiv } \},$$

das *kontinuierliches Spektrum von T*:

$$\sigma_C(T) = \{\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p T \ | \ \overline{(T - \lambda I)(\mathcal{B})} = \mathcal{B}\},$$

und das *Restspektrum von T*:

$$\sigma_R(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ | \ T - \lambda I \text{ ist injektiv und } \overline{(T - \lambda I)(\mathcal{B})} \neq \mathcal{B}\}.$$

Das Element $\lambda \in \sigma T$ ist ein Spektralwert. Ist $\lambda \notin \sigma T$ so heißt $(T - \lambda I)^{-1}$ die *Resolvente von T an der Stelle $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Bemerkung 4.105. (1) Für $\lambda \in \sigma_P(T)$, ist $T - \lambda I$ nicht injektiv, so $\exists x \in \mathcal{B},\ x \neq$ mit $Tx = \lambda x$, somit ist $\sigma_P(T)$ die Menge aller Eigenwerte von T.
(2) Für $\lambda \in \sigma_C(T)$, ist $T - \lambda I$ injektiv aber nicht surjektiv und das Bild ist dicht in $\mathcal{B}$.
(3) Ist $T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$, dann $\sigma(T) = \sigma_P(T) \sqcup \sigma_C(T) \cup \sigma_R(T)$.

Satz 4.106. *Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$. Dann ist $\sigma(T)$ kompakt (in $\mathbb{C}$). Es gilt*

$$\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C} \ | \ |z| \leq ||T||\}$$

Beweis. $\sigma(T)$ ist abgeschlossen: Sei $\lambda_0 \notin \sigma(T)$, so ist $S = T - \lambda_0 I$ beschränkt und invertierbar. Für alle λ mit $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{||S^{-1}||}$ gilt

$$||T - \lambda_0 I - (T - \lambda I)|| = |\lambda - \lambda_0| ||I|| = |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{||S^{-1}||}$$

so, nach Satz 4.103, ist $T - \lambda I$ beschränkt und invertierbar. Daher folgt, dass $\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ offen ist (da $B_{\frac{1}{||S^{-1}||}}$ offen in $\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ ist). Somit ist $\sigma(T)$ ist abgeschlossen.
$\sigma(T)$ ist beschränkt: Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist $S = -\lambda I$ beschränkt und invertierbar, mit $S^{-1} = \frac{-1}{\lambda} I$. So $\frac{1}{S^{-1}} = |\lambda|$. Es ist

$$||S - (T - \lambda I)|| = ||T|| < \lambda = \frac{1}{||S^{-1}||}$$

und nach 4.103 ist $T-\lambda I$ beschränkt und invertierbar. Somit $\lambda \notin \sigma(T)$. Dann for alle $\lambda \in \sigma(T)$, $||T|| > |\lambda|$ und daher $\sigma(T)$ ist beschränkt. Dann ist $\sigma(T)$ kompakt. □

Beispiel 4.107. Der Hilbertraum $\mathbb{C}^n$ mit der kanonischen Norm $\langle z, w\rangle \sum \bar{z}_i w_i$. Sei $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ mit Eigenwerte $\lambda_1 \ldots, \lambda_n$. Sei $T_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $x \mapsto Ax$, so $T_A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Dann

$$\sigma(T_A) = \sigma_P(T_A) = \{\lambda_1, \lambda_n\} \quad \text{und} \quad \sigma_C(T_A) = \sigma_R(T_A) = \emptyset$$

Beispiel 4.108. Sei $\mathcal{H} = L_2([a, b])$ mit $||f|| = (\int |f|^2)^{1/2}$. Wir betrachten

$$(Tf)(x) = \int_a^b K(x, y)f(y)dy, \quad K \in \mathcal{C}^0([a, b] \times [a, b]),$$

$\lambda \in \mathbb{C}$ ist Eigenwert von T genau dann, wenn $\exists f \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ mit $\lambda f(x) = \int_a^b K(x, y)f(y)dy$ fast überall in $[a, b]$.

Beispiel 4.109. Sei $\mathcal{H} = \ell_2 = \{(x_n) \subset \mathbb{C} \mid \sum |x_n| < \infty\}$. Wir betrachten

$$T : \ell_2 \to \ell_2, \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, \ldots)$$

$T = T - 0I$ ist injektiv aber nicht surjektiv. Also $0 \in \sigma(T)$ und $0 \notin \sigma_P(T)$. Dann $0 \in \sigma(T) \setminus \sigma_P(T)$. Aber $0 \notin \sigma_C(T)$ da $||(1, 0, 0, \ldots) - (0, x_1, x_2, \ldots)|| \geq 1,\ \forall (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$. Daher folgt $(1, 0, 0, \ldots) \notin \overline{T(\mathcal{B})}$

Satz 4.110. *Sei $\mathcal{B}$ Banachraum endlicher Dimension. Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$. Dann ist*

$$\sigma(T) = \sigma_P(T) \quad \text{und} \quad \sigma_C(T) = \sigma_R(T) = \emptyset$$

Beweis. Wenn $T-\lambda I$ injektiv ist, dann ist $\dim(T-\lambda I)(\mathcal{B}) = \dim \mathcal{B}$. Dann ist $(T-\lambda I)(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$, also ist $T - \lambda I$ auch surjektiv. Daher ist $T - \lambda I$ beschränkt und invertierbar. □

4.9. **Kompakte Operatoren.**

Definition 4.111. Sei $\mathcal{B}$ ein Banachraum. Ein stetiger Linearer Operator $T : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ heißt kompakt (auch vollstetig) wenn für jede beschränkte Folge (x_n) in $\mathcal{B}$ gilt: (Tx_n) enthält eine konvergente Teilfolge.
Ein e Teilmenge $M \in \mathcal{B}$ ist kompakt wenn sie abgeschlossen ist und jede Folge aus M eine konvergente Folge besitzt.
M heißt präkompakt wenn $\overline{M}$ kompakt ist.

Satz 4.112. *Hilfsatz Sei $E = \{x \in \mathcal{B} \mid ||x|| \leq 1\}$. Ein stetiger linearer Operator $T : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ ist genau denn kompakt, wenn $\overline{T(E)}$ kompakt ist.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Angenommen $\overline{T(E)}$ nicht kompakt ist. Dann ist $T(E)$ nicht präkompakt, so $\exists (y_n) \subset T(E)$ Folge die keine Häufungspunkt besitzt (also kein konvergente Teilfolge). Wegen $y_n = Tx_n,\ x_n \in E,\ n \in \mathbb{N}$, ist T nicht kompakt.
($\Leftarrow$) Angenommen, $\overline{T(E)}$ kompakt ist. Sei $(x_n) \subset \mathcal{B}$ bescränkte Folge, dann $\exists M > 0$ mit $||x_n|| \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Wir setzen $x'_n = \frac{1}{M} x_n$, dann $||x'_n|| \leq 1$, so $(x'_n) \subset E$. Aus Voraussetzung $T(x'_n)$ hat einen Häufungspunkt in $\overline{T(E)}$. Daher $\exists (x'_{n_k})$ Teilfolge von (x'_n) mit

$$T(x'_{n_k}) \to y',\ k \to \infty \qquad \text{in } \overline{T(E)} \subset \mathcal{B}.$$

Dann $T(x_{n_k}) \to My',\ k \to \infty$ in $\mathcal{B}$. ☐

Beispiel 4.113. Sei $\ell_2 = \{(x_n) \subset \mathbb{R} \ \mid\ \sum |x_n|^2 < 0\}$, mit der Norm $||x||_{\ell_2} = (\sum |x_n|^2)^{1/2}$. Wir betrachten $T : \ell_2 \to \ell_2, \quad x \mapsto x$ ist nicht kompakt. Sei $x_n = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots)$. Die Folge (x_n) hat keinen Häufungspunkt weil $||x_n - x_m||_{\ell_2} = \sqrt{2}$ (So ist nicht Cauchy).

Satz 4.114. *Hilfsatz Sei* $K : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{C}$ *stetig. dann ist*

$$T : L_2([a, b]) \to L_2([a, b]), \qquad f \mapsto \int_a^b K(\cdot, f(s))ds$$

ein kompakter Operator in $\mathcal{H}$

Beweis. Sei (f_n) eine Folge in $L_2([a, b])$ mit $||f_n||_{L_2} \leq M,\ n \in \mathbb{N}$. Dann ist $Tf_n \in \mathcal{C}^0([a, b])$ (stetig) und $\max_{n\in\mathbb{N}} |Tf_n| \leq Kte \cdot M$.

Es kann gezeigt werden, dass (Tf_n) eine gleichmäßige in $[a, b]$ konvergente Teilfolge $Tf_{n_j} \to y$ enthält. Es ist $\mathcal{C}^0([a, b]) \subset L_2([a, b])$. Da

$$\exists c > 0,\ ||g||_{L_2} \leq c \cdot \max_{x\in[a,b]} |g(x)| = c \cdot ||g||_\infty$$

für alle $g \in C^0([a, b])$, dann (Tf_{n_j}) konvergiert auch in $L_2([a, b])$ ☐

Lemma 4.115. *Hilfstatz*
Sei $\mathcal{H}$ *ein Hilbertraum und* $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *ein kompakter Operator und*

$$E_\lambda = \mathrm{Ker}(T - \lambda I)$$

Eigenraum zu λ. *Dann gilt* $\dim E_\lambda < \infty$ *für* $\lambda \neq 0$.

Beweis. Angenommen $\dim E_\lambda = \infty$. Dann existiert eine Folge $(x_n) \subset E_\lambda$ so dass jeweils endliche viele der $x_1, x_2, x_3, \ldots$ linear unabhängig sind. Nach dem Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren existiert eine Folge $(b_n) \subset E_\lambda,\ n \in \mathbb{N}$ mit $b_n \perp b_m$, $n \neq m$ und $||b_n|| = 1$. Wir haben $Tb_n = \lambda b_n$. Für $n \neq m$:

$$||Tb_n - Tb_m|| = |\lambda| ||b_n - b_m|| = |\lambda| (\langle b_n - b_m, b_n - b_m \rangle)^{1/2} = |\lambda| \sqrt{2}.$$

Daher (Tb_n) enthält keinen Häufungspunkt und damit (Tb_n) enthält keine konvergente Teilfolge obwohl (b_n) beschränkt ist. Dies widerspricht der Kompaktheit von T.

☐

Satz 4.116. *Sei $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum und $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein kompakter linearer Operator. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es nur endliche viele unabhängig Eigenvektoren von T die zu Eigenwerten λ mit $|\lambda| > \epsilon$ gehören.*

Beweis. Seien $x_1, x_2, x_3, \ldots \in \mathcal{H}$ je endlich viele seien linear unabhängig. Es sei $Tx_n = \lambda_n x_n$, $n \in \mathbb{N}$. Wir werden zeigen , dass $\lambda_n \to 0$ für $n \to \infty$. Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren liefert: $e_1, e_2, \ldots$ die paarweise orthogonal sind und $||e_n|| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Man bemerkt: $e_1, e_2, \ldots$ sind im allgemeinen keine Eigenwerte.

1. Schritt: Wir zeigen dass $(T - \lambda_n I)e_n \perp e_n$. Das Verfahren liefert:

$$e_n \in Span\{x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$

dann $e_n = \sum_{\nu=1}^n c_\nu x_\nu$ für eine $c_\nu \in \mathbb{C}$. Sei $y_n := (T - \lambda_n I)e_n$. Es gilt

$$\begin{aligned} y_n &= (T - \lambda_n I)(\sum_{\nu=1}^n c_\nu x_\nu) \\ &= \sum_{\nu=1}^n (c_\nu T x_\nu - \lambda_n c_\nu x_\nu) \\ &= \sum_{\nu=1}^n c_\nu (\lambda_\nu - \lambda_n) x_\nu \\ &= \sum_{\nu=1}^{n-1} c_\nu (\lambda_\nu - \lambda_n) x_\nu, \end{aligned}$$

daraus folgt $y_n \in Span\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$. Nach Konstruktion $e_n \perp x_i$, $i \leq n-1$, dann $e_n \perp (T - \lambda_n I)e_n$. Das heißt $\langle e_n, Te_n - \lambda_n e_n \rangle = 0$ und damit

$$\lambda_n = \langle Te_n, e_n \rangle. \tag{4.1}$$

Nach der Bessel'schen Ungleichung, für alle $x \in \mathcal{H}$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq ||x||^2.$$

Insbesondere, $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, e_n \rangle|^2$ konvergiert und daher

$$0 = \lim_{n \to \infty} \langle x, e_n \rangle, \quad \forall x \in \mathcal{H} \tag{4.2}$$

2. Schritt: Wir zeigen $\lim_{n\to\infty} ||Te_n|| = 0$. Angenommen $||Te_n||$ konvergiert nicht gegen 0 für $n \to \infty$. Wegen der Kompaktheit von T existiert eine Teilfolge (e_{n_k}) von (e_n) mit

$$Te_{n_k} \to f, \quad k \to \infty$$

für ein $f \in \mathcal{H}$ mit $||f|| \neq 0$, denn: man wählt die Elementen aus (Te_n) mit $||Te_{n_k}|| \geq \epsilon > 0$ ($\exists \epsilon > 0 sodass ||Te_n|| \geq \epsilon$ für unendlichen viele $n \in \mathbb{N}$). Dann ist

$$\begin{aligned} ||f||^2 = \langle \lim_{k\to\infty} Te_{n_k}, f \rangle &= \lim_{k\to\infty} \langle Te_{n_k}, f \rangle \\ &= \lim_{k\to\infty} \langle e_{n_k}, T^* f \rangle = 0 \end{aligned}$$

nach (4.2), ein Widerspruch zu $f \neq 0$. Dies zeigt $\lim_{n\to\infty} ||Te_n|| = 0$.

3. Schritt: Zu zeigen $|\lambda_n| \leq ||Te_n||$, $n \in \mathbb{N}$. Wir haben nach (4.1) $\lambda_n = \langle Te_n, e_n \rangle$. Dann folgt

$$|\lambda_n| = |\langle Te_n, e_n \rangle| \leq ||Te_n|| ||e_n|| = ||Te_n||.$$

Aus $|\lambda_n| \leq ||Te_n||$ und $||Te_n|| \to 0$, $n \to \infty$ folgt der Satz, d.h. $\lambda_n \to 0$ für $n \to \infty$. Mit andere Wörter: $\forall \epsilon > 0$ gibt es nur endliche viele EV zu λ mit $|\lambda| > \epsilon$. □

Beispiel 4.117. Sei $\mathcal{H} = \ell_2$, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ definert durch

$$\begin{aligned} T : \ell_2 &\to \ell_2 \\ (x_1, x_2, \ldots) &\mapsto (0, x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \ldots) \end{aligned}$$

T ist linear und beschränkt:

$$||Tx||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x_n}{n}\right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = ||x_n||^2 \leq \infty$$

T ist kompakt: Sei $(x^{(n)}) \subset \ell_2$ Folge mit $||x(n)|| \leq M,\ n \in \mathbb{N}$, $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots)$. Von Satz 4.98 existiert eine Teilfolge $(x^{(n_k)})$ von $(x^{(n)})$ so dass $x^{(n_k)} \rightharpoonup x^*$, $k \to \infty$. Dann ist $||x^*|| \leq M$ und komponentweise konvergiert: $x_j^{(n_k)} \to x_j^*$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Wegen

$$\begin{aligned} ||Tx^{(n_k)} - Tx^*||^2 &\leq \sum_{j=1}^{N} |x_j^{n_k} - x_j^*|^2 + \frac{1}{N^2} \sum_{j=N+1}^{\infty} |x_j^{(n_k)} - x_j^*|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{N} |x_j^{n_k} - x_j^*|^2 + \frac{1}{N^2} 2M^2 \leq \epsilon. \end{aligned}$$

folgt $Tx^{(n_k)} \to Tx^*$, $k \to \infty$. Dann ist T kompakt. Sei $Tx = \lambda x$. Falls $\lambda = 0$, $x_1 = 0, \frac{x_2}{2} = 0, \ldots, \frac{x_n}{n} = 0, \ldots$, daher $x = 0$ und damit ist λ keine EW. Falls $\lambda \neq 0$, $\lambda x_1 = 0, x_1 = \lambda x_2, \ldots, \frac{x_i}{i} = \lambda x_{i+1}$, $i \geq 1$. Es folgt $x = 0$ und $T - \lambda I$ ist injektiv für alle λ. Daher $\sigma_P(T) = \emptyset$. Andererseits ist $0 \in \sigma(T)$ weil $T = T - 0 \cdot I$ ist nicht surjektiv. Sei $\lambda \neq 0$ und $S = T - \lambda I$. Also ist

$$Sx = (0 - \lambda x_1, x_1 - \lambda x_2, \ldots, \frac{x_n}{n} - \lambda x_{n+1}, \ldots)$$

Setzt $x_1 = \frac{-y_1}{\lambda}, \ldots, x_{n+1} = \frac{-1}{\lambda}(y_{n+1} - \frac{x_n}{n}), \ldots$, mit $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) \in \ell_2$ beliebig.
Zu zeigen: $(x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$.

Insbesondere folgt S surjektiv ist. Dann $\sigma(T) = \{0\}$ und $0 \notin \sigma_c(T)$ weil $\overline{T(\mathcal{H})} \neq \mathcal{H}$ denn

$$||(1, 0, 0, \ldots) - Tx|| \geq 1 \qquad \forall x \in \ell_2$$

d.h. $(1, 0, 0, \ldots) \notin \overline{T(\mathcal{H})}$

4.10. **Selbstadjungierte kompakte Operatoren im Hilberträume.** Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum.

Bemerkung 4.118. Jeder selbstadjungierter Operator $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ist beschränkt. Für den Beweis, kann man den Satz vom abgeschlossenen Graph:

Satz 4.119. *Sei $T : X \to Y$ linear Operator, X, Y Banachräume. Dann:*

$$T \text{ ist beschränkt} \quad \Leftrightarrow \quad T \text{ ist ein abgeschlossener Operator}$$

Es reicht zu zeigen: der Graph $\Gamma(T) = \{(x, Tx) \ \mid \ x \in X\} \subset X \times Y$ ist abgeschlossen. Sei $(x_n, Tx_n) \to (x, y)$ für $n \to \infty$. Für alle $z \in \mathcal{H}$ gilt

$$\begin{aligned} \langle z, Tx - y \rangle &= \langle z, Tx \rangle - \langle z, y \rangle \\ &= \langle Tz, x \rangle - \langle z, y \rangle \\ &= \langle Tz, \lim_{n \to \infty} x_n \rangle - \langle z, \lim_{n \to \infty} Tx_n \rangle \\ &= \lim_{n \to \infty} \langle Tz, x_n \rangle - \lim_{n \to \infty} \langle z, Tx_n \rangle = 0 \end{aligned}$$

Dann $Tx = y$ und damit ist T beschränkt.

Bemerkung 4.120. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein EW eines selbstadjungiertes Operators T. Dann $\exists x \neq 0$, $x \in \mathcal{H}$ mit

$$\lambda ||x||^2 = \langle x, \lambda x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \langle Tx, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \bar{\lambda} ||x||^2.$$

Daher ist $\lambda = \bar{\lambda}$ und damit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Lemma 4.121. *Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ selbstadjungiertes Operator. Dann ist*

$$||T|| = \sup_{||x|| \leq 1} |\langle Tx, x \rangle|$$

Beweis. Die Ungleichung „$\geq$“ ist klar: $|\langle Tx, x \rangle| \leq ||Tx|| \cdot ||x|| \leq ||T||$.
Für „$\leq$“: Sei $M = \sup_{||x|| \leq 1} |\langle Tx, x \rangle|$. Aus $T = T^*$ folgt

$$\begin{aligned} \langle T(x+y), x+y \rangle - \langle T(x-y), x-y \rangle &= 2\langle Tx, y \rangle + 2\langle Ty, x \rangle \\ &= 2\langle Tx, y \rangle + 2\overline{\langle x, Ty \rangle} \\ &= 4\mathrm{Re}\langle Tx, y \rangle. \end{aligned}$$

Dann gilt es:

$$\begin{aligned} 4|\mathrm{Re}\langle Tx, y \rangle| &\leq |\langle T(x+y), x+y \rangle| + |\langle T(x-y), x-y \rangle| \\ &\leq M||x+y||^2 + M||x-y||^2 \\ &= 2M(||x||^2 + ||y||^2) \end{aligned}$$

Daher $\mathrm{Re}\langle Tx, y \rangle \leq M, \ \forall x, y$ mit $||x|| = ||y|| = 1$. Nach Multiplikation mit $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$ erhält man $|\langle Tx, y \rangle| \leq M, \ \forall x, y$ mit $||x|| = ||y|| = 1$. Daher folgt

$$||Tx|| = |\langle Tx, \frac{Tx}{||Tx||} \rangle| \leq M \quad \forall x \in \mathcal{H}, \ ||x|| = 1.$$

□

Als Korollar des Lemmas erhält man:

Satz 4.122. *Hilfsatz Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ sebstadjungierter Operator. Sei $c > 0$ mit*

$$|\langle Tx, x \rangle| \leq c||x||^2 \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

Dann $||T|| \leq c$

Dieser Satz vermittelt ein Verfahren zur Konstruktion der EW von $T \neq 0$, für T selbstadjungiert.

Satz 4.123. *Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ sebstadjungiert und kompakt. Dann ist $||T||$ oder $-||T||$ ein Eigenwert von T.*

Beweis. Angenommen $T \neq 0$. Sei $0 < c < ||T||$. Aus Satz 4.122 folgt nicht für alle $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ gilt die Ungleichung

$$|\langle Tx, x\rangle| \leq c||x||^2$$

dann existiert zu $c_n = ||T|| - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ mit $||x_n|| = 1$ und $c_n < |\langle Tx_n, x_n\rangle|$. Es gilt

$$\begin{aligned}
&|\langle Tx_n, x_n\rangle| \leq ||Tx_n||||x_n|| \leq ||T|| \\
\Rightarrow\ & \lim_{n\to\infty}(||T|| - \frac{1}{n}) \leq \lim_{n\to\infty}|\langle Tx_n, x_n\rangle| \leq ||T|| \\
\Rightarrow\ & \lim_{n\to\infty}|\langle Tx_n, x_n\rangle| = ||T||
\end{aligned}$$

Nach Übergang zu eine konvergierte Teilfolge von $(\langle Tx_n, x_n\rangle)$ (diese ist beachräkt in $\mathbb{R}$), die wie wieder mit $(\langle Tx_n, x_n\rangle)$ bezeichnen, haben wir

$$\lim_{n\to\infty}\langle Tx_n, x_n\rangle = \lambda$$

mit $\lambda = ||T||$ oder $\lambda = -||T||$. Da T kompakt ist, kann man eine Teilfolge von $(\langle Tx_n, x_n\rangle)$ wählen so dass $y := \lim_{n\to\infty} Tx_n$ existiert. Dann ist

$$\begin{aligned}
0 &\leq ||Tx_n - \lambda x_n||^2 = \langle Tx_n - \lambda x_n, Tx_n - \lambda x_n\rangle \\
&= ||Tx_n||^2 - 2\lambda\langle Tx_n, x_n\rangle + \lambda^2 \\
&\leq ||T||^2 + \lambda^2 - 2\lambda\langle Tx_n, x_n\rangle \\
&= 2\lambda^2 - 2\lambda\langle Tx_n, x_n\rangle.
\end{aligned}$$

Wegen $\lim_{n\to\infty}\langle Tx_n, x_n\rangle = \lambda$, folgt

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}||Tx_n - \lambda x_n|| \leq \lim_{n\to\infty}(2\lambda^2 - 2\lambda\langle Tx_n, x_n\rangle)^{1/2} = 0$$

Dann $\lim_{n\to\infty}||Tx_n - \lambda x_n|| = 0$ und damit

$$\lim_{n\to\infty}\lambda x_n = \lim_{n\to\infty}Tx_n = y \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty}x_n = x \ \text{ mit } x = \frac{y}{\lambda}.$$

Nach der Stetigkeit von T

$$Tx = T(\lim_{n\to\infty}x_n) = \lim_{n\to\infty}Tx_n = y = \lambda x \quad x \neq 0$$

(weil $||x_n|| = 1$). Daher ist λ ein Eigenwert. □

Konstruktion der Eigenwerte von T:

1. Schritt: Man bestimmt $u_1 \in \mathcal{H}$ mit $||u_1|| = 1$ und

$$\langle Tu_1, u_1\rangle = \max\{\langle Tx, x\rangle \ \mid\ x \in \mathcal{H},\ ||x|| = 1\}.$$

Das Maximum ist erreicht da $E = \{x \in \mathcal{H} \ \mid\ ||x|| = 1\}$ kompakt ist und $x \mapsto \langle Tx, x\rangle$ stetig ist. Dann ist nach Lemma 4.121 $Tu_1 = \lambda_1 u_1$ mit

$$|\lambda_1| = \max\{|\langle Tx, x\rangle| \ \mid\ x \in E\} = ||T||.$$

(vorheriger Satz sagt dass dies ein EW ist).

2. Schritt: Setzt $M_1 := \{\lambda u_1 \mid \lambda\mathbb{C}\}$ der von u_1 aufgespannt abgeschlossener Teilraum. Setzt man $\mathcal{H}_1 = M_1^\perp$. Dann ist $T(\mathcal{H}_1) \subset \mathcal{H}_1$ denn $\forall x \in \mathcal{H}_1,\ \forall u \in M_1$ gilt

$$\langle Tx, u\rangle = \langle x, Tu\rangle = \langle x, T(\lambda u_1)\rangle = \lambda\lambda_1\langle x, u_1\rangle = 0.$$

Dann $Tx \perp u$. Falls $\mathcal{H}_1 \neq \{0\}$ wendet man 1. Schritt an zu $\mathcal{H}_1$. Da $T_| : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ beschränkt und selbstadjungiert ist findet man einen Eigenwert λ_2 mit $|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$ und auf diese weise fährt man fort.

Hauptsatz 4.124. *Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren*

Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ sebstadjungiert und kompakt, $T \neq 0$. Dann hat T

- *endliche viele EW:*
$$||T|| = |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_N|$$
oder
- *abzählbar unendlich viele EW $\lambda_n \neq 0$:*
$$||T|| = |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots$$

wobei jeder EW wird so notiert wie seine endliche Vielfachheit angibt. Es gibt ein Orthonormalsystem $\{u_1, \ldots, u_N\}$, bzw. $\{u_1, u_2, \ldots\}$ in $\mathcal{H}$ mit $Tu_n = \lambda u_n$ so dass $\forall x \in \mathcal{H}$

$$x = \sum_{n=1}^{N} a_n u_u + x_0 \quad \text{bzw} \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_u + x_0,$$

mit $a_n = \langle x, u_n\rangle$ und $x_0 \in \operatorname{Ker} T$. Es ist $\operatorname{Ker} T = (span\{u_1, u_2, \ldots\})^\perp$ und

$$Tx = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n a_n u_n \quad \text{bzw} \quad Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n u_n.$$

Wenn abzählbar unendlich viele EW $\lambda_n \neq 0$ gibt dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0.$$

Ist $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ so bilden $u_1, u_2, \ldots$ eine Hilbertbasis.

Beweis. Wir beweisen den Satz im Fall der unendliche viele EW. Wie vorher konstruieren wir λ_1 mit $\lambda_1 = ||T||$, λ_2 mit $|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$ usw. Sei $k_n = \dim E_{\lambda_n} < \infty$ (nach Satz 4.115). Wir wählen in E_{λ_n} eine Orthonormalbasis $\{u_1^{(n)}, \ldots, u_{k_n}^{(n)}\}$ aus EV zum λ_n. Weil Eigenvektoren zu verschiedenen EW zu einander orthogonal sind, bilden

$$\begin{aligned}
&u_1 = u_1^{(1)}, \ldots, u_{k_1} = u_{k_1}^{(1)},\\
&u_{k_1+1} = u_1^{(2)}, \ldots, u_{k_1+k_2} = u_{k_2}^{(2)},\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

ein Orthonormalsystem. Sei $\tilde{\mathcal{H}}_1 = \overline{span\{u_j \mid j \in \mathbb{N}\}}$ (Hilbertraum) so $\{u_1, u_2, \ldots\}$ bilden einer Hilbertbasis in $\tilde{\mathcal{H}}_1$. Der Zerlegungsatz liefert

$$\mathcal{H} = \tilde{\mathcal{H}}_1 \oplus \tilde{\mathcal{H}}_1^\perp.$$

Sei $x \in \tilde{\mathcal{H}}_1^\perp$. Wegen $\langle u_n, Tx\rangle = \mu\langle u_n, x\rangle = 0$, mit $\mu \in \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$, haben wir $Tx \in \tilde{\mathcal{H}}_1^\perp$. Dann $T(\tilde{\mathcal{H}}_1^\perp) \subseteq \tilde{\mathcal{H}}_1^\perp$. Damit ist $T_0 := T_{|\tilde{\mathcal{H}}_1^\perp} : \tilde{\mathcal{H}}_1^\perp \to \tilde{\mathcal{H}}_1^\perp$ aus $\mathcal{L}(\tilde{\mathcal{H}}_1^\perp)$ kompakt und selbstadjungiert. Zu zeigen ist $T_0 = 0$, d.h. $\tilde{\mathcal{H}}_1^\perp = \operatorname{Ker} T$. Nach Wiederspruch: Angenommen $T_0 \neq 0$. Dann hat T_0 ein EW $\mu \neq 0$, d.h. $\exists x \in \tilde{\mathcal{H}}_1^\perp$ mit $Tx = \mu x$.

Ist $\mu \in \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ dann ist $x \in \tilde{\mathcal{H}}_1$ und wegen $\tilde{\mathcal{H}}_1 \cap \tilde{\mathcal{H}}_1^\perp = \{0\}$, ist $x = 0$, ein Wiederspruch. Dann $\mu \notin \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$. Wir haben gezeigt dass $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, daher folgt $\exists j \in \mathbb{N}$ mit

$$|\lambda_j| \geq |\mu| > |\lambda_{j+1}|.$$

Aus dem vorherigen Verfahren setzen wir $M_1 = \{\lambda u_1 \mid \lambda \in \mathbb{C}\} = \langle u_1 \rangle$, $M_2 = \{\lambda u_2 \mid \lambda \in \mathbb{C}\} = \langle u_2 \rangle$ usw. Wir setzen $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$. Sei

$$|\lambda_j| = \max\{|\langle Ty, y\rangle| \mid y \in \mathcal{H}_{j-1}, ||y|| = 1\}$$

Dann

$$\mathcal{H} = M_1 + M_2 + \cdots + M_{j-1} + \mathcal{H}_{j-1}$$

mit paarweise orthogonalen abgeschlossenen Teilräume $M_1, \ldots, M_{j-1}, \mathcal{H}_{j-1}$. Ist $x \neq 0$ das Element aus $\mathcal{H}$ mit $Tx = \mu x$. Dann

$$x = \sum_{k=1}^{j-1} x_k + h_{j-1}, \qquad x_k \in M_k,\ 1 \leq k \leq j-1,\ h_{j-1} \in \mathcal{H}_{j-1}.$$

Aus der Orthogonalität der Eigenräume folgt $\langle x, x_k\rangle = 0,\ 1 \leq k \leq j-1$; nach Konstruktion $\langle h_{j-1}, x_k\rangle = 0,\ 1 \leq k \leq j-1$. Daraus folgt $x_k = 0$ für alle $1 \leq k \leq j-1$, so $x = h_{j-1} \in \mathcal{H}_{j-1}$. Wir haben dann die Zerlegung

$$\mathcal{H}_{j-1} = M_j + \mathcal{H}_j \quad \mathcal{H}_j := (M_j)^\perp$$

und damit $x = x_j + h_j$, mit $x_j \in M_j$, $h_j \in \mathcal{H}_j$. Es gilt

$$Tx = Tx_j + Th_j = \lambda_j x_j + Th_j = \mu x = \mu x_j + \mu h_j.$$

Aus $Th_j \in \mathcal{H}_j = M_j^\perp$ (denn: $\langle Th_j, \alpha u_j\rangle = \langle h_j, \alpha T u_j\rangle = \langle h_j, \alpha\lambda_j u_j\rangle = 0$) folgt $\lambda_j x_j = \mu x_j$ (und $Th_j = \mu h_j$), d.h. $(\lambda_j - \mu)x_j = 0$, so $x_j = 0$. Dann $x = h_j \in \mathcal{H}_j$ aber Daher $x = 0$ und damit T_0 besitzt keine EW verschiedene von Null. Nach Satzt 4.123 $||T_0|| = 0$, so $T_0 = 0$ und $\tilde{\mathcal{H}}_1^\perp \subset \operatorname{Ker} T$. Wir haben dann

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n + x_0, \quad x_0 \in \tilde{\mathcal{H}}_1^\perp$$

und daher $Tx = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n a_n u_n$. Es bleibt zu zeigen $\operatorname{Ker} T \subset \tilde{\mathcal{H}}_1^\perp$. Angenommen $Tx = 0$, dann

$$0 = \langle Tx, u_n\rangle = \langle x, Tu_n\rangle = \langle x, \lambda_n u_n\rangle = \lambda_n \langle x, u_n\rangle.$$

Wegen $\lambda_n \neq 0$, $\langle x, u_n\rangle = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. So $x \in \tilde{\mathcal{H}}_1^\perp$ und damit $\tilde{\mathcal{H}}_1^\perp = \operatorname{Ker} T$. □

Korollar 4.125. *Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert. Dann ist $\sigma(T) \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Sei $z \in \mathbb{C}$ und $z \in \sigma(T)$. Dann ist $T - zI$ nicht bijektiv.

$$\operatorname{Im}(\langle (T - zI)x, x\rangle) = \operatorname{Im}(\langle Tx, x\rangle - \bar{z}\langle x, x\rangle) = \operatorname{Im}(-\bar{z}\langle x, x\rangle) = (\operatorname{Im} z)||x||^2.$$

Dann gilt

$$|\operatorname{Im} z| ||x||^2 \leq |\langle (T - zI)x, x\rangle| \leq ||(T - zI)x|| ||x||$$

und auch $(T - zI)^* = T - \bar{z}I$. Ist $\operatorname{Im} z \neq 0$, dann $|\operatorname{Im} z| > 0$. Ist $(T - zI)^* f = 0$, dann $f = 0$. Nach Toeplitz Kriterium folgt dass $T - zI$ ist beschränkt invertierbar, somit $z \notin \sigma(T)$.

□

Korollar 4.126. *Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kompakt und selbstadjungiert. Sei $0 \notin \sigma_P(T)$. Es gebe unendlich viele EW $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ von T. Dann ist $0 \in \sigma_c(T)$.*

Beweis. Aus Satz 4.124 folgt $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Aus Satz ...

$$\sigma T = \sigma_p(T) \sqcup \sigma_c(T) \sqcup \sigma_r(T)$$

und man kann annehmen dass $0 \in \sigma_r(T)$ d.h. das Bild von T ist nicht dicht in $\mathcal{H}$. Aber $\mathcal{R}(T) = \operatorname{Im} T$ ist dicht in $\mathcal{H}$ da die Eigenvektoren $u_1, u_2, \ldots$ zu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ in $\mathcal{R}(T)$ liegen ($u_n = T(\frac{u_n}{\lambda_n})$) und nach 4.124 eine Hilbertbasis bilden. Daher folgt $0 \in \sigma_c(T)$ □

5. Integralgleichungen

Sei $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig, $\mathcal{H} = L_2([a,b])$ und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kompakt Operator:

$$Tf(x) = \int_a^b K(x,y) f(y) dy \quad f \in \mathcal{H}.$$

Lemma 5.1. *Sei $K(s,t) = \overline{K(t,s)}$ für $a \le s, t \le b$. Dann ist T hermetisch oder selbstadjungiert ($\mathcal{D}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$).*

Beweis.

$$\begin{aligned} \langle Tf, g\rangle &= \int_a^b (Tf)\bar{g} = \int_a^b \bar{g}(x) \int_a^b K(x,y) f(y) dy dx \\ &= \int_a^b \int_a^b \bar{g} K(x,y) f(y) dy dx = \int_a^b f(y) \left(\overline{\int_a^b g \overline{K(x,y)} f(y) dx} \right) dy \\ &= \langle f, T^* g\rangle \end{aligned}$$

Dann

$$T^* g(y) = \int_a^b \overline{K(x,y)} g(x) dx$$

□

Satz 5.2. *Sei $g \in \mathcal{H} = L_2([a,b])$ und $K(s,t) = \overline{K(t,s)}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann gilt die Integralgleichung*

$$f(s) = \lambda \int_a^b K(s,t) f(t) dt + g(s) \tag{5.1}$$

- *wenn $1/\lambda$ kein EW von T ist, dann besitzt (5.1) genau eine Lösung für jedes $g \in \mathcal{H}$.*
- *wenn $1/\lambda$ ein EW von T ist, dann ist (5.1) genau lösbar wenn $g \in E_{1/\lambda}^{\perp}$. In diesem Fall gibt es unendlich viele Lösung.*

Beweis. Wir haben $f = \lambda T f + g \Leftrightarrow (I - \lambda T) f = g \Leftrightarrow (-\lambda)(T - \lambda^{-1} I) f = g$ zu lösen. O.E.d.A. angenommen T hat ∞-viele EW $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \neq 0$. Nach dem Spektralsatz 4.124

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n + g_0 \quad b_n = \langle g, u_n\rangle, \; g_0 \in \operatorname{Ker} T.$$

Für f setzen wir an:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n + f_0 \quad a_n = \langle f, u_n \rangle, \;\; f_0 \in \operatorname{Ker} T.$$

Dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - \lambda\lambda_n a_n) u_n + f_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n + g_0.$$

und somit

$$f_0 = g_0, \quad (1 - \lambda\lambda_n) a_n = b_n$$

wenn f eine Lösung ist. Angenommen $\lambda^{-1} \neq \lambda_n, \; n \in \mathbb{N}$ d.h. λ^{-1} ist kein EW von T (der Beweis des Spektralsatztes liefert alle EW $\neq 0$). Wir machen den Ansatz:

$$f_0 = g_0, \quad a_n = \frac{b_n}{1 - \lambda\lambda_n} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{b_n}{\frac{1}{\lambda} - \lambda_n} \right).$$

Wir definieren

$$f := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_n}{1 - \lambda\lambda_n} \right) u_n + g_0.$$

Diese Reihe konvergiert konvergiert weil:

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = 0 \quad \Rightarrow \left| \frac{1}{1 - \lambda\lambda_n} \right| = \left| 1 + \frac{\lambda\lambda_n}{1 - \lambda\lambda_n} \right| \leq 2, \quad n \geq n_0$$

Daher ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{b_n}{1 - \lambda\lambda_n} \right|^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 < \infty.$$

□

Korollar 5.3. *Fredholmsche Alternative für den Integralkern K*

Sei $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$. Unter die Voraussetzungen den vorherigen Satz entweder besitzt die Gleichung

$$f - \lambda \int_a^b K(\cdot, t) f(t) dt = g \tag{5.2}$$

für jedes $g \in \mathcal{H} = L_2([a, b])$ genau eine Lösung oder die homogene Gleichung

$$f - \lambda \int_a^b K(\cdot, t) f(t) dt = 0 \tag{5.3}$$

besitzt eine nicht triviale Lösung

Beweis. Wenn λ^{-1} kein EW von T, aus Satz 5.2 ist (5.2) eindeutig lösbar und dann hat (5.3) nur die Null-Lösung. Hat (5.3) eine nicht triviale Lösung dann λ^{-1} ist EW von T. Für $g \in E_{1/\lambda} \backslash \{0\}$ ist nach Satz 5.2 die Gleichung (5.2) nicht auslösbar.

□

Lebesgue Integral

5.1. **Maßnull Menge.** .

Beispiel 5.4. Die Dirichlet Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$$

ist nicht Riemann-integrierbar da

$$0 = \overline{S}(P,f) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}) \neq \underline{S}(P,f) = \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}) = 1$$

Satz 5.5. *(Lebesgue)*
Eine beschränkte Funktion f auf $[a,b]$ ist Riemann-integrierbar $\Leftrightarrow$ ist fast überall stetig $\Leftrightarrow$ die Menge $\{x \in [a,b] \mid f \text{ nicht steig in } x\}$ hat Maßnull.

Für das Intervall $I = [a,b]$ (oder (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$) sei $|I| = |b-a|$ die Länger des Intervalls; nach Konvention $|\emptyset| = 0$.

Definition 5.6. $A \subset \mathbb{R}$ ist eine Nullmenge (oder hat Maß Null) wenn $\forall \epsilon > 0$ existiert eine Folge von beschränkten offenen Intervallen $I_1, I_2, \ldots$ so dass

$$(i) \quad A \subset \cup_{n=1}^{\infty} I_n, \qquad (ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq \epsilon.$$

Bemerkung 5.7. Kein abgeschlossenes Intervall $[a,b]$, $a \neq b$ ist eine Nullmenge. Jede abzählbare Menge (endlich oder nicht) hat Maß Null.

Beispiel 5.8. Cantor-Menge
Wir setzen:

$$\begin{aligned} F_1 &= [0,1/3] \cup [2/3,1] \\ F_2 &= [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1] \\ \vdots &= \vdots \\ F_n &= \text{ Vereinigung von } 2^n \text{ intervallen von Länger } \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ \vdots &= \vdots \end{aligned}$$

Wir definieren die Cantor Menge als

$$F = \cap_{n=1}^{\infty} F_n$$

Sie ist abgeschlossen (jeder Punkt ist ein Häufungspunkt).

Behauptung: F ist eine Nullmenge. Sei $\epsilon > 0$, dann existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $(\frac{2}{3})^n < \epsilon$. Da $F \subset F_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ und die Summe der Länger der Intervallen in F_n ist, haben wir

$$2^n \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

Somit ist F eine Nullmenge.

Satz 5.9. *Jeder Punkt $x \in F$ hat eine eindeutige ternäre Entwicklung der Form*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}, \qquad a_n \in \{0,2\}$$

und jede solche Reihe ist in F.

Korollar 5.10. *Die Cantor Menge F ist nicht abzählbar.*

Beweis. Anhgenommen, dass Fabzählbar ist $F = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Jede Element $x_i \in F$ hat eine Darstellung:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 0.a_{11}a_{12}a_{13}\ldots \\ x_2 & = & 0.a_{21}a_{22}a_{23}\ldots \\ x_3 & = & 0.a_{31}a_{32}a_{33}\ldots \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

mit $a_{ij} \in \{0,2\}$. Wir definieren

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } a_{nn} = 2 \\ 2 & \text{falls } a_{nn} = 0 \end{cases}$$

So die Zahl $x = 0.a_1a_2a_3\ldots$ gehört nicht zu F und wir erhalten eine Widerspruch. $\square$

Man bemerkt zwei Mangeln bei Riemann-Integration
1) ,,Viele" Funktionen sind nicht integrierbar 2) Sei (f_n) eine Folge von Riemann-integrierbare Funktionen auf $[a,b]$ und $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in [a,b]$ punktweise. In allgemeinen,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx \neq \int_a^b f(x)dx$$

Was schief gehen kann:

(1) Der Limes auf der linke Seite könnte nicht existiert.
(2) f könnte nicht Riemann-integrierbar sein.
(3) auch wenn beide Seiten endlich sind könnte nicht gleich sein.

Anderes Problem: Der normierte Raum

$$R[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist Rieman-integrierbar}\}$$

ist nicht vollständig mit $||f||_1 = \int_a^b |f|dx$.

Beispiel 5.11.

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, \frac{1}{n+1}] \\ n^{3/2}[(n+1)x - 1] & x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \\ 1/\sqrt{x} & x \in [1/n, 1] \end{cases}$$

$(f_n) \subset C^0([0,1]) \subset R[0,1]$ ist eine Cauchy-Folge aber $\lim_{n\to\infty} f_n \in R[0,1]$.

Beispiel 5.12. Wir nummerieren die rationalen Zahlen in $[a,b]$: $r_1, r_2, r_3, \ldots$. Sei

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = r_k,\ k = 1,2,\ldots n \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases}$$

Die Funktionen f_n sind Riemann-integrierbar, $\int f_n(x)\ dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Sei

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [a,b] \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

die Dirichlet Funktion. Dann $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ aber f ist nicht Riemann-integrierbar, so

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx.$$

5.2. **Lebesgue-Integral.** Bei Riemann Integration der Integrationsbereich ist in einer Partition verteilt und das integral ist der limes der Cauchy-Summe dieser Partition als die Partition feiner wird. Bei Lebesgue Integration der Integrationsbereich ist in messbare Menge verteilt. Das Integral ist dann der Limes von gewissen Sumen über diese Menge als die Anzahl der messbaren Mengen steigt.

Definition 5.13. Die charakterische Funktion χ_E einer Menge E ist durch

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

Eine Funktion $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist eine Treppefunktion von $[a,b]$ wenn es eine Partition

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

existiert so dass φ auf jedem Unterintervall $I_k = (x_{k-1}, x_k)$ konstant ist, d.h. $\varphi(x) = a_k$, $\forall x \in I_k,\ k = 1, 2, \ldots, n$. Es wird nicht wichtig sein, wie auf den Punkten $x_0, x_1, \ldots, x_n$ definiert ist, weil die eine Nullmenge bilden.
Bezeichnung: $\varphi(x) = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{I_k}(x)$.

Bemerkung 5.14. Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sup\{a,b\} = \max\{a,b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a-b|), \qquad \inf\{a,b\} = \min\{a,b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a-b|).$$

Falls $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f^+ = \max\{f, 0\}$, d.h. $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ und $f^- = \max\{-f, 0\}$. Also

$$f = f^+ - f^-, \qquad |f| = f^+ + f^-$$

und somit $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$, $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$

Bemerkung 5.15. Seien φ, ψ Treppenfunktionen, $c \in \mathbb{R}$. Dann

$$c\varphi, \varphi + \psi, \varphi\psi, |\varphi|, \max\{\varphi, \psi\}, \min\{\varphi, \psi\}, \varphi^+, \varphi^-$$

sind auch Treppenfunktionen.

Definition 5.16. Sei $\varphi(x) = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{I_k}(x)$ eine Treppenfunktion mit $I_k = (x_{k-1}, x_k)$, $1 \leq k \leq n$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Wir definieren

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{k=1}^n a_k$$

Für φ nicht negative die ist die Fläche unter dem Graph.

Eigenschaften. Seien φ, ψ Treppenfunktionen, $c \in \mathbb{R}$. Dann

(a) $\int_a^b (\varphi(x) + \psi(x))dx = \int_a^b \varphi(x)dx + \int_a^b \psi(x)dx$ (Additivität)
(b) $\int_a^b c\varphi(x)dx = c\int_a^b \varphi(x)dx$ (Homogeneität)

(c) Wenn $\varphi \geq 0$ dann $\int_a^b \varphi(x)dx \geq 0$

Definition 5.17. Eine Folge von Funktionen $f_n : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert fast überall (f.ü.) gegen f falls $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für fast alle $x \in A$, d.h. $\{x \in A \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\}$ ist eine Nullmenge. Wir schreiben

$$\lim f_n = f \quad \text{f.ü.} \qquad f_n \to 0 \quad \text{f.ü.}$$

Z. B. $f_n(x) = x^n$ auf $[0,1]$, $f_n \to 0$ f.ü. (außer $x = 1$).

Bemerkung 5.18. (1) Punktweise Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergenz f.ü.
(2) Der Grenzwert ist nicht eindeutig:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \text{f.ü.} \quad \text{and} \quad \lim_{n\to\infty} f_n = g \quad \text{f.ü.} \Rightarrow f = g \quad \text{f.ü.}$$

Lemma 5.19. *Sei (φ_n) eine monotone fallende Folge von nicht negative Treppenfunktionen auf $[a,b]$. Dann*

$$\varphi \to 0 \quad \text{f.ü. auf } [a,b] \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = 0.$$

Lemma 5.20. *Sei (φ_n) eine monotone steigende Folge von Treppenfunktionen auf $[a,b]$. Wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ mit*

$$\int_a^b \varphi_n(x)dx \leq M, \quad \forall n$$

gibt, dann φ_n konvergiert f.ü. auf $[a,b]$.

Korollar 5.21. *Sei (φ_n) eine monotone fallende Folge von nicht negative Treppenfunktionen auf $[a,b]$, so dass*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx < \infty.$$

Dann $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n$ konvergiert f.ü. auf $[a,b]$.

Beweis. Man setzt $F_n = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k$. Dann

$$\int_a^b F_n \, dx = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b \varphi_k \leq M$$

dann nach Lemma 5.20 $F_n \to F = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n$ konverigiert f.ü. □

Satz 5.22. *Eine Menge $A \subset [a,b]$ hat Maßnull genau dann, wenn existiert eine monotone steigende Folge (φ_n) von Treppenfunktionen auf $[a,b]$ so dass $(\int_a^b \varphi_n(x)dx)$ konvergiert und (φ_n) divergiert auf A.*

Beweis. ($\Leftarrow$) Sei $B = \{x \in [a,b] \mid (\varphi_n(x)) \text{ nicht konvergiert }\}$, so $A \subset B$. Da

$$\int_a^b \varphi_n(x) \, dx \leq M$$

Lemma 5.20 impliziert, dass (φ_n) konvergiert f.ü. . Daher ist B eine Nullmenge und somit A auch.

($\Rightarrow$) Angenommen A aht MaßNull. Dann $\forall n \in \mathbb{N}$ existiert (I_{nm}) Folge von offenen Intervallen so, dass

$$A \subset \cup_{m=1}^{\infty} I_{nm}, \qquad \sum_{m=1}^{\infty} |I_{mn}| \leq \frac{1}{2^n} = 1$$

und jedes $x \in A$ wird in einem I_k enthält für ∞-viele k's. Sei $\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \chi_{I_k}$. Dann φ_n monoton steigend und (φ_n) divergiert in A. Wir haben

$$\varphi_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \chi_{I_{k+1}}(x) \geq \varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \chi_{I_k}(x).$$

Aber

$$\int_a^b \varphi_n(x)\ dx \leq \sum_{k=1}^{n} |I_k| \leq 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

Wir werden eine neue Klasse von Funktionen definieren L^+, die Grenzwerte von Treppenfunktionen sind.

Definition 5.23. Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ gehört zu der Klasse L^+ falls existiert eine monotone steigende Folge (φ_n) von Treppenfunktionen auf $[a,b]$ so dass
(1) die Folge $(\int_a^b \varphi_n(x)dx)$ ist beschränkt und
(2) $f = \lim \varphi_n$ f.ü. auf $[a,b]$.

Wenn $f \in L^+$ dann f ist endlich f.ü. auf $[a,b]$, d.h.

$$\{x \in [a,b] \mid f(x) = \pm\infty\}$$

hat Maßnull. Sei $f \in L^+$ und (φ_n) eine monotone steigende Folge von Treppenfunktionen mit $\lim \varphi_n = f$. Dann

$$\int_a^b \varphi_1\ dx \leq \int_a^b \varphi_2\ dx \leq \ldots \int_a^b \varphi_n\ dx \leq \ldots \leq M$$

so der Limes existiert.

Definition 5.24. Für $f \in L^+$ definieren wir das (Lebesgue) Integral von f durch

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n\ dx$$

Man soll überprrüfen, dass diese Definition unabhängig der Wahl der Folge (φ_n) ist.

Satz 5.25. *Seien $f, g \in L^+$. Angenommen $\lim \varphi_n = f$ und $\lim \psi_n = g$. Falls $f \leq g$ f.ü. auf $[a,b]$, dann*

$$\lim \int_a^b \varphi_n(x)\ dx \leq \lim \int_a^b \psi_n(x)\ dx$$

Korollar 5.26. *Für $f, g, \in L^+$ gilt (1) falls $f \leq g$ f.ü. auf $[a,b]$, dann*

$$\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx$$

(2) falls $f = g$ f.ü. auf $[a,b]$, dann

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b g(x)\ dx$$

Satz 5.27. *Jede Riemann-integrierbar Funktion f gehört zu L^+ und die Integralen überstimmen. aber nicht alle $f \in L^+$ sind Riemann-integrierbar.*

Bemerkung 5.28. Nicht alle $f \in L^+$ sind Riemann-integrierbar. Z. B. die Dirichlet Funktion ist in L^+ aber sie ist nicht Riemann-integrierbar.

Eigenschaften: Seien $f, g \in L^+$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann

(a) $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)\ dx$ (Additivität)
(b) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$ (Homogeneität)
(c) Wenn $f \geq 0$ f.ü. auf $[a, b]$ dann $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Bemerkung 5.29. L^+ ist kein Vektorraum, denn man die Differenz zwei Funktionen aus L^+ ist nicht unbedingt in L^+ (oder die Multiplikation mit negativen Zahlen.

Für $f, g \in L^+$ könnte es sein, dass $f - g \notin L^+$. So werden wir L^+ erweitern, so dass L^+ ein Vektorraum wird.

Definition 5.30. Wir bezeichnen mit L die Klasse alle Funktionen der Form $f-g$ mit $f, g \in L^+$

Satz 5.31. *Seien $f, g \in L,\ c \in \mathbb{R}$. Dann $f + g, cf, |f|, max\{f, g\}, min\{f, g\}, f^+, f^- \in L$.*

Definition 5.32. Sei $f \in L$, mit $f = f_1 - f_2$ wobei $f_1, f_2 \in L^+$. Das Lebesgue Integral von f ist durch

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b f_1(x)\ dx - \int_a^b f_2(x)\ dx$$

definiert. L ist die Klasse der *Lebesgue-integrierbar Funktionen* .

Die Definition ist unabhängig von der Wahl der Darstellung von f: Falls

$$f = f_1 - f_2 = g_1 - g_2 \ \text{ fast überall auf } \ [a, b], \quad f_i, g_i \in L^+,$$

folgt $f_1 + g_2 = f_2 + g_1$. Dann (Additivität des Integrals)

$$\int_a^b f_1(x)\ dx + \int_a^b g_2(x)\ dx = \int_a^b f_2(x)\ dx + \int_a^b g_1(x)\ dx,$$

und somit

$$\int_a^b f_1(x)\ dx - \int_a^b f_2(x)\ dx = \int_a^b g_1(x)\ dx - \int_a^b g_2(x)\ dx$$

Eigenschaften: Seien $f, g \in L$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(a) $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)\ dx$ (Additivität)
(b) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$ (Homogeneität)
(c) Wenn $f \geq 0$ f.ü. auf $[a, b]$ dann $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Satz 5.33. *Falls $f \in L$, dann $|f| \in L$ und*

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Beweis. □

Satz 5.34. *Sei $f \in L$. Dann existiert eine Folge (φ_n) von Treppenfunktionen auf $[a,b]$ so, dass $\varphi_n \to f$ f.ü. auf $[a,b]$ und*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx.$$

Beweis. Sei $f = f_1 - f_2 \in L$ wobei $f_1, f_2 \in L^+$. Dann existieren monotone steigende Folgen $(\psi_n), (\psi_n')$ von Treppenfunktionen so, dass

$$\psi_n \to f_1, \qquad \psi_n' \to f_2, \quad \text{f.ü. auf } [a,b].$$

Setzen $\varphi_n = \psi_n - \psi_n'$, so ist (φ_n) eine Folge von Treppenfunktionen mit $\varphi_n \to f$ f.ü. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 \le \left| \int f\ dx - \int \varphi_n\ dx \right| &= \left| \int (f\ dx - \varphi_n)\ dx \right| \\ &= \left| \int (f_1 - f_2 - \ dx - \psi_n + \psi_n')\ dx \right| \\ &\le \left| \int f_1\ dx - \psi_n\ dx \right| + \left| \int f_2\ dx - \psi_n'\ dx \right|. \end{aligned}$$

Wir nehmen den Limes $n \to \infty$ und erhalten

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_a^b \varphi_n\ dx - \int_a^b f\ dx \right| = 0$$

□

A. Ortega: Institut für Mathematik, Humboldt-Universität zu Berlin, Unter den Linden 6 10099 Berlin, Germany
E-mail address: ortega@math.hu-berlin.de