§ über das Volumen

18.06.2018

Def. 3.4.11 Besitzt die offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ die Quaderzerlegung $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ so definieren wir ihr n-dimensionales Volumen durch

$$V^n(\Omega) := \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} V^n(Q_k) & \text{falls diese Reihe konvergiert} \\ \infty & \text{Anderfalls.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V^n(\Omega) = \int_\Omega 1 \cdot d^n x \quad \text{(aus der Def von Integral)}$$

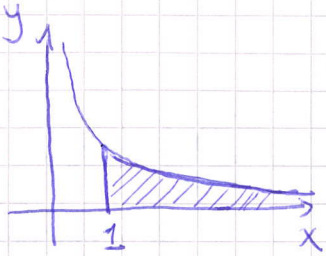
Bemerkungen: (a) Die Definition ist unabhängig von der Wahl der Quaderzerlegung

(b) $V^n(Q) = V^n(\mathring{Q})$ für komparkte Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$.

(c) Unbeschränkte Menge kann endliches Volumen haben. Z.B.

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 1, \quad 0 < y < 1/x^2\}$$

$$V^2(\Omega) = \int_\Omega 1 \, dx\, dy = \int_1^\infty \int_0^{1/x^2} 1 \, dy = \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1$$



(d) Für Ω eines von den Vektoren $a_1 \dots a_n$ aufgespannten Parallelepiped

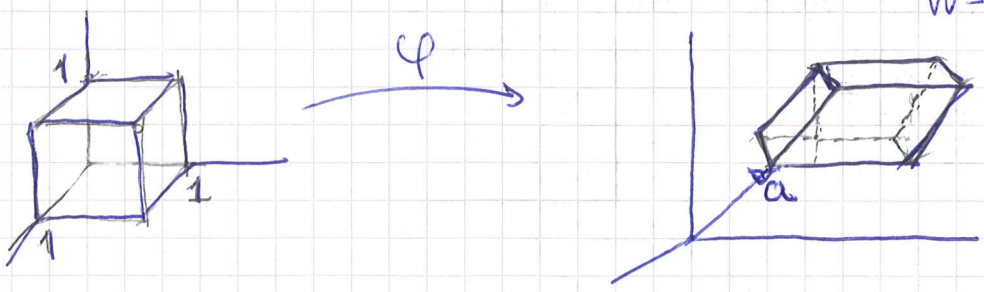
$$P = a + \{t_1 a_1 + \dots + t_n a_n \mid 0 \le t_i \le 1\} \qquad a, a_i \in \mathbb{R}^n$$

ist

$$V^n(P) = |\det(a_1, \dots, a_n)| \quad . \text{ Denn}$$

A = Matrix mit Spalten $(a_1, \dots, a_n)$ und $\varphi(x) = a + Ax$ so ist $P = \varphi(W)$

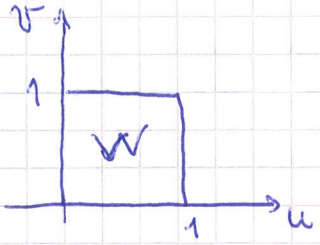
W = Einheitswürfel.



Nach dem Transformationssatz

$$V^n(P) = \int_{\varphi(W)=P} 1 \cdot d^n y = \int_W 1 \cdot |\det A| \, d^n x = |\det A| \cdot V^n(W) = |\det A|$$

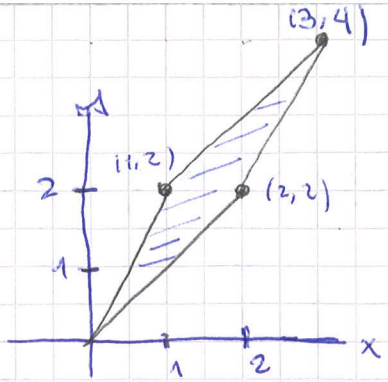
Beispiel von 12.06.



$\xrightarrow{\varphi}$

$\varphi(u,v) = (u+2v,\ 2u+2)$

$= (x,y)$



$a=0$ $\quad a_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\quad a_2 = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ $\quad \Rightarrow d\varphi = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix} = (a_1, a_2) = A$

$$\mathrm{Vol}(P) = \int_P 1\, dx\, dy = \int_W |\det A|\, du\, dv = 2$$

Bemerkung Ist T die (affine) Bewegung $T: x \longmapsto a + Ax$ mit $\det A = 1$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ so gilt $V(\Omega) = V(T(\Omega))$ $\forall\, \Omega \subset \mathbb{R}^n$

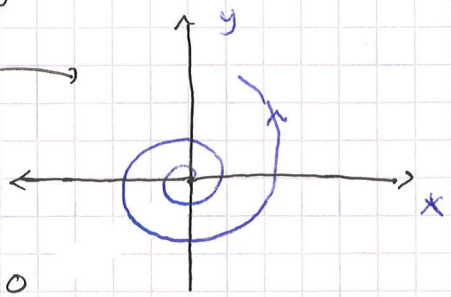
§ 3.5 Kurvenintegrale

Def. 3.5.1 Eine C^1-Kurve $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $t \longmapsto \alpha(t) = \begin{pmatrix}\alpha_1(t)\\ \vdots \\ \alpha_n(t)\end{pmatrix}$ ist regulär wenn der Tangentenvektor $\dot\alpha(t)$ an keiner Stelle $t \in I$ verschwindet

Beispiele (a) Die Archimedische Spirale ist regulär

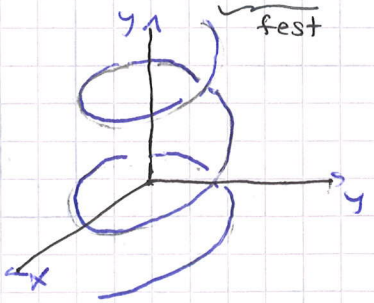
$$\alpha: t \longmapsto \begin{pmatrix} t\cos t \\ t \sin t\end{pmatrix}$$

$[0,\infty) \longrightarrow$



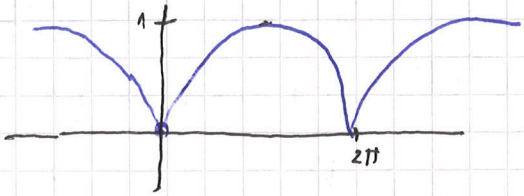
(b) Die Schraubenlinie ist regulär falls $\underbrace{r^2 + h^2}_{\text{fest}} > 0$

$$\mathbb{R} \ni t \xrightarrow[\alpha]{} \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ h\cdot t\end{pmatrix}$$



(c) Die Zykloide

$$\mathbb{R} \ni t \xrightarrow[\alpha]{} \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t\end{pmatrix}$$

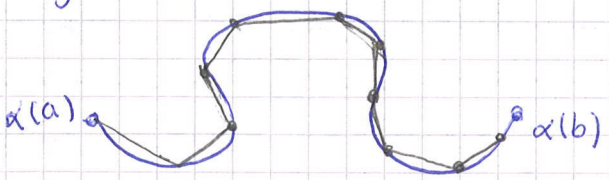


ist nicht regulär weil $\dot\alpha(t) = (1-\cos t, +\sin t)$ und $\dot\alpha(2\pi n) = (0,0)$

Def. 3.5.2 Eine Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ heißt C^r-Kurvenstück wenn C das Bild einer injektiven, regulären C^r-Kurve $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist. ($r \geq 1$, $a > b$)
Jede solche Darstellung α von C nennen wir eine C^r-Parametrisierung von C.

Bemerkung: Zu je zwei C^r-Parametrisierungen von C:
$\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ und $\beta : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
$\exists$ eine C^r-Diffeomorphismus $h : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ s.d.
$\alpha(t) = \beta(h(t))$ für jedes $t \in [a,b]$

Def. 3.5.3 Die Länge $L(C)$ eines Kurvenstücks C ist das Supremum der Längen aller in C einbeschrieben Sehnenpolygone.



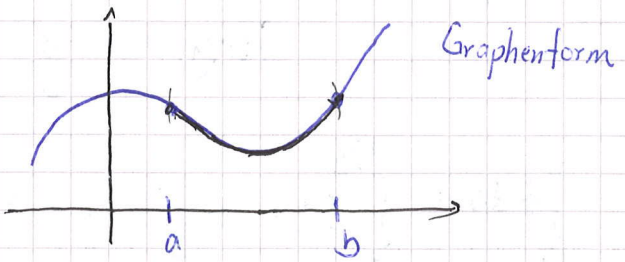
Satz 3.5.4. Für jede C^1-Parametrisierung $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ von C gilt:

$$L(C) = L(\alpha) := \int_a^b \| \dot{\alpha}(t) \| \, dt .$$

Beispiele

(a) $\alpha(t) = (t, y(t))$

$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{y}(t)^2} \, dt$$



(b) $t \longmapsto \alpha(t) = \begin{pmatrix} x_0 + r(t)\cos w(t) \\ y_0 + r(t)\sin w(t) \end{pmatrix}$ r, w C^1-Funk. auf $I = [a,b]$.

$$\dot{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} -r(t)\sin w(t) \cdot \dot{w}(t) + \dot{r}(t) \cdot \cos w(t) \\ r(t)\cos w(t) \cdot \dot{w}(t) + \dot{r}(t)\sin w(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{w}^2} \, dt .$$

z.B. $\alpha(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r \sin t \end{pmatrix}$ $t \in [0, 2\pi]$

$$L(\alpha) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2} \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} r \, dt = 2\pi r \quad (l = \text{Perimeter})$$

Bemerkung Seien $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\beta : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ zwei C^1-Parametrisierungen von C. Dann $\exists h$ C^1-Diffeo $h : [a,b] \longrightarrow [c,d]$

s.d. $\alpha = \beta \circ h \Rightarrow \dot{\alpha}(t) = \dot{\beta}(h(t)) \cdot \dot{h}(t)$

Dann g/t

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| \, dt = \int_a^b \|\dot{\beta}(h(t)) \cdot \dot{h}(t)\| \, dt$$

$$= \int_a^b \|\dot{\beta}(h(t))\| \cdot |\dot{h}(t)| \, dt = \int_c^d \|\dot{\beta}(s)\| \, ds = L(\beta)$$

(Transformationssatz)

$\rightsquigarrow$ $L(\alpha)$ ist invariant gegenüber Parametertransformation.

§ Skalare Kurvenintegrale.

Def. 3.5.5, Auf einem Kurvenstück C sei eine Funktion $x \longmapsto f(x)$ gegeben mit $t \longmapsto f(\alpha(t))$ stetig mindestens für eine Parametrisierung α. Das skalare Kurvenintegral oder Wegintegral von f über C ist.

$$\int_C f \, ds = \int_C f(x) \, ds := \int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \|\dot{\alpha}(t)\| \, dt$$

dies ist unabhängig von der Wahl der Parametrisierung.

Bezeichnung: ds = skalare Bogenelement.

Beispiel. $\alpha : [0, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad \alpha(t) = (-3\cos^3 t, \, 3\sin^3 t)$.

$f(x,y) = 1 + \frac{y}{3}$ $\quad \dot{\alpha}(t) = (-9\cos^2 t \sin t, \, 9\sin^2 t \cos t)$

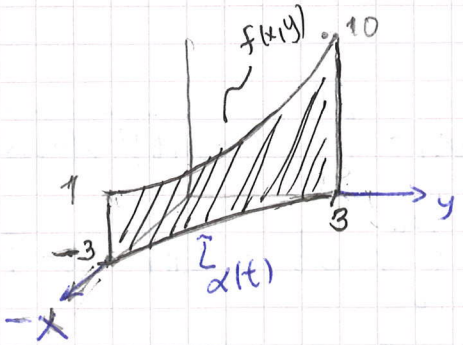
$\|\dot{\alpha}(t)\| = 9 \sin t \cos t$.

$$\int_\alpha f \, ds = \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{3\sin^3 t}{3}\right) \cdot 9 \sin t \cos t \, dt$$

$$= 9 \int_0^{\pi/2} (\sin t + \sin^4 t) \cos t \, dt.$$

$$= 9 \left(\frac{\sin^2 t}{2} + \frac{\sin^5 t}{5} \right) \Big|_0^{\pi/2} = 9 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) = \frac{9(7)}{10}$$

= "die Fläche der Wand über $\alpha(t)$ mit Höhe $f(x,y)$"



§ Vektorielle Kurvenintegrale.

Def. 3.5.6 Einer Vektorfeld auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abbildung

$$v: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad x \longmapsto v(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ \vdots \\ v_n(x) \end{pmatrix}$$

wobei wir uns $v(x)$ mit seinem Fußpunkt an die Stelle x angeheftet denken.
Sind alle Komponentenfunk. $v_1 \dots v_n$ C^r-diferenzierbar so sprechen wir von einem C^r-Vektorfeld.

Beispiele: • der Geschwindigkeitsfelder von Gasen und Flüssigkeiten.
• Gravitationsfelder,
• elektrischen und magnetische Felder, usw.

Def. 3.5.7 Für ein Vektorfeld v auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und eine reguläre C^1-Kurve $\alpha: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ in Ω definieren wir das Wegintegral durch

$$\int_\alpha v \cdot dx := \int_a^b \langle v(\alpha(t)), \dot\alpha(t) \rangle \, dt$$

Hier dx = vektorielle Bogenelement $\dot\alpha(t)\,dt$

Andere Schreibweisen: $\int_\alpha v(x)\,dx$, $\int_\alpha v\,ds$, $\int v_1 dx_1 + \dots + v_n dx_n$

in $\mathbb{R}^2$: $\int_\alpha P dx + Q dy$ in $\mathbb{R}^3$: $\int_\alpha P dx + Q dy + R dz$

Beispiele

Vektorfeld	Wegintegral
Kraftfeld	Arbeit
Geschwindigkeitsfeld	Zirkulation
elektrische Feldstärke	elektrische Spannung
infinitesimale Wärmeänderung	Wärmemenge

Beispiel (a) Ein Massenpunkt im Ursprung erzeugt ein Gravitationsfeld gegeben durch.

$$K(x) = -\frac{x}{\|x\|^3} = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{für} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq 0$$

Wird ein zweiter Massenpunkt der Masse 1 längs einer Kurve $\alpha: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ bewegt, so ist die an ihm geleistete Arbeit. das Wegintegral

$$-\int_\alpha K \cdot dx = \int_a^b \frac{x(t)\cdot\dot x(t) + y(t)\cdot\dot y(t) + z(t)\cdot\dot z(t)}{(x^2(t) + y^2(t) + z^2(t))^{3/2}} \, dt$$

(b) Man berechnet $\int_\alpha x^2dx + xy\,dy + dz$, $\alpha: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $t \longmapsto (t, t^2, 1)$

$\dot\alpha(t) = (1, 2t, 0)$

Andere Schreibweise $\int_\alpha \langle (x^2, xy, 1), (dx, dy, dz)\rangle$

$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \\ 1 \end{pmatrix}$ $\dot\alpha(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$

$$\int_\alpha x^2dx + xy\,dy + dz = \int_0^1 (t^2\cdot 1 + t^3\cdot 2t + 0)\,dt = \int_0^1 (2t^4 + t^2)\,dt$$

$$= \frac{2t^5}{5} + \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{11}{15}$$

Bemerkung Sei C ein C^1-Kurvenstück in Ω und α, β zwei C^1-Parametrisierungen. Dann $\exists h$: Parametertransf. mit $\alpha = \beta \circ h$.

Nach der Kettenregel.

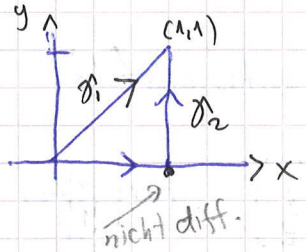
$$\int_\alpha v\cdot dx = \begin{cases} \int_\beta v\cdot dx & \text{falls } h' > 0 \\ -\int_\beta v\cdot dx & \text{falls } h' < 0 \end{cases}$$

$\int_\alpha \langle v(\beta\circ h(t)), \dot\beta(h(t))\cdot \dot h(t)\rangle dt$

Def. 3.5.8 Eine Orientierung von C ist eine Festlegung des Durchlaufsinns und besteht darin, eine bestimmte C^1-Parametrisierung β als positiv auszuzeichen und jede C^1-Param. $\alpha = \beta\circ h$ mit $h' > 0$ als positive Param. zu bezeichnen.

Bei Umparametrisierung $\alpha = \beta\circ h$ mit $h' < 0$ sprechen wir von einer Änderung des Durchlaufsinns.

Beispiel. $v(x,y) = (x^2, xy)$ ein Ebene Vektorfeld. und die Kurven γ_1, γ_2:



$\gamma_1: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (t,t)$

$\int_{\gamma_1} v\cdot dx = \int_0^1 (t^2 + t^2)\,dt = \frac{2t^3}{3}\Big|_0^1 = 2/3$

$-\gamma_1: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (1-t, 1-t)$

$\int_{-\gamma_1} v\cdot dx = \int_0^1 -2t^2\,dt = -2/3$

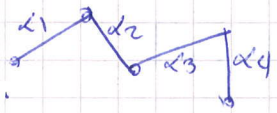
$\gamma_2: [0,1] \ni t \longmapsto (t,0)$

$[0,1] \ni t \longmapsto (1,t)$

$\int_{\gamma_2} v\cdot dx = \int_0^1 t^2\,dt + \int_0^1 t^2\,dt = 2/3$

immer so?

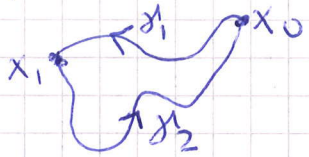
Im Allgemein: stückweis glatter Weg:



$$\int_\alpha v \cdot dx = \sum_{k=1}^{N} \int_{\alpha_k} v \cdot dx$$

$\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$

Def. 3.5.9 Ein Vektorfeld v auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt <u>konservativ</u> (oder <u>exakt</u>) wenn $\int_\gamma v \cdot dx$ über stückweis glatte Weg γ auf Ω nur von den Endpunkten von γ abhängt (nicht vom Verlauf)



$$\int_{\gamma_1} v \cdot dx = \int_{\gamma_2} v \cdot dx \Rightarrow \int_{\gamma_1} v \cdot dx + \int_{-\gamma_2} v \cdot dx = 0$$

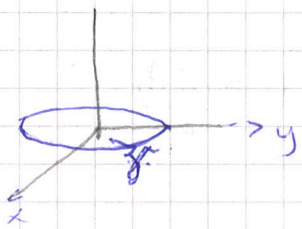
- v ist konservativ $\Leftrightarrow \int_\gamma v \cdot dx = 0$ $\forall$ geschlossenen stückweis glatten Kurven $\gamma \subset \Omega$

<u>Beispiel</u> (a) Das Gravitationsfeld $K(x) = -\frac{x}{\|x\|^3}$ ist konservativ.

(b) Das Magnetfeld $H(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ ist nicht konservativ:

$\gamma : t \longmapsto (\sin t, \cos t, 0)$

$t \in [0, 2\pi]$



$$\int_\gamma H \cdot dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^2 t + \cos^2 t} \left[(-\cos t)(\cos t) - \sin t (\sin t)\right] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -1 \, dt = -t\Big|_0^{2\pi} = -2\pi \neq 0.$$

Satz 3.5.10 Ein Vektorfeld v auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist konservativ genau dann, wenn es eine C^1-Funk $U: \Omega \to \mathbb{R}$ gibt mit.

$$v = \nabla U$$

also. $\int_\alpha v \, dx = U(x_1) - U(x_0)$ für jede stückweis glatte Kurve α in Ω von x_0 nach x_1.

<u>Bemerkung</u> (a) U ist eine Stammfunktion oder Potential des Vektorfeldes v

(b) U ist bis auf additive Konstante festgelegt

(c) Oft in der Physik ist $\nabla U = -v$ definiert.

Zum <u>Beweis</u> ($\Leftarrow$) Jede Gradientenfeld $v = \nabla U$ ist konservativ:

$\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega$ C^1-Kurve

$$\frac{d}{dt} U(\gamma(t)) = \langle \nabla U(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle = \langle v(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle$$

$$\Rightarrow \int_\gamma v \cdot dx = \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle dt = \int_a^b \frac{d}{dt} U(\gamma(t))\, dt$$

$$= U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)).$$

Wann besitzt v ein Potential?

Notwendige Bedingungen, Integrabilitätsbedingungen:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \qquad \forall i \neq k.$$

Denn hat v ein Potential U, folgt aus $v_i = \partial_i U$, wegen der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen (U ist C^1-Abb.)

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_k} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$$

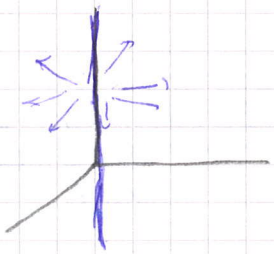
Bem. Ein Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$ mit dieser Eigenschaft heißt rotationsfrei.

Gegenbeispiel: Diese Integralitätsbedingungen sind nicht hinreichend für die Existenz eines Potential.

Das Magnetfeld $H(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ ist nicht konservativ.

trotzdem: $\frac{\partial H_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial H_1}{\partial y}$.

$$\frac{\partial H_2}{\partial z} = 0 = \frac{\partial H_3}{\partial y} = \frac{\partial H_3}{\partial x} = \frac{\partial H_1}{\partial z}$$



Das Magnetfeld fließt durch einen in der z-Achse liegende Draht ein konstante Strom außerhalb des Drahtes

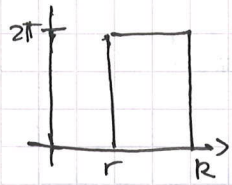
Def. 3.5.11. Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt sternförmig wenn es ein (ü) Punkt $x_0 \in \Omega$ gibt, s.d. mit jedem Punkt $x \in \Omega$ auch die Verbindungsstrecke zwischen x_0 und x in Ω liegt.

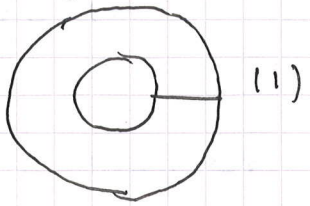
Beispiele: $K_\delta(x_0)$, Quaders: $Q = Q_1 \times \cdots \times Q_n \subset \mathbb{R}^n$

$\{(x,y) \mid x^2+y^2 < 1\} - \{(x,0) \mid x > 0\}$

(b) Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt einfach, wenn es das C^2-Diffeomorphe Bild eines sternförmiges Gebietes im $\mathbb{R}^n$ ist.

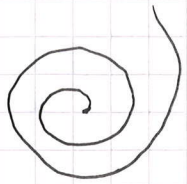
Beispiele. (1) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid r < \sqrt{x^2+y^2} < R\} \setminus \{(x,0) \mid x \geq 0\}$





(1)

(2) $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{$archimedischen Spirale$\}$ $\cdot (t\cos t, t\sin t)$ $t \geq 0$



Bemerkung: In einem einfachen Gebiet läßt sich jede geschlossene Kurve stetig auf einem Punkt zusammenziehen ohne Ω zu verlassen bei dieser Deformation.

Satz 3.5.12 (Hinreichende Bedingung) Ein C^1-Vektorfeld v auf Ω besitzt ein Potential, wenn es die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \quad \text{für } i \neq k \quad \text{erfüllt und}$$

Ω ein einfaches Gebiet ist

Bemerkung In dem Fall des Magnetsfeldes das Definitionsgebiet ist nicht einfach: $\mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{-Achse}\}$

Zur Berechnung des Potentials

(a) Im $\mathbb{R}^2$: $v(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ C^1-Vektorfeld

mit $\partial_y P = \partial_x Q \Rightarrow \exists$ Potential U für v

- Wir halten y fest und bestimmen eine Stammfunk. $p(x,y)$ für $x \mapsto P(x,y)$

$\Rightarrow U(x,y) = p(x,y) + q(y)$ mit $\partial_x p = P$

Da $\partial_y U(x,y) = Q(x,y) \Rightarrow q'(y) = Q(x,y) - \partial_y p(x,y)$ ist unabhängig von x.
(da $\partial_x (Q - \partial_y p) = 0$)

Dann bestimmt man eine Stammfunk. für $q'(y)$

Beispiel $v(x,y) = (2x\cos y, -x^2 \sin y)$ auf $\Omega = \mathbb{R}^2$ ← einfaches Gebiet.

Integrabilitätsbedingung $\partial_x Q = -2x \sin y = \partial_y P$

Stammfunk für $2x\cos y$ (mit y fest) ist $x^2 \cos y = p(x,y)$.

$\Rightarrow U(x,y) = x^2 \cos y + q(y)$

$\Rightarrow q(y) = U(x,y) - x^2\cos y$

$q'(y) = \partial_y U - \partial_y p(x,y) = -x^2\sin y + x^2\sin y = 0$

$\Rightarrow U(x,y) = x^2\cos y + a \qquad a \in \mathbb{R}$ Konstante

ist ein Potential

(b) Im $\mathbb{R}^3$: $v(x,y,z) = (P,Q,R)$ mit P,Q,R erfüllen die Integrabilitätsbedingungen

Wir halten (y,z) fest und bestimmen eine Stammfunk. $p(x,y,z)$ für $x \longmapsto P(x,y,z)$

$\Rightarrow U(x,y,z) = p(x,y,z) + q(y,z)$

und es gilt $\partial_y q = Q - \partial_y p$ und $\partial_z q = R - \partial_z p$

Die Bestimmung von q erfolgt wie in (a).

Beispiel $v(x,y,z) = (\underbrace{2x\cos y - 2z^3}_{=:P}, \underbrace{3+2ye^z - x^2\sin y}_{=:Q}, \underbrace{y^2e^z - 6xz^2}_{=:R})$

ist konservativ.

$\partial_y P = -2x\sin y = \partial_x Q \qquad \partial_z P = -6z^2 = \partial_x R \qquad \partial_z Q = 2ye^z = \partial_y R$

Wir lassen y,z fest und integrieren P nach x:

$p(x,y,z) = x^2\cos y - 2xz^3$

$\Rightarrow U(x,y,z) = x^2\cos y - 2xz^3 + q(y,z)$

$\partial_y q = Q - \partial_y p = 3 + 2ye^z - x^2\sin y + x^2\sin y = 3 + 2ye^z$

integrieren nach y:

$q(y,z) = 3y + y^2e^z + r(z)$

$\Rightarrow \partial_z q = R - \partial_z p = y^2e^z - 6xz^2 + 6xz^2 = y^2e^z$

$\Rightarrow r'(z) = \partial_z q - y^2e^z = 0 \qquad \Rightarrow r(z) = \text{Konstante}$

$\Rightarrow U(x,y,z) = x^2\cos y - 2xz^3 + 3y + y^2e^z$