NUMERISCHE METHODEN FÜR STOCHASTISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

R. SCHULZE ; W. RÖMISCH

In dieser Arbeit wird das Kennwertanalyseproblem für nichtlineare stochastische Differential- bzw. Volterrasche Integralgleichungen behandelt. Dafür werden Verfahren abgeleitet, die eine unmittelbare numerische Umsetzung gestatten und die am Ende dieses Artikels an einem Beispiel illustriert werden.

Diese Arbeit baut auf den Ergebnissen der Arbeit /1/ auf. Zunächst betrachten wir eine Klasse von Operatoren, die auf stochastischen Prozessen erklärt sind und in gewissem Sinne determiniert wirken. Es zeigt sich, daß Operatoren dieser Klasse bezüglich der in /1/ hergeleiteten Näherungsdarstellungen für stochastische Prozesse (Simulation) günstige Eigenschaften besitzt. Andererseits lassen sich sowohl Kennwerte von Prozessen als auch Lösungsoperatoren von Differentialgleichungen bzw. Integralgleichungen durch solche Operatoren beschreiben. Durch Anwendung von Näherungsdarstellungen für stochastische Prozesse und geeigneten numerischen Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen und geeigneten Darstellungen der gesuchten Kennwerte ergeben sich die gewünschten numerischen Verfahren.

$(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sei ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum.

1. Definition:

Seien $p, p' \geq 1$ $\quad M \subseteq (R, L_p(\Omega, \mathfrak{A}, P))$ ein Banachraum stochastischer Prozesse. Ein Operator

$D: \; M \longrightarrow (R, L_{p'}(\Omega, \mathfrak{A}, P))$ heißt determiniert $\underset{\text{def}}{=}$

Es gibt eine Abbildung

$d: \; (R,R) \longrightarrow (R,R)$ und es gibt eine Menge

$N \subseteq M$ dicht, derart daß für alle $x \in N$ gilt:

$D(x)(\omega) = d(x(\cdot, \omega))$ P-f.ü.

2. Bemerkungen:

a) D determiniert heißt: Das Bild des Operators D läßt sich mittels d für bestimmte Prozesse (z.B. R-stetige) realisierungsweise gewinnen.

b) Der Begriff der Determiniertheit eines Operators stellt in gewisser Hinsicht eine Verallgemeinerung des Begriffes Nemycki-Operator dar, denn jeder Nemycki-Operator ist determiniert.

c) Eine Verallgemeinerung für Vektorprozesse ist möglich.

d) Interessiert o.g. Eigenschaft für fest vorgegebenes d,N, so schreiben wir d-, N- bzw. (d,N)-determiniert.

e) Die Hintereinanderausführung D_2D_1 zweier Operatoren D_1, (d_1,N)-determiniert und D_2, $(d_2,D_1(N))$-determiniert ist (d_2d_1,N)-determiniert.

Im weiteren betrachten wir speziell folgende Räume:

$$C \underset{\text{def}}{=} C\left([0,T], L_2(\Omega,\mathfrak{A},P)\right)$$

$$C_R \underset{\text{def}}{=} \left\{x \mid x \in ([0,T]\times\Omega, R) \text{ und } x \text{ R-stetig und } x \in C\right\}$$

Gemäß den Approximationsaussagen für stetige Prozesse in /1/ gilt C_R dicht in C.

Ferner erklären wir Projektoren von C in C der Gestalt:

$$(P_u x)(t) \underset{\text{def}}{=} E^{\mathfrak{A}_u} x(t)$$

$$(P_u^{(m)} x)(t) \underset{\text{def}}{=} E^{\mathfrak{A}_u^{(m)}} x(t) \qquad t \in [0,T]$$

$$\left(P_u C \supseteq P_u^{(m)} C \subseteq C_R \right)$$

3. Satz:

Vor.: a) $x,u \in C$ $\quad \mathfrak{A}_u$ die von u erzeugte σ-Algebra

b) $D: C \longrightarrow C$ (d,C_R)-determiniert und stetig in $P_u x$

Beh.: $DP_u x$ ist $\mathfrak{A}_u$-meßbar.

Bew.:

Es gilt: $P_u^{(m)} x \in C_R$ und $P_u^{(m)} x$ $\mathfrak{A}_u$-meßbar,

$$P_u^{(m)} x = \sum_l a_l \cdot 1_{A_l^{(m)}} \quad , \; a_l \in C\left([0,T], R\right) \text{ und}$$

$\{A_l^{(m)}\}_l$ Ereignisdisjunktion.

Da D (d,C_R)-determiniert und $\{A_l^{(m)}\}$ Ereignisjunktion ist

$$D(P_u^{(m)}x) = \sum_l d(a_l)\cdot 1_{A_l^{(m)}} \quad \text{und folglich}$$

$$D(P_u^{(m)}x) \quad \mathfrak{A}_u\text{-meßbar.}$$

Da ferner $P_u x = \lim_{m\to\infty} P_u^{(m)}x$ und D in $P_u x$ stetig folgt

$D(P_u x)$ $\mathfrak{A}_u$-meßbar.

q.e.d.

4. Folgerung: Vor.: Wie in Satz 3

Beh.: a) $DP_u x = P_u D P_u x$

b) $D\,P_u^{(m)}x = P_u^{(m)}\,D\,P_u^{(m)}x \in P_u^{(m)}C \subseteq C_R$

5. Definition:

Ist I eine nichtleere Indexmenge, $K = \{K_i\}_{i \in I}$

$K_i:\ M \longrightarrow (R, L_2(\Omega,\mathfrak{A},P)) \quad i \in I$ eine Familie

determinierter Operatoren,

$z \in (R, L_2(\Omega,\mathfrak{A},P))$ dann heißt

$$F_K(x,i,t,s,z) \stackrel{\text{def}}{=} E(K_i(x)(t)\cdot z(s)) \qquad t \in D_x,\ s \in D_z$$

(K,z)-Kennwert von x.

6. Bemerkungen:

a) Die Parameter i,t,s gestatten die Beschreibung von Kennwertfunktionen.

b) Stetigkeits- und Linearitätseigenschaften werden durch die entsprechenden Eigenschaften der Operatorfamilie K vermittelt.

c) Beispiele:

- Kreuzkorrelationsfunktion von x und z:

  $I \stackrel{\text{def}}{=} \{i\}$ K_i: k_i-determiniert mit

  $k_i(r) \stackrel{\text{def}}{=} r \quad r \in R$ (Nemycki-Operator)

  $F_K(x,i,t,s,z) = R_{xz}(t,s)$

- eindimensionale Verteilung von x:

  $z \equiv 1$, $I \stackrel{\text{def}}{=} R$, K_i : k_i-determiniert mit

  $$k_i(r) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & r \leq i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

  $F_K(x,i,t,s,z) = F_{x(t)}(i)$

Im weiteren betrachten wir Volterrasche Integralgleichungen der Form:

$$x(t) = v + \int_0^t f(t,s,x(s),u(s))\,ds \qquad t \in [0,T] \qquad (1)$$

$$= Q(v,x,u)(t)$$

unter folgenden Voraussetzungen:

$u \in C$

$v \in L_2 \stackrel{\text{def}}{=} L_2(\Omega,\mathfrak{A},P)$

$f \in [[0,T] \times [0,T] \times R \times R,\ R)$ stetig und in den letzten beiden Argumenten Lipschitzstetig mit L.

(Der Operator f unter dem Integral ist der durch f erzeugte Nemycki-Operator)

7. Satz:

Q ist auf C^3 (q,C_R^3)-determiniert mit

$$q(r,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} r + \int_0^t f(t,s,a(s),b(s))\,ds, \text{ wobei}$$

$r \in R$, $a,b \in C\,[[0,T],R)$

$((v,x,u) \in C^3$ mit $v(t) \stackrel{\text{def}}{=} v \quad t \in [0,T]$)

Bew.: Die Aussage ergibt sich unmittelbar aus den Eigenschaften von f (Nemycki-Operator) und der Integraloperatoren.

8. Satz:

a) Für beliebige $(v,u) \in L_2 \times C$ gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung $x^* \in C$ von

$$x = Q(v,x,u)$$

Die Zuordnung $(v,u) \longrightarrow x$ werde mit

$S \in [L_2 \times C\ ,\ C)$ bezeichnet, d.h. $S(v,u) = x^*$.

(S ist Lösungsoperator für die verallgemeinerte Integralgleichung (1))

b) Für beliebige $(r,a) \in R \times C[[0,T],R)$ gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung $b^* \in C[[0,T],R)$ von

$$b = q(r,b,a) \tag{2}$$

Die Zuordnung $(r,a) \longrightarrow b$ werde mit

$s \in [R \times C[[0,T],R)\ ,\ C[[0,T],R))$ bezeichnet, d.h.

$s(r,a) = b^*$

(s ist Lösungsoperator für die gewöhnliche Integralgleichung (2))

c) S bzw. s sind stetig und es gilt

$$\|S(v_1,u_1) - S(v_2,u_2)\|_C \le e^{LT} \left\{ \|v_1 - v_2\|_{L_2} + L \int_0^T \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L_2} ds \right\}$$

für beliebige $v_1, v_2 \in L_2$ und $u_1, u_2 \in C$

bzw. analog für s.

d) S ist (s, C_R^2)-determiniert.

Bew.: Die Aussagen a) bis c) sind bekannte Resultate für Gleichungen in Banachräumen.

d) Sei $(v,u) \in C_R^2$ beliebig und

$x_1(\omega) = s(v(\omega), u(\omega))$ P-f.ü. so gilt

wegen c) (für s) $x_1 \in C_R$ (vgl. /2/ Abschnitt 3).

Durch Anwendung von Satz 7 erhalten wir das gewünschte Resultat.

q.e.d.

Der nun folgende Satz stellt die Beziehungen zwischen Kennwertermittlung, Gleichungslösung und Approximation stoch. Prozesse her und bildet die Grundlage für die Verfahren. Dies wird durch Satz 8d), Folgerung 4 und Bemerkung 2e) vermittelt.

9. Satz:

Vor.: a) Für Gleichung (1) gelten die oben genannten Voraussetzungen, $x^* = S(v,u)$

b) F_K sei ein determinierter in x^* stetiger (K,z)-Kennwert

c) $P^{(m)}_{(v,u)}$ wie oben erklärt

$P^{(m)}_{(v,u)}(v) = \sum_l a_l 1_{A_l^{(m)}}$ $\qquad a_l \in R$

$P^{(m)}_{(v,u)}(u) = \sum_l b_l 1_{A_l^{(m)}}$ $\qquad b_l \in C[[0,T],R)$

$P^{(m)}_{(v,u)}(z) = \sum_l c_l 1_{A_l^{(m)}}$ $\qquad c_l \in C[[0,T],R)$

Beh.: a) $S(P^{(m)}_{(v,u)}(v)\ ,\ P^{(m)}_{(v,u)}(u)) = \sum_l e_l 1_{A_l^{(m)}}$

mit $e_l = s(a_l, b_l)$

$x^* = \lim_{m \to \infty} S(P^{(m)}_{(v,u)}(v)\ ,\ P^{(m)}_{(v,u)}(u))$

b) $F_K(x^*, i, t, s, z) = \lim_{m \to \infty} \sum_l k_i(e_l)(t) \cdot c_l(s) \cdot P(A_l^{(m)})$

10. Praktische Realisierung der Verfahren:

(i) Bestimmung bzw. Berechnung von

$\{ a_l = E(v \mid A_l^{(m)})\ ,\ b_l = E(u \mid A_l^{(m)})$

$c_l = E(z \mid A_l^{(m)})\ ,\ P(A_l^{(m)}) \}_l$

mittels einer der in /1/ angedeuteten Verfahren:

a) Messung der Größen erfordert keinen höheren Aufwand als die Messung von Verteilungsfunktionen

b) Berechnung dieser Größen aus anderen Kennwerten

b1) aus Verteilungsfunktionen

b2) aus anderen Kenngrößen bei speziellen Prozeßklassen; z.B.:

b21) Gaußprozesse aus Korrelationsfunktionen

b22) Markovprozesse aus den Übergangsdichten

(ii) Berechnung von $\{ s(a_l,b_l) = e_l \}_l$, d.h. Lösung von gewöhnlichen Integralgleichungen

$$e_l(t) = a_l + \int_0^t f(t,s,e_l(s),b_l(s)) \cdot ds$$

bzw. einer Differentialgleichung

$$\dot{e}_l(t) = f(t,e_l(t),b_l(t)) \quad \text{mit} \quad e_l(0) = a_l$$

mittels geeigneter numerischer Verfahren

(iii) Nachweis der Determiniertheit und Stetigkeit in x^* von F_K ; insbesondere Angabe der erzeugenden Operatoren k_i $i \in I$, die in den meisten Fällen reellwertige Funktionen sind, d.h. K_i sind Nemycki-Operatoren und damit F_K determiniert

(iv) Berechnung von $k_i(e_l)$ $i \in I$

(v) "Mittelwertbildung"

$$\sum_l k_i(e_l)(t) \cdot c_l(s) \cdot P(A_l^{(m)})$$

stellt Näherung für den gesuchten Kennwert F_K von x^* dar.

11. Bemerkungen:

a) Das gesamte Verfahren ist in dem Sinne vollständig determiniert, daß explizit die Realisierungen und Maße für die Simulation z.B. aus vorgegebenen Verteilungen berechnet werden können, d.h. es kann vollständig auf Zufallsgeneratoren verzichtet werden.

b) Es wird herausgestellt, für welche Klassen von Kennwerten und Gleichungen die Verfahren möglich sind. In dieser Arbeit z.B. beliebige nichtlineare Differentialgleichungen für die der Existenz- und Eindeutigkeitssatz gültig ist und der stochastische Anteil der rechten Seite sich auf einen stochastischen "Eingangsprozeß" beschränkt.

c) Es läßt sich eine sehr große Klasse von stochastischen Prozessen behandeln (hier zunächst q.m.-stetige Prozesse). Für spezielle Prozeßklassen vereinfacht sich die Ermittlung der Eingangskennwerte.

d) Eine Verallgemeinerung der Verfahren für andere Typen von Gleichungen und andere Prozeßklassen ist möglich und zum Teil bereits vorgenommen.

e) Die Autoren erarbeiteten ein ALGOL-Programm zur Realisierung des Verfahrens für Gaußsche Eingangsprozesse für Differentialgleichungen.

f) Der Nachteil der Verfahren liegt in dem recht hohen numerischen Aufwand begründet. Sofern spezielle Methoden vorliegen, sollten diese angewandt werden (z.B. Korrelationsmethoden).

Beispiel:

Aufgabenstellung (ZIMM der AdW, Prof. Hennig, Dr. Friedrich)

Gegeben sei eine Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\alpha\,\dot{x}(t) + x(t) + \varepsilon\, x^3(t) = u(t) \qquad t \in [0,T]$$

u stationär, normalverteilt mit

$$E(u(t)) \equiv 0 \qquad E(u(t+s)\ u(t)) = R_{uu}(s) = 2\, e^{-2|s|}$$

$$\alpha = 0.1 \quad , \quad \varepsilon = 0.1$$

Gesucht ist eine Familie von Kennwerten der Art

$$F((x,\dot{x}),a) = \int_0^T \int_0^\infty b\ f_{x(t),\dot{x}(t)}(t,a,b)\ db\ dt$$

$$a \in [-3\ ,\ 3] \qquad T = 2.5$$

(Versagenswahrscheinlichkeiten)

a) von der Lösung x zum Anfangswert 0

b) vom stationären Anteil der Lösung

Vorgehen entsprechend 10. :

(i) - Aufstellen der Korrelationsmatrizen

$$R_u(t) = (E(u(t_i)\ u(t_j)))_{i,j} = (r_{i,j})_{i,j}$$

$$i,j = 1,\dots,k+1 \qquad t_{k+1} \overset{=}{\text{df}} t$$

- Berechnung der Inversen der Korrelationsmatrix R_u^{-1} und der Determinante $\det(R_u(t))$

- Berechnung der Koeffizientenfunktionen führt auf Integrale der Gestalt

$$b_1(t) = \frac{-1}{2b_o(b_o(2\pi)^k \det(R_u))^{1/2}}$$

$$\int_{I_{l_1}} \cdots \int_{I_{l_k}} c_o \exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{c_o^2}{4b_o} - d_o\right)\right) da_1 \ldots da_k$$

$$b_o = r_{oo} \quad , \quad c_o = 2\sum_{j=1}^{k} r_{oj} a_j \quad , \quad d_o = \sum_{i,j=1}^{k} a_i r_{ij} a_j$$

und analog für die Maße $P(A_1^{(m)})$.
Andere Eingabekennwerte werden in diesem Fall nicht benötigt.

(ii) Zur Lösung der Differentialgleichung wurde ein einfaches numerisches Verfahren (Trapezregel) angewandt. Zur Bestimmung des stationären Anteils der Lösung wurde das Randwertproblem $x(0) = x(T)$ durch mehrmaliges Lösen der Differentialgleichung näherungsweise gelöst (heuristisches Vorgehen).

(iii) Nachweis der Determiniertheit von F:
Setzen wir

$$g(r) \underset{\text{def}}{=} \begin{cases} r & r > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad z \equiv 1$$

$$H_a(r) \underset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & r < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

so ergibt sich unter Berücksichtigung einer genäherten Differentiation:

$$F((x,\dot{x}),a) = E\left(\frac{1}{h}\int_0^T g(\dot{x}(t))\,(H_{a+\frac{h}{2}}(x(t) - H_{a-\frac{h}{2}}(x(t)))dt\right)$$

und damit die Determiniertheit.

(iv),(v) Wird direkt durch Realisierung der Funktion g und H_a und durch eine geeignete Integrationsregel aus den Koeffizientenfunktionen von $x,\dot{x}$ und der Maße $P(A_1^{(m)})$ vorgenommen.

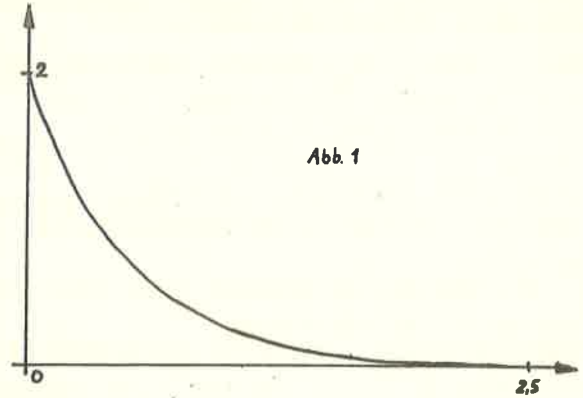

Abb. 1

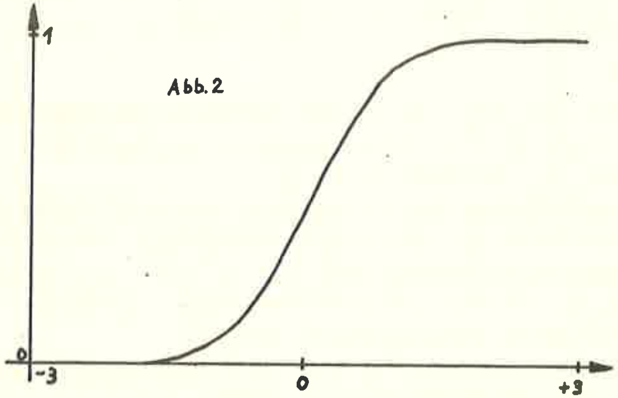

Abb. 2

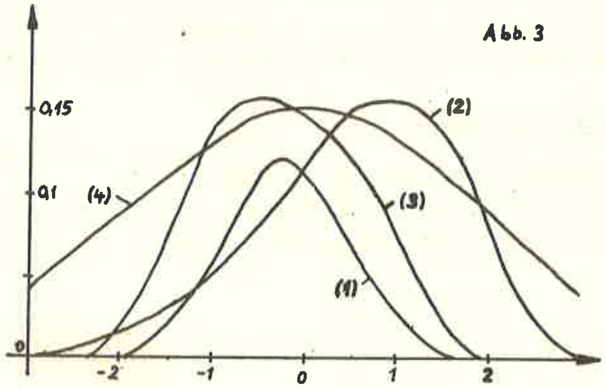

Abb. 3

Die Ergebnisse wurden grafisch ausgewertet:

Abb. 1 zeigt die Autokorrelationsfunktion der rechten Seite. Sie wurde als einzige Eingabefunktion benötigt.

Abb. 2 zeigt die Verteilungsfunktion des stationären Anteils der Lösung.

Abb. 3: In Abhängigkeit vom Parameter a werden die gesuchten Kennwerte für verschiedene Projektionsordnungen dargestellt:
Kurve (1) entspricht der niedrigsten und Kurve (3) der höchsten Projektionsordnung.
Zum Vergleich werden in Kurve (4) die Ergebnisse im linearen Fall ($\varepsilon = 0$), die analytisch gewonnen wurden (Dr. Friedrich), wiedergegeben.

Literatur:

/1/ Römisch, W.; Schulze, R.: Ein Verfahren zur numerischen Simulation stochastischer Prozesse; in diesem Heft

/2/ Römisch, W.; Schulze, R.; Sohr, D.: Kennwertmethoden für Volterrasche Integralgleichungen in stochastischen Prozessen; Dissertation, Humboldt-Universität zu Berlin, 1976

/3/ Bunke, H.: Gewöhnliche Differentialgleichungen mit zufälligen Parametern, Berlin 1972

/4/ Römisch, W.; Schulze, R.; Sohr, D.: Numerische Realisierung von Kennwertmethoden für nichtlineare Integralgleichungen und Differentialgleichungen in stochastischen Prozessen, Forschungsbericht, Humboldt-Universität zu Berlin, 1974

Anschrift der Verfasser:

Dr. Werner Römisch; Dr. Reinhard Schulze
Humboldt-Universität, Sektion Mathematik, Bereich Numerik
1086 Berlin, Unter den Linden 6, Postfach 1297