SS 2024 Marc Kegel

Differentialtopologie

Blatt 3

Aufgabe 1.

(a) Die n-Späre S^n ist eine zusammenhängende, kompakte, orientierbare, glatte Mannigfaltigkeit ohne Rand.

(b) Was ist die minimale Anzahl von Karten in einem glatten Atlas von S^n?

(c) Das Möbiusband ist eine zusammenhängende, kompakte, nicht-orientierbare, glatte Mannigfaltigkeit. Was ist der Rand des Möbiusbandes?

(d) Ist das Achsenkreuz $\{xy = 0\}$ in $\mathbb{R}^2$ eine Mannigfaltigkeit?

(e) Das Produkt zweier glatter Mannigfaltigkeiten ist eine glatte Mannigfaltigkeit.

(f) Untermannigfaltigkeiten sind Mannigfaltigkeiten.

(g) Eine Fläche ist genau dann orientierbar, wenn sie kein Möbiusband enthält, d.h. genau dann wenn es keinen geschlossenen Weg gibt, der Rechts und Links vertauscht.

(h) R^n ist homöomorph zu $D^n \setminus S^{n-1}$.

Aufgabe 2.

(a) Die Komposition und das Produkt von Einbettungen sind wieder Einbettungen.

(b) Gibt es eine Einbettung von $S^n \to \mathbb{R}^n$?

(c) Gibt es eine Einbettung von $S^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$?

(d) $S^{n_1} \times \cdots \times S^{n_k}$ kann in $\mathbb{R}^{n_1+\cdots+n_k+1}$ eingebettet werden.

(e) Die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon [0, 2\pi] \times [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^5 \\ (x, y) &\longmapsto (\cos x, \cos 2y, \sin 2y, \sin x \cos y, \sin x \sin y) \end{aligned}$$

induziert eine Einbettung der Kleinschen Flasche in den $\mathbb{R}^5$.

(f) Kann man die Kleinsche Flasche auch in den $\mathbb{R}^4$ einbetten?

Aufgabe 3.

Fertigen Sie Skizzen von möglichst vielen nicht-transversalen Schnitten und ihren transversalen Störungen an.

Aufgabe 4.
Der n-dimensionale reell projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ ist der Quotientenraum von S^n, der durch die Identifikation von Antipodenpunkten entsteht, d.h. $\mathbb{R}P^n := S^n/_\sim$ mit $x \sim y$ für $x, y \in S^n$ genau dann, wenn $y = x$ oder $y = -x$.

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Definitionen äquivalent zu dieser Definition von $\mathbb{R}P^n$ sind, d.h., dass sie zu Räumen führen, die homöomorph zu $\mathbb{R}P^n$ sind:

(i) Beginne mit $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ und identifiziere Punkte, die auf derselben Geraden durch den Ursprung liegen, d.h. bilde den Quotientenraum $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/_\sim$ mit $x \sim y$ für $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ genau dann, wenn ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert, so dass $x = \lambda y$. (Man sagt dann auch: $\mathbb{R}P^n$ ist der Raum der Ursprungsgeraden im $\mathbb{R}^{n+1}$.)

(ii) Beginne mit der n-dimensionalen Kreisscheibe D^n und identifiziere Antipodenpunkte auf dem Rand $\partial D^n = S^{n-1}$, d.h. $D^n/_\sim$ mit $x \sim y$ für $x, y \in D^n$ genau dann, wenn $y = x$ oder $y \in S^{n-1}$ mit $y = -x$.

(b) $\mathbb{R}P^n$ ist eine zusammenhängende, kompakte, glatte Mannigfaltigkeit. Ist $\mathbb{R}P^n$ orientierbar?

(c) Sei M ein Möbiusband. Sein Rand ist $\partial M = S^1$. Verklebe M mit einer Kreisscheibe D^2 entlang des Randes, d.h. bilde $D^2 \cup_\varphi M$ mit $\varphi = \mathrm{id}_{S^1}$. Zeigen Sie, dass dieser Raum homöomorph zu $\mathbb{R}P^2$ ist.

(d) Das Verkleben zweier Möbiusbänder entlang ihrer Ränder liefert eine Kleinsche Flasche.

Bonusaufgabe 1.
Der **komplex projektive Raum** $\mathbb{C}P^n$ ist definiert als der Quotientenraum von $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ (oder $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$) unter der Äquivalenzrelation $(z_0, \dots, z_n) \sim (w_0, \dots, w_n) :\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : (z_0, \dots, z_n) = (\lambda w_0, \dots, \lambda w_n)$. Die Äquivalenzklasse eines Punktes $(z_0, \dots, z_n)$ bezeichnet man mit **homogenen** Koordinaten $[z_0 : \dots : z_n]$. Man kann $\mathbb{C}P^n$ auch als den Raum der komplexen Geraden durch den Ursprung in $\mathbb{C}^{n+1}$ auffassen. Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}P^n$ eine orientierbare Mannigfaltigkeit ist.

Bonusaufgabe 2.
Wir betrachten die Oberfläche W eines Einheitswürfels

$$W := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \max_i (|x_i|) = 1 \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass W keine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass W eine topologische Mannigfaltigkeit ist und definieren Sie eine differenzierbare Struktur auf W.

Bonusaufgabe 3.

(a) Beschreiben Sie einen lokal Euklidschen Raum mit abzählbarer Basis der Topologie der nicht Hausdorffsch ist.

(b) Beschreiben Sie topologische Räume, die keine abzählbaren Basen besitzen.