

Universität zu Köln  
Mathematisches Institut

# Masterarbeit

**Symplektisches Füllen von Torusbündeln**

von Marc Kegel



Köln, 16. August 2014

**Betreuer:**

Prof. Hansjörg Geiges



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Motivation und Einleitung</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Kontaktgeometrie</b>	<b>9</b>
2.1	Kontaktmannigfaltigkeiten . . . . .	9
2.2	Legendre-Knoten . . . . .	14
2.3	Straffe und überdrehte Kontaktstrukturen . . . . .	16
2.4	Universell straffe und virtuell überdrehte Kontaktstrukturen . . . . .	20
2.5	Symplektische Mannigfaltigkeiten . . . . .	25
2.6	Symplektische Füllungen und Kobordismen . . . . .	28
2.7	Die charakteristische Blätterung . . . . .	35
2.8	Konvexe Flächen . . . . .	38
2.9	Kontaktstrukturen auf Volltori . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Torusbündel über <math>S^1</math></b>	<b>46</b>
3.1	Flächenbündel über $S^1$ . . . . .	46
3.2	Die Abbildungsklassengruppe . . . . .	51
3.3	Die spezielle lineare Gruppe . . . . .	53
3.4	Klassifikation der Torusbündel über $S^1$ . . . . .	60
3.5	Kontaktstrukturen auf Torusbündeln über $S^1$ . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Lefschetz-Faserungen und die schwache Füllbarkeit</b>	<b>87</b>
4.1	Lefschetz-Faserungen . . . . .	88
4.2	Monodromie einer Lefschetz-Faserung über $D^2$ . . . . .	101
4.3	Lefschetz-Faserungen und symplektische Mannigfaltigkeiten . . . . .	111
4.4	Die schwache Füllbarkeit der Torusbündel . . . . .	113
<b>5</b>	<b>Kontakt-Dehn-Chirurgie und die starke Füllbarkeit</b>	<b>117</b>
5.1	Topologische Dehn-Chirurgie . . . . .	117
5.2	Kontakt-Dehn-Chirurgie . . . . .	119

5.3	Beispiele und einfache Anwendungen der Kontakt-Dehn-Chirurgie . . . .	128
5.4	Die starke Füllbarkeit der Torusbündel und der Algorithmus . . . . .	143
<b>6</b>	<b>Veränderung der Monodromie durch Dehn-Chirurgie</b>	<b>151</b>
6.1	Der topologische Fall . . . . .	152
6.2	Der glatte Fall . . . . .	156
6.3	Konstruktion der Kontaktstrukturen mit entsprechender Giroux-Torsion .	158
6.4	Der Kontaktfall . . . . .	163

# **Selbstständigkeitserklärung**

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Masterarbeit selbstständig und nur unter Zuhilfenahme der angegebenen Quellen erstellt habe.

# 1 Motivation und Einleitung

Ziel dieser Masterarbeit ist es, einen Beweis des *Füllbarkeitssatzes von Ding-Geiges* zu geben. Dieser Satz besagt, dass eine spezielle unendliche Familie  $\xi_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) von stratifizierten Kontaktstrukturen auf jedem Torusbündel über  $S^1$  auftritt, so dass diese allesamt schwach symplektisch füllbar sind, aber unendlich viele dieser Kontaktstrukturen nicht stark symplektisch füllbar sind. Dieser Satz ist eine Erweiterung des Füllbarkeitssatzes von Eliashberg, der dasselbe Resultat auf dem 3-Torus liefert. Die Grundlage dafür ist [4].

Eine *Kontaktstruktur* auf einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit ist ein nirgends integrierbares Ebenenfeld im Tangentialbündel dieser Mannigfaltigkeit. Während man Ebenenfelder, welche durch zweidimensionale Blätterungen dieser Mannigfaltigkeit induziert werden, lokal immer als Tangentialbündel einer Untermannigfaltigkeit auffassen kann (dies bedeutet integrierbar), ist dies bei Kontaktstrukturen nirgends möglich. In gewisser Weise sind Kontaktstrukturen also das Gegenteil von Blätterungen. Die Motivation für diese Kontaktstrukturen stammt allerdings aus der theoretischen Physik. Dort treten Kontaktmannigfaltigkeiten zum Beispiel als Energiehyperflächen in Phasenräumen (also symplektischen Mannigfaltigkeiten) auf (siehe dazu [13, Kapitel 1]).

Eine Kontaktstruktur heißt *stark symplektisch füllbar*, falls man sie als orientierten Rand einer kompakten symplektischen Mannigfaltigkeit schreiben kann, so dass die symplektische Form mittels eines Liouville-Vektorfeldes transversal zu der Kontaktmannigfaltigkeit die Kontaktstruktur induziert. Es folgt dann sofort, dass jede stark symplektisch füllbare Kontaktstruktur auch *schwach symplektisch füllbar* ist, das heißt man kann die Kontaktmannigfaltigkeit als orientierten Rand einer kompakten symplektischen Mannigfaltigkeit schreiben kann, so dass die symplektische Form eingeschränkt auf die Kontaktstruktur nicht-degeneriert ist. Der Füllbarkeitssatz von Ding-Geiges ist also ein Schritt hin zum Verständnis der Unterschiede dieser beiden Füllbarkeitsbegriffe.

In Kapitel 2 wird genauer erklärt, was eine Kontaktstruktur ist, und es wird eine kurze Einführung in die hier benötigten Grundbegriffe der Kontaktgeometrie gegeben. Insbesondere werden die verschiedenen Füllbarkeitsbegriffe erklärt und es wird eine Einfüh-

rung in die Theorie der *konvexen Flächen* gegeben, dem Hauptwerkzeug für Chirurgiekonstruktionen in einer Kontaktmannigfaltigkeit.

In Kapitel 3 geht es dann um die *Torusbündel* über  $S^1$ . Zuerst werden diese rein topologisch betrachtet. Es wird sich herausstellen, dass ein Torusbündel bis auf Diffeomorphie eindeutig durch die Angabe einer Matrix in  $SL_2(\mathbb{Z})$ , der sogenannten *Monodromie*, bestimmt ist. Damit wird dann eine Klassifikationsaussage bis auf Diffeomorphie gegeben. Als nächstes wird die unendliche Familie  $\xi_n$  der straffen Kontaktstrukturen auf den Torusbündeln aus dem Füllbarkeitssatz von Ding-Geiges konstruiert.

Die nächsten Kapitel beschäftigen sich dann hauptsächlich mit dem Beweis des Füllbarkeitssatzes von Ding-Geiges. Zuerst wird im vierten Kapitel eine Einführung in die Theorie der *Lefschetz-Faserungen* geben. Das sind sehr grob gesprochen 4-Mannigfaltigkeiten, die man außerhalb von endlich vielen isolierten Punkten als Flächenbündel über einer Fläche schreiben kann. Es wird sich dann herausstellen, dass man jedes Torusbündel über  $S^1$  als orientierten Rand einer Lefschetz-Faserung erhalten kann. Damit ist es dann leicht, jedes Torusbündel über  $S^1$  als ein *Kirby-Diagramm* darzustellen, ein dreidimensionales Diagramm, das schon alle Informationen über das Torusbündel und die zugehörige Lefschetz-Faserung enthält.

Um nun zu zeigen, dass die Torusbündel mit den entsprechenden straffen Kontaktstrukturen alle schwach symplektisch füllbar sind, benutzt man den *symplektischen Faserungssatz von Gompf-Thurston*, der besagt, dass (fast alle) Lefschetz-Faserungen eine symplektische Struktur tragen, von denen man nachrechnen kann, dass diese eine schwache symplektische Füllung der entsprechenden Torusbündel liefern.

Für die Aussage, dass auf jedem Torusbündel unendlich viele nicht stark symplektisch füllbare Kontaktstrukturen existieren, wird in Kapitel 5 die *Kontakt-Dehn-Chirurgie* eingeführt. *Dehn-Chirurgie* ist eine Konstruktionsmethode für dreidimensionale Mannigfaltigkeiten. Grob gesprochen wird ein Volltorus aus einer 3-Mannigfaltigkeit herausgeschnitten und dann auf eine andere Art wieder hineingeklebt. Man kann dann zeigen, dass das entstandene Objekt wieder eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit ist, die nur von sehr wenigen Daten abhängt, nämlich von der Seele des herausgeschnittenen Volltorus (einem Knoten) und dem sogenannten *Chirurgiekoeffizienten*, einer rationalen Zahl, welche die Anklebeabbildung beschreibt. Es zeigt sich dann, dass die Dehn-Chirurgie ein sehr starkes Werkzeug in der Theorie der dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten ist. Zum Beispiel kann jede dreidimensionale (zusammenhängende, orientierbare, geschlossene) Mannigfaltigkeit aus  $S^3$  durch Chirurgie entlang einer Verschlingung erhalten werden (Satz von Dehn-Lickorish). Weiter lassen sich viele Eigenschaften dreidimensionaler

Mannigfaltigkeiten verträglich mit Dehn-Chirurgie machen, das heißt sie bleiben unter Dehn-Chirurgie erhalten. So kann man ausgehend vom Satz von Dehn-Lickorish zeigen, dass jede dreidimensionale (zusammenhängende, orientierbare, geschlossene) Mannigfaltigkeit eine dreifach verzweigte Überlagerung über  $S^3$  besitzt (Satz von Hilden-Montesinos; für dies und weitere Informationen siehe [29]) oder dass jede solche Mannigfaltigkeit die Struktur eines offenen Buches hat (siehe [28, Satz 9.1.3]).

Im ersten Teil von Kapitel 5 wird gezeigt, dass man Dehn-Chirurgie auch verträglich mit Kontaktstrukturen ausführen kann. Weiter kann man sich überlegen, dass bestimmte Dehn-Chirurgien, nämlich die mit *Kontakt-Dehn-Chirurgiekoeffizienten*  $+1$ , die Eigenschaft einer Kontaktstruktur, nicht stark symplektisch füllbar zu sein, erhalten. Die Idee im Beweis des Füllbarkeitssatzes von Ding-Geiges ist dann die folgende:

Man beginnt mit einer (nach dem Füllbarkeitssatz von Eliashberg) nicht stark symplektisch füllbaren Kontaktstruktur auf dem 3-Torus und führt eine Sequenz von  $+1$ -Kontakt-Dehn-Chirurgien aus. In Kapitel 6 wird dann explizit nachgerechnet, dass man so wieder ein Torusbündel über  $S^1$  erhalten kann und jede dieser  $+1$ -Kontakt-Dehn-Chirurgien die Monodromie dieses Torusbündels um einen *Dehn-Twist* ändert. Ein Resultat aus Kapitel 3 besagt, dass man jede Monodromie als Komposition von Dehn-Twists erhalten kann. Somit kann man so jedes beliebige Torusbündel über  $S^1$  erhalten. In Kapitel 6 wird weiter nachgerechnet, dass man so auch fast alle straffen Kontaktstrukturen der unendlichen Familie  $\xi_n$  erhalten kann, womit dann der Füllbarkeitssatz von Ding-Geiges folgt.

In Kapitel 5 wird weiter ein Algorithmus angegeben, der für ein beliebiges Torusbündel über  $S^1$  eine Schranke liefert, ab der die straffen Kontaktstrukturen  $\xi_n$  nicht mehr stark symplektisch füllbar sind. Diese Schranke ist aber im Allgemeinen nicht optimal.



## 2 Kontaktgeometrie

In diesem Kapitel wird eine kurze Einführung in die Grundbegriffe der Kontaktgeometrie gegeben. Die Grundlage dafür ist [13]. Bevor damit begonnen wird, sollte aber noch erwähnt werden, dass, wenn nicht anders dazugesagt, alle Abbildungen, Mannigfaltigkeiten, etc. als glatt (das heißt unendlich oft differenzierbar) vorausgesetzt werden.

### 2.1 Kontaktmannigfaltigkeiten

Am Anfang steht der Begriff der Kontaktmannigfaltigkeit, welcher seine Motivation aus der theoretischen Physik hat.

**Definition 2.1** (Kontaktmannigfaltigkeit).

*Eine (koorientierbare) Kontaktstruktur  $\xi$  auf einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  ist ein zweidimensionales Unterbündel von  $TM$ , so dass eine 1-Form  $\alpha$  existiert mit  $\xi = \ker \alpha$  und  $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$  (nirgends verschwindend). Eine solche 1-Form  $\alpha$  heißt **Kontaktform** und die Bedingung  $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$  heißt **Kontaktbedingung**.*

*Das Paar  $(M, \xi)$  heißt **Kontaktmannigfaltigkeit**.*

**Bemerkung 2.2**

(1) Das Vorzeichen der Kontaktbedingung ist unabhängig von der speziellen Wahl von  $\alpha$ , denn eine andere Kontaktform für dieselbe Kontaktstruktur unterscheidet sich von  $\alpha$  nur durch eine Funktion  $\lambda: M \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , und dann gilt

$$(\lambda\alpha) \wedge d(\lambda\alpha) = \lambda^2\alpha \wedge d\alpha.$$

(2) Eine Kontaktstruktur induziert deswegen eine Orientierung auf der Kontaktmannigfaltigkeit durch die Volumenform  $\alpha \wedge d\alpha$ . (Diese Orientierung ist unabhängig von der Wahl der Kontaktform.) Also muss eine Kontaktmannigfaltigkeit notwendigerweise orientierbar sein. Hat man eine orientierte Mannigfaltigkeit gegeben, so kann man sinnvoll von positiven (oder negativen) Kontaktstrukturen sprechen, je nachdem, ob die

Orientierung mit der durch  $\xi$  induzierten Orientierung übereinstimmt (oder nicht übereinstimmt).

(3) Den Begriff der Kontaktmannigfaltigkeit kann man noch etwas allgemeiner fassen. Zum einen kann man Kontaktstrukturen in allen ungeraden Dimensionen definieren und zum anderen kann man auch nicht koorientierbare Kontaktstrukturen (was bedeutet, dass eine Kontaktform nur lokal existiert) betrachten. In dieser Arbeit werden allerdings nur koorientierbare Kontaktstrukturen auf dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten betrachtet, weswegen wir die Dimension und die Koorientierbarkeit in Zukunft unterdrücken werden. Die Kontaktstruktur  $\xi$  lässt sich dann durch die Form  $d\alpha$  orientieren. Die Orientierung der Kontaktstruktur hängt also von der Wahl der Kontaktform ab. Wenn eine Kontaktform explizit gegeben ist, so soll die Kontaktstruktur immer durch  $d\alpha$  orientiert sein.

Wenn man ein mathematisches Objekt auf eine solch abstrakte Weise einführt, stellt sich natürlich sofort die Frage, ob es solche Objekte überhaupt gibt. Dazu einige Beispiele:

**Beispiel 2.3**

(1) Betrachte den  $\mathbb{R}^3$  mit kartesischen Koordinaten  $(x, y, z)$ . Die 1-Form

$$\alpha_{st} = x \, dy + dz$$

ist eine Kontaktform, denn  $\alpha_{st} \wedge d\alpha_{st} = dx \wedge dy \wedge dz$  ist eine Volumenform, und definiert somit die sogenannte **Standardkontaktstruktur**  $\xi_{st} := \ker \alpha_{st}$  auf  $\mathbb{R}^3$ . Der Name begründet sich durch den Satz von Darboux, welcher besagt, dass jede Kontaktstruktur lokal wie die Standardkontaktstruktur aussieht (siehe Satz 2.6).

(2) Betrachte  $S^1 \times \mathbb{R}^2$  mit Winkelkoordinate  $\theta$  auf  $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  und kartesischen Koordinaten  $(x, y)$  auf  $\mathbb{R}^2$ . Sei  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , dann ist die 1-Form

$$\alpha_n = \cos(n\theta) \, dx - \sin(n\theta) \, dy$$

eine Kontaktform, denn

$$\begin{aligned} \alpha_n \wedge d\alpha_n &= (\cos(n\theta) \, dx - \sin(n\theta) \, dy) \wedge (-n \sin(n\theta) \, d\theta \wedge dx - n \cos(n\theta) \, d\theta \wedge dy) \\ &= n \, d\theta \wedge dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Also ist  $(S^1 \times \mathbb{R}^2, \xi_n = \ker \alpha_n)$  eine Kontaktmannigfaltigkeit.

(3) Analog dazu betrachte den 3-Torus  $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ , aufgefasst als  $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$  mit

Koordinaten  $(x, y, t)$ . Sei  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , dann ist die 1-Form

$$\alpha_n = \cos(2\pi nt) dx - \sin(2\pi nt) dy$$

eine Kontaktform, denn wie im vorigen Beispiel berechnet man

$$\alpha_n \wedge d\alpha_n = 2\pi n dt \wedge dx \wedge dy.$$

Also ist  $(T^3, \xi_n := \ker \alpha_n)$  eine Kontaktmannigfaltigkeit.

(4) Betrachte den  $\mathbb{R}^3$  mit Zylinderkoordinaten  $(r, \varphi, z)$ . Definiere eine 1-Form durch

$$\alpha_{ot} = \cos r dz + r \sin r d\varphi.$$

Für  $r = 0$  ist zuerst einmal nicht klar, dass dies wohldefiniert ist, da dann  $d\varphi$  nicht wohldefiniert ist. Allerdings ist die 1-Form  $r^2 d\varphi = x dy - y dx$  glatt und die Funktion  $r \mapsto \frac{\sin r}{r}$  besitzt eine differenzierbare Fortsetzung in  $r = 0$ , also ist  $\alpha_{ot}$  wohldefiniert. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \alpha_{ot} \wedge d\alpha_{ot} &= \left( \cos r dz + r \sin r d\varphi \right) \wedge \left( -\sin r dr \wedge dz + (\sin r + r \cos r) dr \wedge d\varphi \right) \\ &= \left( \cos r \sin r + r \cos^2 r + r \sin^2 r \right) dr \wedge d\varphi \wedge dz \\ &= \left( 1 + \frac{\sin r}{r} \cos r \right) r dr \wedge d\varphi \wedge dz. \end{aligned}$$

Wenn man in der Klammer nun in  $r = 0$  wieder differenzierbar fortsetzt, sieht man, dass  $\alpha_{ot}$  eine Kontaktform ist und somit eine Kontaktstruktur  $\xi_{ot} := \ker \alpha_{ot}$  induziert. Der Index  $ot$  steht für *overtwisted* (engl. für überdreht), denn diese Kontaktstruktur nennt man die **überdrehte Standardkontaktstruktur**. (Wofür diese Bezeichnung steht, wird man in Beispiel 2.17 (1) und Definition 2.15 sehen)

Als nächstes ist es ein natürliches Vorgehen, Abbildungen zu definieren, welche die Strukturen einer Kontaktmannigfaltigkeit erhalten.

**Definition 2.4** (Kontaktomorphismus).

Seien  $(M_1, \xi_1)$  und  $(M_2, \xi_2)$  zwei Kontaktmannigfaltigkeiten.

(1) Ein Diffeomorphismus  $f: M_1 \rightarrow M_2$  heißt **Kontaktomorphismus**, wenn er die Kontaktstrukturen erhält. Bei gegebenen Kontaktformen  $\xi_1 = \ker \alpha_1$  und  $\xi_2 = \ker \alpha_2$  heißt dies, dass eine Funktion  $\lambda: M_1 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  existiert mit  $f^* \alpha_2 = \lambda \alpha_1$ .

(2) Zwei Kontaktmannigfaltigkeiten heißen **kontaktomorph**, wenn ein Kontaktomor-

phismus zwischen ihnen existiert.

(3) Eine Einbettung  $f: M_1 \rightarrow M_2$  heißt **Kontakteinbettung**, wenn sie ein Kontaktomorphismus auf ihr Bild ist.

(4) Zwei Kontaktstrukturen  $\xi_1$  und  $\xi_2$  auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  heißen **isotop**, falls es einen Kontaktomorphismus  $(M, \xi_1) \rightarrow (M, \xi_2)$  gibt, der isotop zur Identität ist.

(5) Eine Überlagerung  $f: M_1 \rightarrow M_2$  heißt **Kontaktüberlagerung**, wenn die Kontaktstruktur  $\xi_2$  mittels der Überlagerung  $f: M_1 \rightarrow M_2$  zu der Kontaktstruktur  $\xi_1$  anhebt. Bei gegebenen Kontaktformen  $\xi_1 = \ker \alpha_1$  und  $\xi_2 = \ker \alpha_2$  heißt dies, dass eine glatte Funktion  $\lambda: M_1 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  existiert mit  $f^* \alpha_2 = \lambda \alpha_1$ .

### Beispiel 2.5

Die Kontaktmannigfaltigkeiten  $(S^1 \times \mathbb{R}^2, \xi_n)$  sind alle kontaktomorph zueinander. Dies sieht man wie folgt:

Definiere einen Diffeomorphismus von  $S^1 \times \mathbb{R}^2$  durch

$$f_n(\theta, x, y) := (\theta, x \cos(n\theta) + y \sin(n\theta), -x \sin(n\theta) + y \cos(n\theta)).$$

Die 1-Form  $f_n^* \alpha_n$  ist dann wieder eine Kontaktform, denn  $f_n$  ist ein Diffeomorphismus und somit gilt  $f_n^* \alpha_n \wedge d(f_n^* \alpha_n) = f_n^*(\alpha_n \wedge d\alpha_n) \neq 0$ . Deswegen ist  $f_n$  ein Kontaktomorphismus von  $(S^1 \times \mathbb{R}^2, \ker f_n^* \alpha_n)$  nach  $(S^1 \times \mathbb{R}^2, \xi_n = \ker \alpha_n)$ . Berechnen wir nun diese Kontaktform:

$$\begin{aligned} f_n^* \alpha_n &= f_n^*(\cos(n\theta) dx - \sin(n\theta) dy) \\ &= \cos(n\theta) d(x \cos(n\theta) + y \sin(n\theta)) - \sin(n\theta) d(-x \sin(n\theta) + y \cos(n\theta)) \\ &= \underbrace{(\cos^2(n\theta) + \sin^2(n\theta))}_{=1} dx - \underbrace{(\cos(n\theta) \sin(n\theta) - \sin(n\theta) \cos(n\theta))}_{=0} dy \\ &\quad + \underbrace{(\cos(n\theta) \sin(n\theta) - \sin(n\theta) \cos(n\theta))}_{=0} nx d\theta + \underbrace{(\cos^2(n\theta) + \sin^2(n\theta))}_{=1} ny d\theta \\ &= dx + ny d\theta. \end{aligned}$$

Definiere einen weiteren Diffeomorphismus von  $S^1 \times \mathbb{R}^2$  durch

$$g_n(\theta, x, y) := \left(\theta, x, \frac{1}{n}y\right).$$

Damit gilt:

$$g_n^*(dx + ny d\theta) = dx + n \frac{1}{n} y d\theta = dx + y d\theta$$

Also ist  $g_n$  ein Kontaktomorphismus von  $(S^1 \times \mathbb{R}^2, \ker(dx + y d\theta))$  zu der Kontaktmannigfaltigkeit  $(S^1 \times \mathbb{R}^2, \ker(dx + ny d\theta))$ . Die Behauptung folgt daraus, dass die Relation kontaktomorph zu sein offensichtlich eine Äquivalenzrelation ist. Man bemerke aber, dass die Kontaktstrukturen  $\xi_n$  nicht isotop sind (siehe Beispiel 2.55).

(2) Auf dem 3-Torus hingegen sind die Kontaktstrukturen  $\xi_n$  hingegen alle verschieden, also nicht einmal kontaktomorph (siehe dafür Satz 2.22 (2)).

**Satz 2.6** (Satz von Darboux).

*Sei  $p$  ein Punkt in einer Kontaktmannigfaltigkeit  $(M, \xi)$ . Dann gibt es eine Kontakteinbettung  $(B_{st}, \xi_{st}) \hookrightarrow (M, \xi)$ , die den Ursprung auf  $p$  abbildet. Dabei bezeichnet  $B_{st}$  den Einheitsball im  $\mathbb{R}^3$ .*

*Jede Kontaktmannigfaltigkeit kann also mit solchen Abbildungen als Karten überdeckt werden. Diese Karten nennt man auch **Darboux-Karten**.*

*Beweis.* siehe [13, Satz 2.5.1] □

Der Satz von Darboux sagt also aus, dass lokal alle Kontaktstrukturen gleich aussehen. In der Kontaktgeometrie kann es also (ähnlich wie in der symplektischen Geometrie, aber im Gegensatz zur Riemannschen Geometrie) keine lokalen Invarianten geben.

Ein weiteres zentrales Prinzip der Kontaktgeometrie ist die Gray-Stabilität, welche grob gesprochen besagt, dass es auf einer kompakten Kontaktmannigfaltigkeit keine nicht-trivialen Deformationen der Kontaktstruktur gibt.

**Satz 2.7** (Gray-Stabilität).

*Sei  $\xi_s$  mit  $s \in [0, 1]$  eine glatte Familie von Kontaktstrukturen auf einer geschlossenen Mannigfaltigkeit  $M$ . Dann gibt es eine Isotopie  $(\psi_s)_{s \in [0, 1]}$  von  $M$ , so dass der Diffeomorphismus  $\psi_s: (M, \xi_0) \rightarrow (M, \xi_s)$  ein Kontaktomorphismus für alle  $s \in [0, 1]$  ist.*

*Beweis.* siehe [13, Satz 2.2.2] □

**Bemerkung 2.8**

(1) Für nicht-kompakte Kontaktmannigfaltigkeiten gilt dieser Satz im Allgemeinen nicht. In [8] wird ein Gegenbeispiel auf  $S^1 \times \mathbb{R}^2$  konstruiert.

(2) Der Beweis dieses Satzes funktioniert genauso für  $s$  aus einem halboffenen Intervall  $[0, 1)$ . Später wird dieser Satz meistens in der Version für ein halboffenes Intervall benutzt.

## 2.2 Legendre-Knoten

Als Nächstes betrachten wir eine spezielle Klasse von Knoten in Kontaktmannigfaltigkeiten, die sogenannten Legendre-Knoten. In Kapitel 5 wird dann gezeigt, dass Dehn-Chirurgie entlang dieser Legendre-Knoten verträglich mit der Kontaktstruktur ausgeführt werden kann.

**Definition 2.9** (Legendre-Knoten).

Ein **Legendre-Knoten** in einer Kontaktmannigfaltigkeit  $(M, \xi)$  ist eine Einbettung  $K: S^1 \rightarrow M$  mit  $K'(\theta) \in \xi_{K(\theta)}$  für alle  $\theta \in S^1$ .

**Bemerkung 2.10**

Oft wird mit Legendre-Knoten auch das Bild einer solchen Einbettung bezeichnet. Im Folgenden wird für beides einfach  $K$  geschrieben und nicht mehr zwischen der Einbettung und dem Bild dieser Einbettung unterschieden. Je nach Kontext sollte klar sein, was gemeint ist.

**Beispiel 2.11**

- (1) Betrachte die Kontaktmannigfaltigkeit  $(S^1 \times \mathbb{R}^2, \xi_n)$  aus Beispiel 2.3 (2). Die Einbettung  $S^1 \ni \theta \mapsto (\theta, 0, 0) \in S^1 \times \mathbb{R}^2$  ist ein Legendre-Knoten, denn die Ableitung  $(1, 0, 0)$  liegt immer im Kern von  $\alpha_n = \cos(n\theta) dx - \sin(n\theta) dy$ .
- (2) Ähnlich ist die Einbettung  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1 \ni \theta \mapsto (0, 0, \theta) \in (T^3, \xi_n)$  ein Legendre-Knoten.
- (3) Und genauso ist auch  $S^1 \ni \theta \mapsto (0, \theta, 0) \in (T^3, \xi_n)$  ein Legendre-Knoten .

Lokal sieht jeder Legendre-Knoten aus wie der aus dem ersten Beispiel, wie folgender Satz zeigt.

**Satz 2.12** (Umgebungssatz für Legendre-Knoten).

Sei  $K: S^1 \rightarrow (M, \xi)$  ein Legendre-Knoten in einer Kontaktmannigfaltigkeit. Dann ist eine Umgebung von  $K$  in  $M$  für beliebiges  $r > 0$  kontaktomorph zu  $(S^1 \times D_r, \xi_n)$  und der Kontaktomorphismus bildet  $K$  auf  $\theta \mapsto (\theta, 0, 0)$  ab. Dabei bezeichnet  $D_r$  die Scheibe mit Radius  $r$  im  $\mathbb{R}^2$ .

*Beweis.* siehe [13, Beispiel 2.5.10]

Dort wird dieser Satz zwar nur für eine Umgebung von  $\theta \mapsto (\theta, 0, 0)$  und nur für die Kontaktstruktur  $\xi_1$  bewiesen, aber zusammen mit Beispiel 2.5 und mit der Beobachtung, dass die Abbildung  $(\theta, x, y) \mapsto (\theta, rx, ry)$  für jedes  $r > 0$  ein Kontaktomorphismus für die Kontaktstrukturen  $\xi_n$  ist, folgt die Behauptung auch in dieser allgemeineren Form.  $\square$

**Satz 2.13** (Approximationssatz durch Legendre-Knoten).

Sei  $K: S^1 \rightarrow (M, \xi)$  ein beliebiger Knoten in einer Kontaktmannigfaltigkeit. Dann kann  $K$  durch einen zu  $K$  isotopen Legendre-Knoten  $C^0$ -nah approximiert werden.

*Beweisskizze.* (für genaueren Beweis siehe [13, Satz 3.2.3 und Satz 3.3.1])

Betrachte zuerst einen beliebigen Knoten

$$S^1 \ni t \mapsto (x(t), y(t), z(t)) \in (\mathbb{R}^3, \xi_{st} = \ker(xdy + dz))$$

im  $\mathbb{R}^3$  mit der Standardkontaktstruktur. Dieser Knoten ist ein Legendre-Knoten genau dann, wenn  $z'(t) + x(t)y'(t) = 0$  gilt (durch Einsetzen in die Kontaktform). Nach einer kleinen Störung eines solchen Legendre-Knotens kann angenommen werden, dass  $y'(t) \neq 0$  ist in bis auf isolierten Punkten; diese Punkte heißen **Spitzen**. Durch seine **Front-Projektion**

$$S^1 \ni t \mapsto (y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^2$$

ist ein solcher Knoten dann eindeutig festgelegt, denn abseits der (isolierten) Spitzen gilt dann

$$x(t) = -\frac{z'(t)}{y'(t)} = -\frac{dz}{dy}.$$

Sei nun  $K: [0, 1] \rightarrow (\mathbb{R}^3, \xi_{st})$  eine Einbettung. Dann approximiere ihre Front-Projektion durch eine sogenannte Front (das sind Kurven ohne vertikale Tangenten, aber mit Spitzen), deren Steigung  $\frac{dz}{dy}$  die negative  $x$ -Komponente von  $K$  approximiert (siehe Abbildung 2.1).

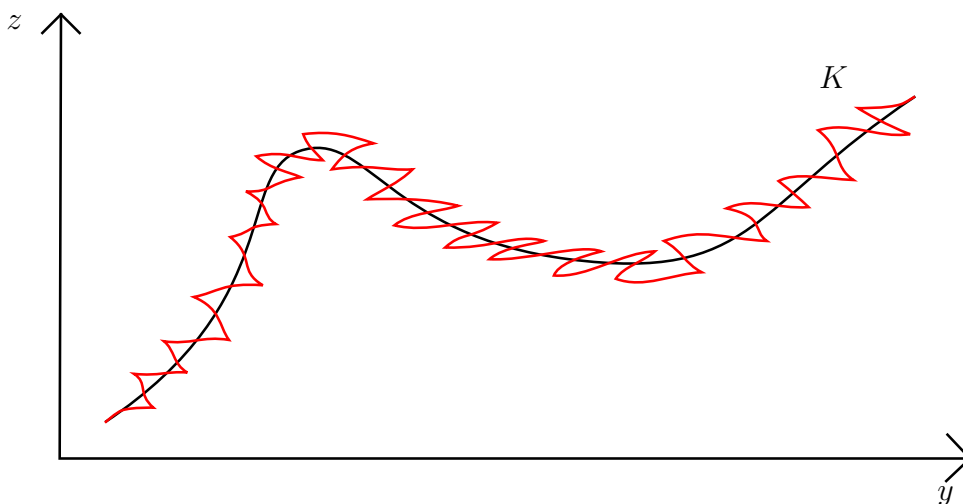


Abbildung 2.1: Ein Legendre-Approximation durch eine Front

Diese Einbettung hebt dann zu einer Legendre-Einbettung in  $(\mathbb{R}^3, \xi_{st})$  an.

Hat man nun einen allgemeinen Knoten  $K: S^1 \rightarrow (M, \xi)$  in einer allgemeinen Kontaktmannigfaltigkeit, dann kann man diesen Knoten (mit dem Lemma von Lebesgue) in endlich viele Stücke zerteilen, die in Darboux-Karten liegen, und jedes dieser Stücke durch eine Legendre-Einbettung approximieren. Weil man den neuen Legendre-Knoten immer so wählen kann, dass er mit dem alten Knoten an den Stellen, an denen dieser schon Legendre ist, übereinstimmt, ergibt sich dann also ein Legendre-Knoten, der isotop zu dem alten Knoten ist und beliebig nahe an ihm liegt.  $\square$

**Bemerkung 2.14**

Dieser Satz zeigt also insbesondere, dass es in jeder Kontaktmannigfaltigkeit sehr viele Legendre-Knoten gibt und dass die Einschränkung auf Legendre-Knoten bei der Kontakt-Dehn-Chirurgie keine wirkliche topologische Einschränkung ist.

## 2.3 Straffe und überdrehte Kontaktstrukturen

Als Nächstes wird eine fundamentale Aufteilung der Kontaktstrukturen in sogenannte überdrehte und straffe Kontaktstrukturen eingeführt. Auf den ersten Blick wirkt dies völlig willkürlich, aber die Arbeiten von Eliashberg zeigen, dass dies der erste Schritt in Richtung der Klassifikation von Kontaktstrukturen ist (siehe auch [13, Kapitel 4]).

**Definition 2.15** (überdrehte und straffe Kontaktstrukturen).

(1) Eine eingebettete Scheibe  $\Delta \subset (M, \xi)$  in einer Kontaktmannigfaltigkeit heißt **überdrehte Scheibe**, wenn ihr Rand  $\partial\Delta$  ein Legendre-Knoten für  $\xi$  ist und  $\Delta$  entlang  $\partial\Delta$  transversal zu  $\xi$  ist.

(2) Eine Kontaktstruktur  $\xi$  auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  heißt **überdreht**, falls es eine in  $M$  eingebettete überdrehte Scheibe gibt. Andernfalls heißt die Kontaktstruktur **straff**.

**Bemerkung 2.16**

Diese Definition lässt sich nur mit größerem Aufwand auf beliebige Dimensionen ausweiten. Die Aufteilung der Kontaktstrukturen in straffe und überdrehte ist also ein Phänomen, das zuerst einmal nur im Dreidimensionalen auftritt.

**Beispiel 2.17**

(1) Die überdrehte Standardkontaktstruktur  $\xi_{ot}$  auf dem  $\mathbb{R}^3$  aus Beispiel 2.3 (3) ist, wie der Name schon andeutet, eine überdrehte Kontaktstruktur. Eine überdrehte Scheibe erhält man, indem man die Scheibe  $\Delta := \{z = 0, r \leq \pi\}$  betrachtet. Der Rand



dieser Scheibe ist  $\{z = 0, r = \pi\}$  und somit offensichtlich ein Legendre-Knoten für diese Kontaktstruktur.  $\Delta$  ist aber noch keine überdrehte Scheibe, denn an den Punkten  $\{z = 0, r = \pi\} \cup \{0\}$  liegen ihre Tangentialebenen im Kern von  $\alpha_{ot}$ , das heißt die Scheibe ist dort tangential an die Kontaktstruktur. In allen anderen Punkten ist  $\Delta$  transversal zu  $\xi_{ot}$ . (Dies sieht man alles sofort an  $\alpha_{ot} = \cos r dz + r \sin r d\varphi$ .) Wenn man  $\Delta$  nun ein kleines Stück anhebt, aber dabei den Rand fest lässt, liefert dies eine überdrehte Scheibe, denn  $\partial\Delta$  ist dann immer noch ein Legendre-Knoten, aber in einer Umgebung des Randes ist  $\Delta$  dann transversal zu  $\xi_{ot}$ .

(2) Die Standardkontaktstruktur  $\xi_{st}$  auf  $\mathbb{R}^3$  ist straff (siehe [13, Bemerkung 4.6.37]).

(3) Die Kontaktstrukturen  $\xi_n$  auf  $S^1 \times \mathbb{R}^2$  sind alle straff. Dies sieht man wie folgt: Angenommen,  $\xi_n$  ist überdreht. Dann gibt es eine überdrehte Scheibe  $\Delta \subset (S^1 \times \mathbb{R}^2, \xi_n)$ . Da diese überdrehte Scheibe kompakt ist, existiert ein  $r > 0$ , sodass  $\Delta \subset (S^1 \times D_r, \xi_n)$ . Nach dem Umgebungssatz für Legendre-Knoten ist  $(S^1 \times D_r, \xi_n)$  kontaktomorph zu einer Umgebung eines Legendre-Knotens in  $(\mathbb{R}^3, \xi_{st})$ . Mit diesem Kontaktomorphismus bildet die überdrehte Scheibe  $\Delta$  dann auf eine überdrehte Scheibe in  $(\mathbb{R}^3, \xi_{st})$  ab. Das kann aber nicht sein, da diese Kontaktstruktur straff ist.

**Bemerkung 2.18**

(1) Dies zeigt insbesondere, dass  $(\mathbb{R}^3, \xi_{st})$  nicht kontaktomorph zu  $(\mathbb{R}^3, \xi_{ot})$  ist und dass  $(\mathbb{R}^3, \xi_{ot})$  nicht kontaktomorph in die Kontaktmannigfaltigkeiten  $(S^1 \times \mathbb{R}^2, \xi_n)$  eingebettet werden kann.

(2) Nach dem Satz von Darboux und dem Umgebungssatz für Legendre-Knoten kann man aber  $(B_{st}, \xi_{st})$  und die  $(S^1 \times D_r, \xi_n)$  kontaktomorph in  $(\mathbb{R}^3, \xi_{ot})$  einbetten.

Im Allgemeinen ist es aber sehr schwer zu bestimmen, ob eine gegebene Kontaktstruktur straff oder überdreht ist. Eine weitere Methode dazu ist das folgende Lemma.

**Lemma 2.19** (Kontaktüberlagerungslemma).

Ist  $p: (M', \xi') \rightarrow (M, \xi)$  eine Kontaktüberlagerung (siehe Definition 2.4 (4)) und ist  $\xi'$  straff, dann ist auch  $\xi$  straff.

*Beweis.*

Angenommen es existiert eine überdrehte Scheibe  $\Delta \subset (M, \xi)$ . Weil  $p$  eine Überlagerung ist, hebt diese Scheibe zu einer Scheibe  $\Delta'$  in  $M'$  an (siehe Abbildung 2.2).

Weil weiter  $p$  eine Kontaktüberlagerung ist und damit insbesondere ein lokaler Kontaktomorphismus, ist  $\partial\Delta'$  wieder ein Legendre-Knoten, so dass  $\Delta'$  entlang  $\partial\Delta'$  transversal zu  $\xi'$  ist. Also ist  $\Delta' \subset (M', \xi')$  eine überdrehte Scheibe. □

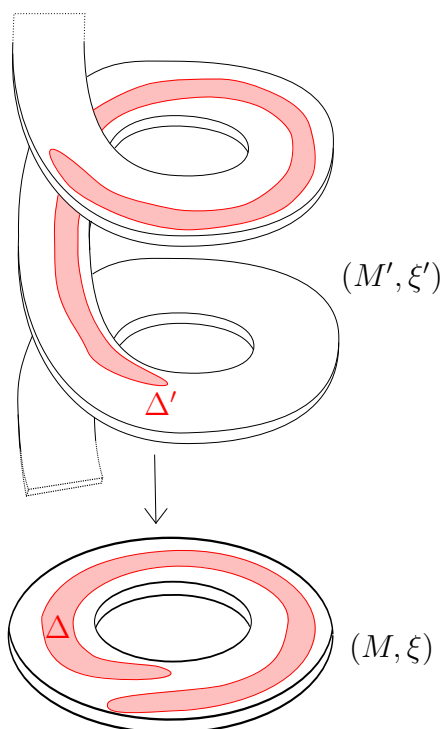


Abbildung 2.2: Die Anhebung einer überdrehten Scheibe mittels einer Überlagerung

### Beispiel 2.20

Hiermit sieht man nun relativ leicht, dass die Kontaktstrukturen  $\xi_n$  auf  $T^3$  straff sind. Betrachte dazu die Überlagerung

$$p: \mathbb{R}^3 \longrightarrow T^3$$

$$(u, v, w) \longmapsto (x, y, t) := \left( w \cos(v) + u \sin(v), u \cos(v) - w \sin(v), \frac{1}{2\pi n} v \right)$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} p^* \alpha_n &= f^* (\cos(2\pi n t) dx - \sin(2\pi n t) dy) \\ &= \cos(v) d(w \cos(v) + u \sin(v)) - \sin(v) d(u \cos(v) - w \sin(v)) \\ &= \underbrace{(\cos^2(v) + \sin^2(v))}_{=1} dw + \underbrace{(\cos(v) \sin(v) - \sin(v) \cos(v))}_{=0} du \\ &\quad + \underbrace{(\cos(v) \sin(v) - \sin(v) \cos(v))}_{=0} w dv + \underbrace{(\cos^2(v) + \sin^2(v))}_{=1} u dv \\ &= dw + u dv. \end{aligned}$$

Also ist  $p: (\mathbb{R}^3, \xi_{st}) \rightarrow (T^3, \xi_n)$  eine Kontaktüberlagerung. Da nun  $\xi_{st}$  straff ist, folgt mit dem vorigen Lemma, dass auch die  $\xi_n$  auf  $T^3$  straff sind. Ähnlich kann man so auch zeigen, dass die Kontaktstrukturen  $\xi_n$  auf  $S^1 \times \mathbb{R}^2$  straff sind.

Warum diese Unterteilung in straffe und überdrehte Kontaktstrukturen sinnvoll ist, zeigt der folgende Satz von Eliashberg.

**Satz 2.21** (Klassifikation von überdrehten Kontaktstrukturen).

*Sei  $M$  eine geschlossene und orientierbare Mannigfaltigkeit. Dann liegt in jeder Homotopieklasse von Ebenenfeldern tangential an  $M$  (bis auf Isotopie) genau eine überdrehte Kontaktstruktur.*

*Beweis.* siehe [13, Kapitel 4.7] □

Zwei überdrehte Kontaktstrukturen sind also isotop genau dann, wenn sie als Ebenenfelder homotop sind. Für die Klassifikation der überdrehten Kontaktstrukturen muss man also nur homotopietheoretische Fragen beantworten. Insbesondere gibt es also auf jeder Mannigfaltigkeit auch eine überdrehte Kontaktstruktur. Die straffen Kontaktstrukturen hingegen sind sehr viel schwerer zu verstehen, aber führen deswegen auch zu viel interessanteren Ergebnissen. Diese Kontaktstrukturen scheinen wesentlich von der Topologie der zugrundeliegenden Mannigfaltigkeit beeinflusst zu sein. Die Klassifikation der straffen Kontaktstrukturen ist bis heute nur auf relativ wenigen Mannigfaltigkeiten bekannt. Einige wichtige Ergebnisse sind im folgenden Satz zusammengefasst.

**Satz 2.22** (Klassifikation straffer Kontaktstrukturen auf einigen Mannigfaltigkeiten).

(1)  $S^3$  und  $\mathbb{R}^3$  besitzen jeweils nur eine einzige positive, straffe Kontaktstruktur, nämlich  $\xi_{st}$ . (Eliashberg)

(2) Auf  $T^3$  liefern die Kontaktstrukturen  $\xi_n$  eine vollständige Liste von straffen Kontaktstrukturen, das heißt  $(T^3, \xi_n)$  ist kontaktomorph zu  $(T^3, \xi_m)$  genau dann, wenn  $n = m$  ist, und für jede positive straffe Kontaktstruktur  $\xi$  auf  $T^3$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $(T^3, \xi)$  isotop ist zu  $(T^3, \xi_n)$ . (Giroux, Kanda)

(3) Die Poincaré-Homologiesphäre mit umgekehrter Orientierung  $\bar{P}$  (siehe Abschnitt 5.3) trägt keine positive, straffe Kontaktstruktur. (Etnyre-Honda)

(4) Die verbundene Summe  $P \# \bar{P}$  trägt keine (weder eine positive, noch eine negative) straffe Kontaktstruktur. (Etnyre-Honda)

Dabei sollen die obigen Mannigfaltigkeiten jeweils mit ihrer Standardorientierung versehen sein, das heißt für  $S^3$  die von  $\mathbb{R}^4$  induzierte, für  $\mathbb{R}^3$  und  $T^3$  die Orientierung gegeben

durch die Volumenform  $dx \wedge dy \wedge dt$  und für die Poincaré-Homologiesphäre  $P$  die von  $S^3$  induzierte Orientierung.

*Beweis.* Für (1) siehe [13, Satz 4.10.1], für (2) siehe [24, Satz 1 und Satz 3], für (3) und (4) siehe [11, Satz 1 und Korollar 2] □

**Bemerkung 2.23**

(1) Wenn die Mannigfaltigkeit einen orientierungsumkehrenden Diffeomorphismus zulässt (wie in den ersten beiden Fällen), dann ist die Einschränkung auf positive Kontaktstrukturen keine wirkliche Einschränkung, da sich alle Ergebnisse mittels dieses orientierungsumkehrenden Diffeomorphismuses auf negative Kontaktstrukturen übertragen. Zum Beispiel ist ein solcher orientierungsumkehrender Diffeomorphismus von  $T^3$  gegeben durch:

$$\begin{aligned} f: T^3 &\longrightarrow T^3 \\ (x, y, t) &\longmapsto (x, y, 1 - t) \end{aligned}$$

Wegen

$$f^*(\alpha_n) = \cos(2\pi n - 2\pi t) dx - \sin(2\pi n - 2\pi t) dy = \alpha_{-n}$$

ist  $f: (T^3, \xi_{-n}) \rightarrow (T^3, \xi_n)$  ein Kontaktomorphismus. Die obige Klassifikationsaussage überträgt sich also auch auf negative Kontaktstrukturen. Ganz ähnlich funktioniert dies auch für  $S^3$  und  $\mathbb{R}^3$ . Die Poincaré-Homologiesphäre  $P$  lässt allerdings keinen orientierungsumkehrenden Diffeomorphismus zu, weswegen sich die Klassifikationen für positive und negative Kontaktstrukturen hier unterscheiden.

(2) Später werden noch die Klassifikationen straffer Kontaktstrukturen auf Volltori  $S^1 \times D^2$  (Satz 2.64) und auf Torusbündeln über  $S^1$  (Satz 3.44) gegeben.

## 2.4 Universell straffe und virtuell überdrehte Kontaktstrukturen

In den nächsten Kapiteln dieser Arbeit wird hauptsächlich eine bestimmte Klasse von Mannigfaltigkeiten betrachtet, sogenannte Torusbündel über  $S^1$  (siehe Kapitel 3). Für die Klassifikation der straffen Kontaktstrukturen auf diesen Torusbündeln über  $S^1$  ist es hilfreich, zwei weitere Klassen von straffen Kontaktstrukturen einzuführen.

**Definition 2.24** (universell straffe und virtuell überdrehte Kontaktstrukturen).

Sei  $(M, \xi)$  eine Kontaktmannigfaltigkeit. Bezeichne mit  $\hat{M}$  die universelle Überlagerung von  $M$  und mit  $\hat{\xi}$  die Anhebung von  $\xi$  auf die universelle Überlagerung  $\hat{M}$ .

- $(\hat{M}, \hat{\xi}) \rightarrow (M, \xi)$  heißt die **universelle Kontaktüberlagerung** von  $(M, \xi)$ .
- Eine straffe Kontaktstruktur  $\xi$  auf  $M$  heißt **universell straff**, falls  $\hat{\xi}$  straff ist.
- Eine straffe Kontaktstruktur  $\xi$  auf  $M$  heißt **virtuell überdreht**, falls es eine endliche Kontaktüberlagerung  $(M', \xi') \rightarrow (M, \xi)$  gibt, so dass  $\xi'$  überdreht ist.

Anhand dieser Definition ist nicht sofort klar, wie diese beiden neuen Klassen von straffen Kontaktstrukturen in Beziehung zueinander stehen. Das folgende Korollar zeigt aber, dass jede straffe Kontaktstruktur entweder universell straff oder virtuell überdreht ist.

**Korollar 2.25.**

Jede straffe Kontaktstruktur  $\xi$  ist entweder universell straff oder virtuell überdreht.

*Beweisidee.*

Dass diese beiden Begriffe verschieden sind (das heißt, dass es keine Kontaktstruktur gibt, die sowohl universell straff als auch virtuell überdreht ist), folgt sofort aus dem Kontaktüberlagerungslemma 2.19. Um den Beweis abzuschließen, ist also zu zeigen, dass es keine straffe Kontaktstruktur gibt, die in keine der beiden Klassen fällt. Sei also  $(M, \xi)$  eine straffe Kontaktmannigfaltigkeit mit universeller Kontaktüberlagerung  $p: (\hat{M}, \hat{\xi}) \rightarrow (M, \xi)$ , so dass  $\hat{\xi}$  überdreht ist.

Zu zeigen ist dann, dass es schon eine endliche Kontaktüberlagerung  $(M', \xi')$  mit überdrehter Kontaktstruktur gibt. Da  $(\hat{M}, \hat{\xi})$  überdreht ist, existiert eine überdrehte Scheibe  $\hat{\Delta} \subset (\hat{M}, \hat{\xi})$ . Betrachte nun  $\Delta := p(\hat{\Delta}) \subset M$ . Da  $p$  ein lokaler Kontaktomorphismus ist, ist  $p(\partial\hat{\Delta}) \subset (M, \xi)$  wieder eine Legendre-Kurve, so dass  $\Delta$  entlang  $p(\partial\Delta)$  transversal zu  $\xi$  ist. Da  $(M, \xi)$  aber straff ist, kann  $p(\partial\Delta)$  keine Scheibe in  $M$  beranden.  $\Delta$  ist dann also eine immersierte Scheibe, das heißt eine Scheibe mit Selbstschnitten (siehe Abbildung 2.3). Betrachte zuerst denn Fall aus Abbildung 2.3. Die Schleife  $\gamma$  in der Abbildung, die als Basispunkt einen Selbstschnittspunkt  $t_0$  hat und deren Anhebung  $\hat{\gamma}$  auf die universelle Überlagerung  $\hat{M}$  ein Weg ist, ist in  $\pi_1(M)$  nicht-trivial. Jetzt benutzt man den Satz von Thurston-Hempel (siehe [18]), dass die Fundamentalgruppe jeder orientierbaren, kompakten 3-Mannigfaltigkeit residuell-endlich ist und erhält so eine Normalteileruntergruppe  $N$  von  $\pi_1(M)$  mit endlichem Index  $[\pi_1(M) : N]$  und mit  $\gamma \notin N$ . Sei nun  $p': (M', \xi') \rightarrow (M, \xi)$  die zu  $N \triangleleft \pi_1(M)$  gehörige Überlagerung. Das heißt insbesondere,

dass  $\pi_1(M') \cong N$  gilt (siehe die Abbildung 2.4). Wegen  $\text{Grad}(p') = [\pi_1(M) : N]$  ist dies auch eine endliche Überlagerung.

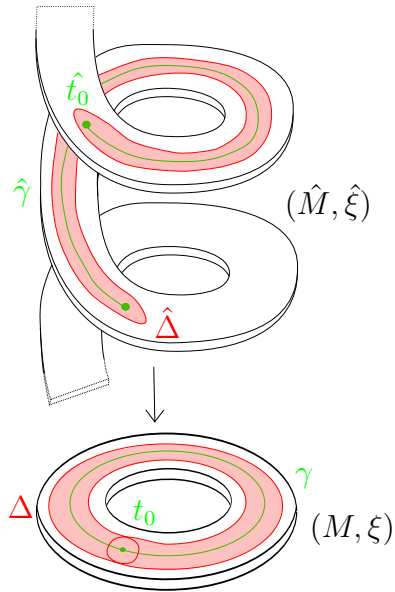


Abbildung 2.3: Eine immensierte überdrehte Scheibe

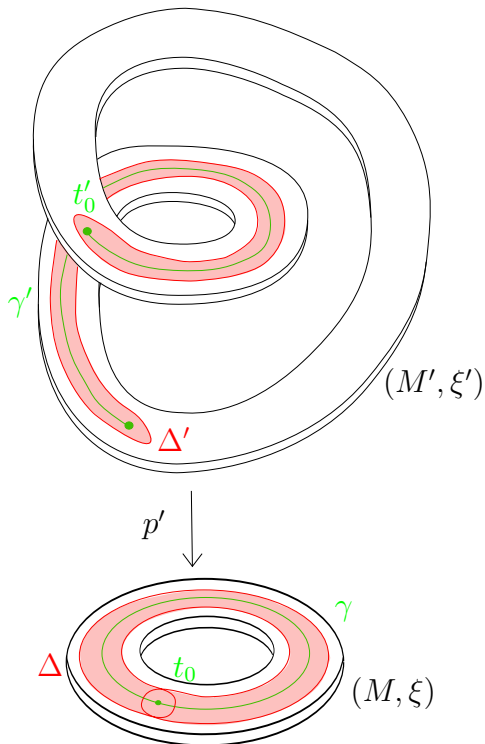


Abbildung 2.4: Eine überdrehte Scheibe in einer endlichen Kontaktüberlagerung

Hebt man nun die immersierte Scheibe  $\Delta$  mittels  $p'$  zu einer (immersierten) Scheibe  $\Delta'$  in  $M'$  an, so ist der Selbstschnittpunkt  $t_0$  entfernt. In diesem Fall erhält man also wirklich eine eingebettete Scheibe  $\Delta' \subset M'$ . Hebt man weiter die Kontaktstruktur  $\xi$  mittels  $p'$  zu einer Kontaktstruktur  $\xi'$  auf  $M'$  an, so wird  $p'$  zu einer Kontaktüberlagerung. Also ist  $p'$  insbesondere ein lokaler Kontaktomorphismus und  $\Delta'$  ist somit eine überdrehte Scheibe in  $(M', \xi')$ .

Für den allgemeinen Fall muss man diesen Schritt von eben mehrmals durchführen und kann so nach endlich vielen Schritten alle Selbstschnittpunkte entfernen.  $\square$

**Bemerkung 2.26**

Dieser Beweis zeigt insbesondere, dass eine straffe Kontaktstruktur genau dann virtuell überdreht ist, wenn die universelle Kontaktüberlagerung überdreht ist.

**Beispiel 2.27**

(1) Die straffen Kontaktstrukturen auf  $\mathbb{R}^3$ ,  $S^3$ ,  $S^1 \times \mathbb{R}^2$  und  $T^3$ , die bis jetzt vorgestellt wurden, sind alle universell straff. Für  $\mathbb{R}^3$  und  $S^3$  folgt dies sofort, da diese Räume ihre eigene universelle Überlagerung sind, und für  $S^1 \times \mathbb{R}^2$  und  $T^3$  hatten wir explizit nachgerechnet, dass die Anhebungen auf die universellen Überlagerungen straffe Kontaktstrukturen liefern (siehe Beispiel 2.20).

(2) Um ein Beispiel einer virtuell überdrehten Kontaktstruktur zu konstruieren, muss man sich deutlich mehr anstrengen, da man dazu das Kontaktüberlagerungslemma 2.19 nicht benutzen kann. Das historisch erste Beispiel einer virtuell überdrehten Kontaktstruktur findet man in [27]. Hier wird die Idee eines Beispiels einer straffen Kontaktstruktur auf einem Volltorus wie in [2, Proposition 4.6.] gegeben.

Nach dem vorigen Beweis reicht es zu zeigen, dass es auf  $S^1 \times D^2$  eine straffe Kontaktstruktur gibt, deren universelle Kontaktüberlagerung überdreht ist. Dazu betrachtet man den  $\mathbb{R}^3$  mit kartesischen Koordinaten  $(x, y, t)$  und Kontaktstruktur  $\xi_{st}$  gegeben durch die Kontaktform

$$\alpha = \cos(2\pi t) dx - \sin(2\pi t) dy.$$

In Beispiel 3.34 wird nachgerechnet, dass diese Kontaktform wirklich eine Kontaktstruktur liefert, die kontaktomorph zur Standardkontaktstruktur ist. Insbesondere ist diese Kontaktstruktur also straff und liefert somit auch auf jeder Teilmenge von  $\mathbb{R}^3$  eine straffe Kontaktstruktur.

Betrachte nun eine Familie von Zylindern  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  gegeben durch

$$Z_n = \left\{ 0 \leq t \leq 1 \mid (x - \cos(2\pi t))^2 + (y + \sin(2\pi t))^2 = 1 \right\} \cup \left\{ t \in [-1, 0] \cup [1, 2] \mid (x-1)^2 + y^2 = 1 \right\}.$$

Man bemerke, dass die Kurve

$$\gamma: [-1, 2] \ni \theta \longmapsto (\theta, 0, 0)$$

Legendre ist und für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  in  $Z_n$  liegt. Weiter sind die Zylinder  $Z_n$  in den beiden Halbräumen  $\{t \geq 1\}$  und  $\{t \leq 0\}$  alle gleich, insbesondere gilt also auch  $\partial Z_n = \partial Z_0$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ . Nun führt man eine Isotopie des  $\mathbb{R}^3$  aus, die innerhalb von  $\{0 \leq t \leq 1\}$  stationär ist, die  $\gamma$  punktweise fest lässt und die den Rand von  $Z_n$  auf Legendre-Kurven abbildet. Weiter kann man sich überlegen, dass man diese Isotopie so wählen kann, dass das Bild der Zylinder beliebig nahe an den ursprünglichen Zylindern liegt. (Dass dies alles geht, folgt aus dem Beweis des Approximationssatzes für Legendre-Knoten 2.13, siehe auch [2, Proposition 4.6].) Diese neuen Zylinder werden wieder mit  $Z_n$  bezeichnet. Da nun immer noch  $\partial Z_n = \partial Z_0$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt, gilt für die Thurston-Bennequin-Invariante (siehe Abschnitt 5.3)

$$tb(\partial Z_n) = tb(\partial Z_0) \text{ (unabhängig von } n\text{).}$$

Betrachte nun die Familie von Volltori gegeben durch den Abschluss von kleinen Tubenumgebungen  $\nu Z_n$  von  $Z_n$  in  $\mathbb{R}^3$ . Um nun zu zeigen, dass  $(\nu Z_n, \xi_{st}|_{\nu Z_n})$  für  $n$  groß genug virtuell überdreht ist, betrachtet man die universelle Kontaktüberlagerung

$$p_n: (\mathbb{R} \times [-1, 2] \times [\varepsilon, \varepsilon], \hat{\xi}) \longrightarrow (\nu Z_n, \xi_{st}|_{\nu Z_n}),$$

so dass  $p_n^{-1}(Z_n \setminus \gamma)$  aus Rechtecken besteht (siehe Abbildung 2.5). Bezeichne eines dieser Rechtecke mit  $D_n$ . Dann hat  $D_n$  stückweise glatten Legendre-Rand und zwei gegenüberliegende Seiten bilden bijektiv auf  $\partial Z_n$  ab, während die anderen beiden Seiten jeweils ganz  $\gamma$  treffen. Man kann dann explizit berechnen (siehe auch Abschnitt 5.3 und [2, Proposition 4.6.]), dass für  $tb(D_n)$  gilt

$$tb(D_n) = tb(\partial Z_n) + 2(n + tb(\gamma)) = 2n + tb(\partial Z_0) - 6.$$

Für  $n$  groß genug gilt dann

$$tb(D_n) = 2n + tb(\partial Z_0) - 6 > 1 = \chi(D).$$

Nach der Bennequin-Ungleichung (siehe [13, Satz 4.6.36]) muss  $\hat{\xi}$  dann überdreht sein.



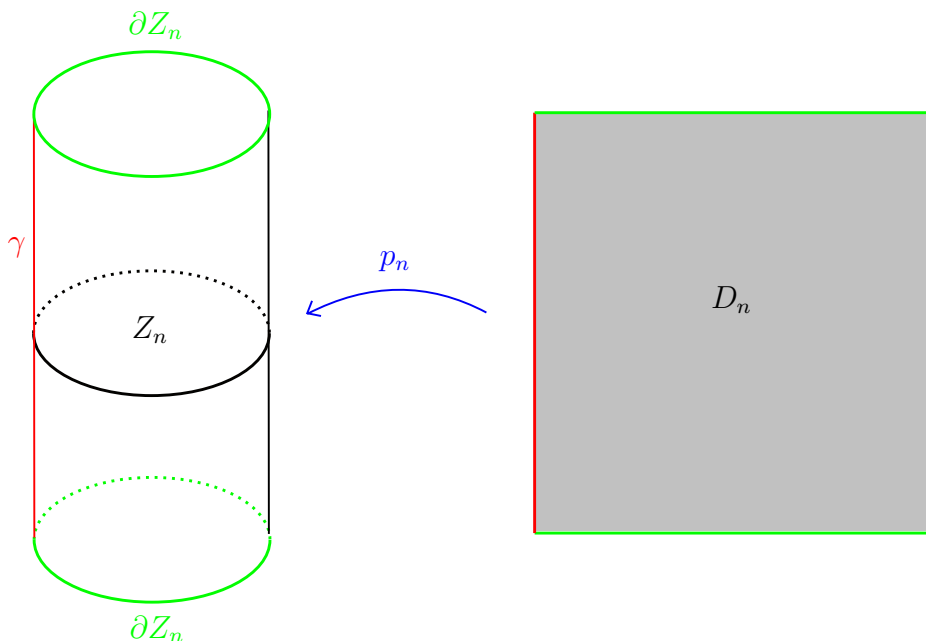


Abbildung 2.5: Das Rechteck  $D_n$  in der universellen Überlagerung  $p_n$ .

(3) In Abschnitt 5.3 werden auch virtuell überdrehte Kontaktstrukturen auf geschlossenen Mannigfaltigkeiten in Kontakt-Dehn-Chirurgie-Diagrammen konstruiert.

## 2.5 Symplektische Mannigfaltigkeiten

Als nächstes werden symplektische Mannigfaltigkeiten eingeführt. Die Motivation dazu stammt, genau wie bei den Kontaktmannigfaltigkeiten, aus der theoretischen Physik. Dort treten symplektische Mannigfaltigkeiten ganz natürlich als Phasenräume physikalischer Systeme auf. Symplektische Mannigfaltigkeiten sind mit den Kontaktmannigfaltigkeiten sehr eng verknüpft. In vielerlei Hinsicht sind Kontaktmannigfaltigkeiten das Gegenstück zu symplektischen Mannigfaltigkeiten. Einige Aspekte dieser Phänomene werden weiter unten deutlich.

**Definition 2.28** (symplektische Mannigfaltigkeit).

Eine 2-Form  $\omega$  auf einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit  $W$  heißt **symplektische Form**, falls sie geschlossen (das heißt  $d\omega = 0$ ) und nicht-entartet ist (das heißt die Differentialform  $\omega^2 := \omega \wedge \omega$  ist eine Volumenform auf  $W$ ).

Das Paar  $(W, \omega)$  heißt dann **symplektische Mannigfaltigkeit**.

**Bemerkung 2.29**

Ähnlich wie bei den Kontaktmannigfaltigkeiten (siehe Bemerkung am Anfang) gilt, dass

man den Begriff der symplektischen Mannigfaltigkeit auch in höheren Dimensionen definieren kann, hier allerdings nur in geraden Dimensionen. In dieser Arbeit kommen aber nur vierdimensionale symplektische Mannigfaltigkeiten vor, weshalb wir auch hier die Dimension unterdrücken. Weiter ist auch auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit eine natürliche Orientierung durch die Volumenform  $\omega^2$  gegeben.

**Beispiel 2.30**

(1) Die **symplektische Standardform** auf dem  $\mathbb{R}^4$  mit kartesischen Koordinaten  $(x, y, z, t)$  ist  $\omega_{st} = dx \wedge dy + dz \wedge dt$  ( $d\omega_{st} = 0$  und  $\omega_{st}^2$  ist die Standardvolumenform). Ähnlich wie bei der Standardkontaktstruktur auf dem  $\mathbb{R}^3$  kann man auch hier zeigen, dass jede symplektische Form lokal aussieht wie die symplektische Standardform. Dies nennt man dann auch Satz von Darboux (siehe [21, Satz 1]). Genau wie in der Kontaktgeometrie gibt es also auch in der symplektischen Geometrie keine lokalen Invarianten.

(2) Seien  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  zwei Flächen (das heißt zweidimensionale orientierbare Mannigfaltigkeiten) mit Volumenformen  $\omega_1$  und  $\omega_2$ , dann kann man  $\omega := \omega_1 + \omega_2$  als 2-Form auf  $\Sigma_1 \times \Sigma_2$  auffassen. Damit ist  $(\Sigma_1 \times \Sigma_2, \omega = \omega_1 + \omega_2)$  eine symplektische Mannigfaltigkeit, denn  $d\omega = 0$  und  $\omega \wedge \omega = 2\omega_1 \wedge \omega_2$  ist eine Volumenform.

(3) Sei  $(M, \xi = \ker \alpha)$  eine Kontaktmannigfaltigkeit. Bezeichne mit  $t$  die  $\mathbb{R}$ -Koordinate in  $\mathbb{R} \times M$  und mit  $p: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  die Projektion. Dann kann man  $\alpha$  mit  $p$  zu einer 1-Form auf  $\mathbb{R} \times M$  zurückziehen. Der Einfachheit halber identifiziert man diese 1-Form  $p^*\alpha$  mit  $\alpha$ .

Dann ist  $(\mathbb{R} \times M, \omega := d(e^t\alpha))$  eine symplektische Mannigfaltigkeit, die sogenannte **Symplektifizierung** von  $M$ , denn für die geschlossene 2-Form  $\omega$  gilt:

$$\omega^2 = d(e^t\alpha) \wedge d(e^t\alpha) = e^t(dt \wedge \alpha + d\alpha) \wedge e^t(dt \wedge \alpha + d\alpha) = 2e^{2t} dt \wedge \alpha \wedge d\alpha \neq 0$$

Die Orientierung von  $W$  (durch  $\omega^2$ ) stimmt mit der Produktorientierung von  $\mathbb{R} \times M$  überein (wenn  $M$  durch  $\alpha \wedge d\alpha$  orientiert ist). (Dies scheint jetzt nicht sehr wichtig, wird aber später bei der Betrachtung symplektischer Kobordismen entscheidend.)

Man kann also aus einer Kontaktmannigfaltigkeit eine symplektischen Mannigfaltigkeit erhalten. Andersherum wollen wir auch aus symplektischen Mannigfaltigkeiten Kontaktmannigfaltigkeiten konstruieren. Dazu braucht man die folgende Definition:

**Definition 2.31** (Liouville-Vektorfeld).

Ein Vektorfeld  $Y$  auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit  $(W, \omega)$  heißt **Liouville-Vektorfeld**, falls  $\mathcal{L}_Y\omega = \omega$ .

Mit diesen Liouville-Vektorfeldern kann man nun Kontaktmannigfaltigkeiten erhalten.

**Proposition 2.32** (Kontakthyperfläche).

*Sei  $M$  eine Hyperfläche in einer symplektischen Mannigfaltigkeit  $(W, \omega)$ , die transversal zu einem Liouville-Vektorfeld  $Y$  liegt. Dann ist  $(M, \ker \iota_Y \omega)$  eine Kontaktmannigfaltigkeit. Solche Kontaktmannigfaltigkeiten nennt man auch **Kontakthyperflächen**.*

*Beweis.*

Nachzurechnen ist die Kontaktbedingung für die 1-Form  $\iota_Y \omega$ . Nach der Formel von Cartan für die Lie-Ableitung und wegen  $d\omega = 0$  gilt

$$\omega = \mathfrak{L}_Y \omega = d(\iota_Y \omega) + \iota_Y(d\omega) = d(\iota_Y \omega).$$

Also:

$$\iota_Y \omega \wedge d(\iota_Y \omega) = (\iota_Y \omega) \wedge \omega = \frac{1}{2} \iota_Y(\omega^2)$$

Da nun  $\omega^2$  eine Volumenform auf  $(W, \omega)$  ist, ist auch  $\iota_Y(\omega^2)$  eine Volumenform auf jeder Hyperfläche transversal zu  $Y$ . □

**Beispiel 2.33**

(1) Betrachte den  $\mathbb{R}^4$  mit seiner symplektischen Standardstruktur  $\omega_{st}$  (wie im obigen Beispiel). Dann ist das Radialvektorfeld  $Y := \frac{1}{2}(x \partial_x + y \partial_y + z \partial_z + t \partial_t)$  ein Liouville-Vektorfeld für  $\omega_{st}$ , denn:

$$\mathfrak{L}_Y \omega_{st} = d(\iota_Y \omega_{st}) = d\left(\frac{1}{2}(x dy - y dx + z dt - t dz)\right) = dx \wedge dy + dz \wedge dt = \omega_{st}.$$

Weiter ist das Liouville-Vektorfeld  $Y$  transversal zu der Einheitssphäre  $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ . Also induziert  $Y$  eine Kontaktstruktur auf  $S^3$ , nämlich die sogenannte **Standardkontaktstruktur** auf  $S^3$ :

$$\xi_{st} = \ker \alpha_{st} = \ker \iota_Y \omega_{st} = \ker\left(\frac{1}{2}(x dy - y dx + z dt - t dz)\right)$$

Man kann zeigen, dass  $(S^3 \setminus \{p\}, \xi_{st})$  kontaktomorph zu  $(\mathbb{R}^3, \xi_{st})$  ist, weswegen es sinnvoll ist, beide Kontaktstrukturen die Standardkontaktstruktur zu nennen (siehe [13, Proposition 2.1.8]).

(2) Betrachte die Symplektifizierung  $(\mathbb{R} \times M, \omega := d(e^t \alpha))$  einer Kontaktmannigfaltigkeit  $(M, \xi = \ker \alpha)$ . Dann ist das Vektorfeld  $Y := \partial_t$  ein Liouville-Vektorfeld für  $\omega$ , denn:

$$\mathfrak{L}_Y \omega = d(\iota_Y(e^t dt \wedge \alpha + e^t \alpha \wedge d\alpha)) = d(e^t \alpha) = \omega$$

**Bemerkung 2.34**

Das obige Beispiel zeigt, dass man jede Kontaktmannigfaltigkeit als Kontakthyperfläche einer symplektischen Mannigfaltigkeit erhalten kann. Ob dies auch in einer geschlossenen symplektischen Mannigfaltigkeit möglich ist, wird im nächsten Abschnitt betrachtet.

## 2.6 Symplektische Füllungen und Kobordismen

Betrachtet man nun einen (topologischen) Kobordismus zwischen zwei Mannigfaltigkeiten, die Kontaktstrukturen tragen, kann man sich fragen, ob dieser Kobordismus eine symplektische Struktur trägt, welche die Kontaktstrukturen im obigen Sinne induziert. Dies motiviert die folgende Definition.

**Definition 2.35** (symplektischer Kobordismus und symplektische Füllungen).

(1) Seien  $(M_{\pm}, \xi_{\pm})$  zwei geschlossene Kontaktmannigfaltigkeiten, orientiert durch die von den Kontaktstrukturen induzierten Volumenformen. Ein (starker) **symplektischer Kobordismus** von  $(M_-, \xi_-)$  nach  $(M_+, \xi_+)$  ist eine kompakte symplektische Mannigfaltigkeit  $(W, \omega)$ , orientiert durch  $\omega^2$ , so dass

- $\partial W = M_+ \sqcup \overline{M_-}$ , wobei  $\overline{M_-}$  die Mannigfaltigkeit  $M_-$  mit umgekehrter Orientierung bezeichnet,
- ein Liouville-Vektorfeld  $Y$  in einer Umgebung von  $\partial W$  existiert, das transversal zu  $\partial W$  ist, entlang  $M_+$  nach außen und entlang  $M_-$  nach innen zeigt, und
- dieses Liouville-Vektorfeld die Kontaktstrukturen  $\xi_{\pm}$  der Kontaktmannigfaltigkeiten  $(M_{\pm}, \xi_{\pm})$  induziert (das heißt:  $\ker(\iota_Y \omega|_{TM_{\pm}}) = \xi_{\pm}$ ).

$(M_-, \xi_-)$  heißt dann (stark) **symplektisch kobordant** zu  $(M_+, \xi_+)$ .

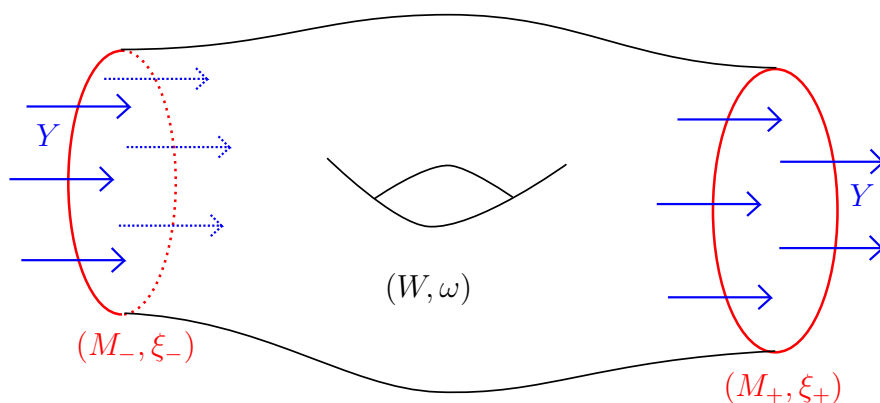


Abbildung 2.6: Ein (starker) symplektischer Kobordismus von  $(M_-, \xi_-)$  nach  $(M_+, \xi_+)$

(2) Ein (starker) symplektischer Kobordismus von der leeren Menge  $\emptyset$  zu einer Kontaktmannigfaltigkeit  $(M, \xi)$  heißt eine **starke symplektische Füllung** von  $(M, \xi)$ .  $(M, \xi)$  heißt dann **stark symplektisch füllbar**.

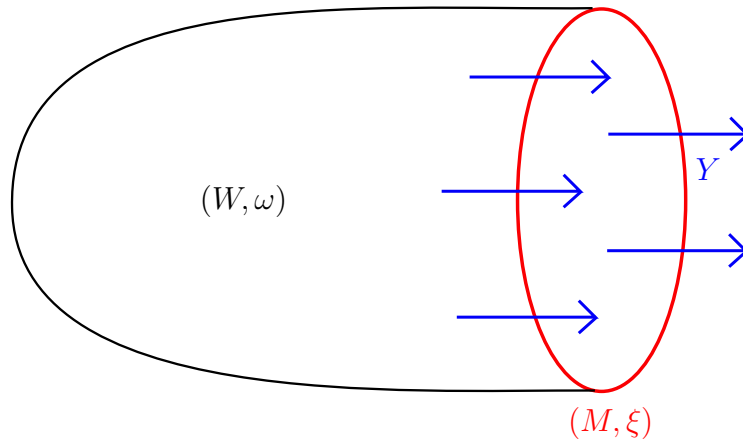


Abbildung 2.7: Eine starke symplektische Füllung von  $(M, \xi)$

(3) Eine geschlossene Kontaktmannigfaltigkeit  $(M, \xi)$ , orientiert durch die von der Kontaktstruktur induzierte Volumenform, heißt **schwach symplektisch füllbar**, wenn es eine kompakte symplektische Mannigfaltigkeit  $(W, \omega)$  gibt, orientiert durch  $\omega^2$ , so dass

- $\partial W = M$  als orientierte Mannigfaltigkeiten und
- $\omega|_{\xi} > 0$ .

Die symplektische Mannigfaltigkeit  $(W, \omega)$  heißt dann **schwache symplektische Füllung**.

**Bemerkung 2.36**

(1) In den Abbildungen oben sind solche Situationen schematisch in zwei Dimensionen kleiner dargestellt. Die Kontaktmannigfaltigkeiten sind dort eindimensional gezeichnet und die Kobordismen als zweidimensionale Objekte.

(2) Man könnte auch analog zu starken symplektischen Kobordismen von schwachen symplektischen Kobordismen sprechen. Diese Definition würde allerdings nicht sehr viel Sinn ergeben, da man schwache symplektische Kobordismen im Allgemeinen nicht verkleben kann, anders als starke symplektische Kobordismen (siehe Satz 2.41). Deswegen wird im Folgenden nur von symplektischen Kobordismen gesprochen und nur bei symplektischen Füllungen zwischen starken und schwachen Füllungen unterschieden.

Wie der Name auch schon andeutet, ist starke symplektische Füllbarkeit eine stärkere Eigenschaft als schwache symplektische Füllbarkeit:

**Korollar 2.37.**

*Ist  $(W, \omega)$  eine starke symplektische Füllung der Kontaktmannigfaltigkeit  $(M, \xi)$ , dann ist  $(W, \omega)$  gleichzeitig eine schwache symplektische Füllung von  $(M, \xi)$ . Insbesondere ist eine stark symplektisch füllbare Kontaktmannigfaltigkeit auch schwach symplektisch füllbar.*

*Beweis.*

Sei also  $(W, \omega)$  eine starke symplektische Füllung von  $(M, \xi)$ , dann ist die Bedingung  $\partial W = M$  als orientierte Mannigfaltigkeit sofort per Definition erfüllt. Weiter existiert ein Liouville-Vektorfeld  $Y$ , so dass  $\xi = \ker \alpha$  mit  $\alpha = \iota_Y \omega|_{TM}$  gilt. Da nun  $Y$  ein Liouville-Vektorfeld ist, gilt:

$$d\alpha = d\iota_Y \omega|_{TM} = \omega|_{TM}$$

Weil  $\xi$  durch  $d\alpha|_\xi$  orientiert ist (siehe Bemerkung 2.2 (3)), folgt auch  $\omega|_\xi = d\alpha|_\xi > 0$ .  $\square$

Die Umkehrung des obigen Korollars gilt im Allgemeinen nicht, das heißt, es gibt Kontaktmannigfaltigkeiten, die schwach, aber nicht stark symplektisch füllbar sind. Bevor aber die Idee zu diesem komplizierten Argument gegeben wird, zuerst ein paar Beispiele.

**Beispiel 2.38**

- (1) Nach Beispiel 2.33 (1) ist  $(S^3, \xi_{st})$  stark symplektisch füllbar durch  $(D^4, \omega_{st})$ .
- (2) Nach Beispiel 2.30 (3) und Beispiel 2.33 (2) ist jede geschlossene Kontaktmannigfaltigkeit symplektisch kobordant zu sich selbst vermöge des symplektischen Kobordismus  $([0, 1] \times M, \omega = d(e^t \alpha))$ .
- (3) Die straffen Kontaktstrukturen  $\xi_n$  auf  $T^3$  (siehe Beispiel 2.3 (3)) sind alle schwach symplektisch füllbar. Um dies zu sehen, betrachtet man  $W = T^2 \times D^2$  mit Polarkoordinaten  $(r, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  auf  $D^2$ , so dass  $\partial W = T^3$ . Wähle als symplektische Form auf  $W_\pm = T^2 \times D^2$  die Summe der Volumenformen auf  $T^2$  und  $D^2$ , also  $\omega_\pm = dx \wedge dy \pm r dr \wedge dt$  (siehe auch Beispiel 2.30 (2)). Dann gilt  $\partial W_\pm = T^3_\pm$  als orientierte Mannigfaltigkeit, wobei  $T^3_\pm$  durch die Volumenform induziert durch  $\xi_n$  für  $\pm n > 0$  orientiert sein soll. Im Folgenden wählt man für  $(W, \omega)$  also immer das Vorzeichen, das zu dem Vorzeichen der Kontaktstruktur passt. Dass dies wirklich eine schwache symplektische Füllung ist, sieht man wie folgt:

Betrachte für  $s \in [0, 1]$  die glatte Familie von 1-Formen

$$\alpha_n^s := s dt + (1 - s) \alpha_n = s dt + (1 - s) (\cos(2\pi t) dx - \sin(2\pi t) dy).$$

Dann gilt:

$$\alpha_n^s \wedge d\alpha_n^s = s(1 - s) dt \wedge d\alpha_n + (1 - s)^2 \alpha_n \wedge d\alpha_n = (1 - s)^2 \alpha_n \wedge d\alpha_n$$

Für  $s \in [0, 1)$  ist  $\xi_n^s = \ker \alpha_n^s$  also eine glatte Familie von Kontaktstrukturen auf  $T^3$ . Mittels Gray-Stabilität (Satz 2.7) folgt, dass für  $s \in [0, 1)$  die Kontaktmannigfaltigkeiten  $(T^3, \xi_n^s)$  alle kontaktomorph zu  $(T^3, \xi_n^0 = \xi_n)$  sind. Um zu zeigen, dass  $(W, \omega)$  eine schwache symplektische Füllung von  $(T^3, \xi_n)$  ist, reicht es also aus, dies für eine der Kontaktstrukturen  $\xi_n^{s_0}$  mit  $s_0 \in [0, 1)$  zu zeigen. Dazu bemerke man

$$\xi_n^s \xrightarrow{s \rightarrow 1} \ker dt$$

und

$$\omega|_{\ker dt} = (dx \wedge dy + r dr \wedge dt)|_{\ker dt} = dx \wedge dy > 0.$$

Da Letzteres eine offene Bedingung ist, gilt für  $s_0 \in [0, 1)$  nahe bei 1

$$\omega|_{\xi_n^{s_0}} > 0.$$

$(W, \omega)$  ist also eine schwache symplektische Füllung von  $(T^3, \xi_n)$ .

(4) Weiter sind  $(T^3, \xi_{\pm}) := (T^3, \xi_{\pm 1})$  sogar stark symplektisch füllbar. Dazu betrachtet man wie eben  $W_{\pm} = T^2 \times D^2$  mit symplektischer Struktur

$$\omega_{\pm} := d(r \cos(2\pi t) dx \mp r \sin(2\pi t) dy).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{r \partial_r} \omega_{\pm} &= d(\iota_{r \partial_r} \omega_{\pm}) \\ &= d\left(\iota_{r \partial_r} \left( \cos(2\pi t) dr \wedge dx \mp \sin(2\pi t) dr \wedge dy \right)\right) \\ &\quad + d\left(\iota_{r \partial_r} \left( -2\pi r \sin(2\pi t) dt \wedge dx \pm 2\pi r \cos(2\pi t) dt \wedge dy \right)\right) \\ &= d\left(r \cos(2\pi t) dx \mp r \sin(2\pi t) dy\right) \\ &= \omega_{\pm} \end{aligned}$$

Also ist das Radialvektorfeld  $r\partial r$  ein Liouville-Vektorfeld und induziert somit auf jeder zu diesem Vektorfeld transversalen Hyperfläche eine Kontaktstruktur (siehe 2.32), also insbesondere auf

$$\{r = 1\} = \{(x, y, t) \mid (x, y) \in T^2, t \in S^1\} = T^3.$$

Die Kontaktstruktur ist gegeben durch die Kontaktform

$$\iota_{r\partial r}\omega_{\pm}|_{T^3} = \cos(2\pi t)dx \mp \sin(2\pi t)dy = \alpha_{\pm},$$

und da die Orientierungsbedingung  $\partial W_{\pm} = T^3_{\pm}$  (als orientierte Mannigfaltigkeiten) auch sofort erfüllt ist, liefert  $(W_{\pm}, \omega_{\pm})$  eine starke symplektische Füllung von  $(T^3, \xi_{\pm})$ .

In Abschnitt 5.3 wird man dies auch noch in einem Kontakt-Dehn-Chirurgie-Diagramm sehen.

Man bemerke, dass man diese letzte Konstruktion für  $n \geq 2$  nicht durchführen kann, da die obige symplektische Form dann in  $0 \in D^2$  nicht mehr wohldefiniert wäre. Der folgende Satz zeigt, dass es für diese Kontaktstrukturen gar nicht möglich ist, eine starke symplektische Füllung zu finden, und liefert somit ein erstes Beispiel von schwach symplektisch füllbaren Kontaktstrukturen, die nicht stark symplektisch füllbar sind.

**Satz 2.39** (Füllbarkeitssatz von Eliashberg).

(1)  $(T^3, \xi_n)$  ist schwach symplektisch füllbar für alle  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  und stark symplektisch füllbar für  $n = \pm 1$ .

(2) Aber  $(T^3, \xi_n)$  ist für  $n \geq 2$  **nicht** stark symplektisch füllbar.

*Beweisidee.* (für genauen Beweis siehe [10])

Dass die  $(T^3, \xi_n)$  alle schwach symplektisch füllbar und die  $(T^3, \xi_{\pm 1})$  sogar stark symplektisch füllbar sind, wurde in den vorigen Beispielen gezeigt. Die Aussage, dass  $(T^3, \xi_n)$  für  $n \geq 2$  nicht stark symplektisch füllbar ist, ist wesentlich schwerer zu zeigen. Die Idee dabei ist die folgende: Man bettet das Kotangentialbündel

$$T^*T^2 = T^2 \times \mathbb{R}^2$$

mit symplektischer Struktur

$$\omega := d(r \cos(2\pi t) dx - r \sin(2\pi t) dy)$$

symplektisch in  $(\mathbb{R}^4, \omega_{st})$  ein. Wenn man nun das Bild von  $W = T^2 \times D^2$  aus Beispiel



2.38 (4) aus dieser Mannigfaltigkeit entfernt, erhält man eine nicht-kompakte symplektische Mannigfaltigkeit mit **konkavem** Rand  $(T^3, \xi_1)$ , das heißt die Kontaktstruktur von  $(T^3, \xi_1)$  wird von der symplektischen Struktur genauso induziert, wie die Kontaktstruktur von  $M_-$  in einem symplektischen Kobordismus. Nun betrachtet man die  $n$ -fache Überlagerung dieser Mannigfaltigkeit, so dass man eine nicht-kompakte symplektische Mannigfaltigkeit mit konkavem Rand  $(T^3, \xi_n)$  erhält. Nimmt man nun an, dass  $(T^3, \xi_n)$  stark symplektisch füllbar ist, so kann man diese starke symplektische Füllung an die vorige Mannigfaltigkeit ankleben (siehe Beweis von Satz 2.41) und erhält so eine nicht-kompakte symplektische Mannigfaltigkeit, die außerhalb einer kompakten Menge aussieht wie  $n$  Kopien von  $(\mathbb{R}^4, \omega_{st})$ . Mit der Theorie holomorpher Kurven hat Gromov gezeigt, dass eine solche Mannigfaltigkeit für  $n > 1$  nicht existieren kann (siehe [17, Kapitel 0.3.C]).  $\square$

**Bemerkung 2.40**

(1) Da man im letzten Schritt des obigen Beweises einen tiefen Satz von Gromov benutzt hat, der auf der Theorie der holomorphen Kurven beruht, wird hier der geometrische Unterschied zwischen schwach und stark symplektisch füllbaren Kontaktstrukturen nicht wirklich klar. Andererseits kann man aber zeigen, dass diese beiden Füllbarkeitsbegriffe in einigen Fällen übereinstimmen. Zum Beispiel kann man jede schwache symplektische Füllung einer Homologiesphäre zu einer starken symplektischen Füllung deformieren (siehe [13, Lemma 6.5.5]).

(2) Wenn man sich das obige Resultat von Gromov und den Beweis von Eliashberg genauer ansieht, kann man eventuell zeigen, dass die Aussage über die Nicht-Füllbarkeit auch für negative Kontaktstrukturen gilt.

Ein analoges Resultat soll für Torusbündel über  $S^1$  formuliert werden. Im nächsten Kapitel werden dazu die entsprechenden Bündel und Kontaktstrukturen eingeführt um dies zu formulieren; die restlichen Kapitel beschäftigen sich hauptsächlich mit dem Beweis dieses Resultates.

Im Folgenden sollen starke symplektische Kobordismen etwas genauer betrachtet werden. Das Entscheidende daran ist, dass man symplektische Kobordismen entlang gleicher Ränder verkleben kann (siehe auch den vorigen Beweis).

**Satz 2.41** (über symplektische Kobordismen).

*Die Relation symplektisch kobordant zu sein ist reflexiv und transitiv, aber **nicht** symmetrisch.*

*Beweisskizze.*

Die Reflexivität folgt aus dem Beispiel 2.38 (2).

Für die Transitivität muss man etwas mehr arbeiten. Sei  $(W_-, \omega_-)$  ein symplektischer Kobordismus von  $(M_-, \xi_-)$  nach  $(M, \xi)$  und  $(W_+, \omega_+)$  ein symplektischer Kobordismus von  $(M, \xi)$  nach  $(M_+, \xi_+)$  (siehe auch Abbildung 2.5). Bezeichne mit  $j_\pm: M \rightarrow W_\pm$  die Inklusionen und mit  $Y_\pm$  die entsprechenden Liouville-Vektorfelder. Dann sind  $\alpha_\pm := j_\pm^*(\iota_{Y_\pm} \omega_\pm)$  zwei positive Kontaktformen zur Kontaktstruktur  $\xi$ . Es gibt also eine Funktion  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass  $\alpha_+ = e^f \alpha_-$  ist. Für eine Konstante  $C \gg 0$  ist  $(W_+, C\omega_+)$  immer noch ein symplektischer Kobordismus von  $(M, \xi)$  nach  $(M_+, \xi_+)$ . Man kann also ohne Einschränkung annehmen, dass  $f$  nur positive reelle Werte annimmt.

Definiere für eine geeignete Umgebung  $U_-(M)$  von  $M$  in  $W_-$  einen Diffeomorphismus

$$\Phi: U_-(M) \longrightarrow ((\varepsilon, 0] \times M, d(e^t \alpha_-)),$$

indem die Flusslinien von  $Y_-$  auf die Flusslinien von  $\partial_t$  abgebildet werden. Man kann nun zeigen, dass  $\Phi$  dann die symplektischen Strukturen erhält, also ein **Symplektomorphismus** ist. (Dies ist kein Zufall. Allgemeiner kann man zeigen, dass gleiche Kontakthyperflächen in symplektischen Mannigfaltigkeiten symplektomorphe Umgebungen besitzen. Also ist die symplektische Struktur in einer Umgebung einer Kontakthyperfläche schon eindeutig durch diese Kontakthyperfläche bestimmt, siehe [13, Lemma 5.2.4].) So erhält man also eine Kragenumgebung von  $M$  in  $(W_-, \omega_-)$  der Form

$$((\varepsilon, 0] \times M, \omega_- = d(e^t \alpha_-)).$$

Analog erhält man eine Kragenumgebung von  $M$  in  $(W_+, \omega_+)$  der Form

$$([0, \varepsilon) \times M, \omega_+ = d(e^t \alpha_+) = d(e^{t+f} \alpha_-)).$$

Definiere nun eine symplektische Mannigfaltigkeit durch

$$W_0 := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times M : 0 \leq t \leq f(x)\}$$

mit symplektischer Form  $d(e^t \alpha_-)$ . Dann ist

$$(W_- + W_0 + W_+)/\sim,$$

mit  $W_- \ni (0, x) \sim (0, x) \in W_0$  und  $W_0 \ni (f(x), x) \sim (0, x) \in W_+$ , ein symplekti-

scher Kobordismus von  $(M_-, \xi_-)$  nach  $(M_+, \xi_+)$ . Betrachte dazu auch die schematische Abbildung unten (in zwei Dimensionen tiefer).

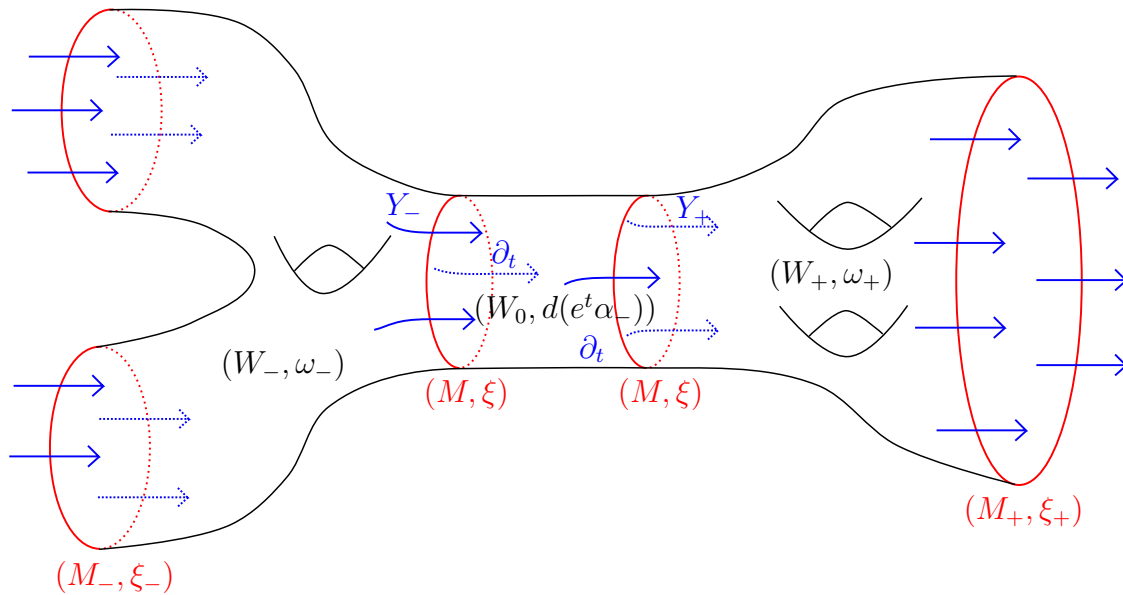


Abbildung 2.8: Ein symplektischer Kobordismus von  $(M_-, \xi_-)$  nach  $(M_+, \xi_+)$

Die Relation symplektisch kobordant zu sein, ist also auch transitiv.

Aber wie oben schon gesagt ist sie nicht symmetrisch. Dies folgt sofort aus den beiden folgenden (nicht-trivialen) Sätzen. □

**Satz 2.42** (Eliashberg-Gromov-Straffheitssatz).

*Wenn eine Kontaktmannigfaltigkeit  $(M, \xi)$  schwach symplektisch füllbar ist, so ist die Kontaktstruktur  $\xi$  straff. Anders gesagt, ist eine Kontaktmannigfaltigkeit mit überdrehter Kontaktstruktur also nicht schwach (und somit auch nicht stark) symplektisch füllbar.*

*Beweis.* siehe [13, Satz 6.5.6] □

**Satz 2.43** (Existenz von Kobordismen zur leeren Menge).

*Für jede Kontaktmannigfaltigkeit existiert ein symplektischer Kobordismus von dieser Kontaktmannigfaltigkeit zur leeren Menge.*

*Beweis.* siehe [12] □

## 2.7 Die charakteristische Blätterung

In den nächsten beiden Abschnitten wird eine Einführung in die Theorie der charakteristischen Blätterungen und der konvexen Flächen gegeben, welche fast komplett von

Giroux entwickelt wurde. Diese wird dann in Kapitel 4 benötigt, um die Kontakt-Dehn-Chirurgie zu definieren. Grundlage dafür ist [13, Kapitel 4.8].

Eine Motivation hinter den konvexen Flächen ist der Zusammenhang zwischen symplektischen und Kontaktmannigfaltigkeiten. Im Beweis von Satz 2.41 haben wir gesehen, dass eine Kontakthyperfläche in einer symplektischen Mannigfaltigkeit schon alle Eigenschaften der symplektischen Struktur in einer Umgebung der Hyperfläche trägt. Diese Eigenschaften sind alle in einer Kontaktstruktur, welche durch die symplektische Struktur induziert wurde, kodiert. Man kann also zum Beispiel symplektische Mannigfaltigkeiten entlang dieser Hyperflächen aufschneiden und wieder zusammenkleben und dabei die symplektische Struktur erhalten, solange die Kontaktstrukturen auf diesen Hyperflächen übereinstimmen (siehe zum Beispiel den Beweis von Satz 2.41). Man hat also eine vierdimensionale Struktur in der Umgebung einer dreidimensionalen Hyperfläche auf eine dreidimensionale Struktur zurückgeführt. Dasselbe soll nun für Kontaktstrukturen gemacht werden. Man möchte also die Kontaktstruktur in der Umgebung einer Fläche durch eine Struktur auf der Fläche beschreiben. Das Erstaunliche dabei ist, dass man ziemlich ähnlich vorgehen kann. Aber zuerst wird ein etwas einfacheres Konzept beschrieben, nämlich das Konzept der charakteristischen Blätterung.

**Definition 2.44** (charakteristische Blätterung).

*Sei  $S \subset (M, \xi = \ker \alpha)$  eine durch eine Volumenform  $\Omega$  orientierte geschlossene Fläche in einer Kontaktmannigfaltigkeit mit orientierter Kontaktstruktur. (Die Kontaktstruktur ist orientiert durch  $d\alpha$ , wie in der Bemerkung am Anfang beschrieben.)*

*Die **charakteristische Blätterung**  $S_\xi$  von  $S$  induziert durch die Kontaktstruktur  $\xi$  ist die eindimensionale, singuläre Blätterung repräsentiert durch das Vektorfeld  $X$ , welches*

$$\iota_X \Omega = \alpha|_{TS}$$

*erfüllt.*

**Bemerkung 2.45**

(1) Eine eindimensionale, singuläre Blätterung auf einer Fläche kann man auffassen als Äquivalenzklasse von Vektorfeldern auf dieser Fläche, wobei zwei Vektorfelder äquivalent sind, wenn sie sich nur durch eine Funktion  $f: S \rightarrow \mathbb{R}_+$  unterscheiden. Eine andere Wahl von  $\Omega$  oder  $\alpha$  führt zu einem Vektorfeld, das sich von dem alten nur durch eine solche Funktion  $f: S \rightarrow \mathbb{R}_+$  unterscheidet. Also ist die charakteristische Blätterung bei fester Orientierung der Fläche unabhängig von der Wahl der Volumenform  $\Omega$  und bei fester Orientierung der Kontaktstruktur  $\xi$  unabhängig von der Wahl der Kontaktform  $\alpha$ , sie

wird also nur durch die Fläche  $S$  und die Kontaktstruktur  $\xi$  bestimmt.

(2) Geometrisch zeigt das Vektorfeld immer in Richtung der Geraden, in der sich der Tangentialraum von  $S$  und die Kontaktebene schneiden, und falls diese übereinstimmen, ist das Vektorfeld null.

**Beispiel 2.46**

Betrachte  $V := \{x^2 + y^2 \leq 1\} \subset (S^1 \times \mathbb{R}^2, \xi_n = \ker(\cos(n\theta) dx - \sin(n\theta) dy))$ . Der Rand  $\partial V = \{x^2 + y^2 = 1\}$  ist eine geschlossene Fläche. Versehe den  $\mathbb{R}^2$ -Faktor mit Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$ , dann induziert die Volumenform  $\Omega := d\theta \wedge d\varphi$  die Standardorientierung auf  $S$ . Um nun die charakteristische Blätterung von  $S$  zu bestimmen, suchen wir ein Vektorfeld  $X$  auf  $S$ , welches  $\iota_X \Omega = \alpha_n|_{TS}$  erfüllt. Ein allgemeines Vektorfeld auf  $S$  ist von der Form  $X(\theta, \varphi) = a(\theta, \varphi) \partial_\theta + b(\theta, \varphi) \partial_\varphi$ . Wenn man dies in die Gleichung einsetzt, erhält man

$$\alpha_n|_{TS} = \iota_X \Omega = a(\theta, \varphi) d\varphi - b(\theta, \varphi) d\theta.$$

Auf  $S$  gilt nun  $dx = -\sin \varphi d\varphi$  und  $dy = \cos \varphi d\varphi$ , also ist

$$\alpha_n|_{TS} = (\cos(n\theta) dx - \sin(n\theta) dy)|_{TS} = -(\cos(n\theta) \sin \varphi - \sin(n\theta) \cos \varphi) d\varphi.$$

Koeffizientenvergleich liefert dann  $X(\theta, \varphi) = -(\cos(n\theta) \sin \varphi - \sin(n\theta) \cos \varphi) \partial_\theta$ . Dies kann man nun wieder in kartesische Koordinaten umrechnen und erhält ein Vektorfeld  $X$  auf  $S$ , welches die charakteristische Blätterung  $S_{\xi_n}$  beschreibt:

$$X(\theta, x, y) = -(x \sin(n\theta) + y \cos(n\theta)) \partial_\theta.$$

In Abbildung 2.9 weiter unten sind einige Integalkurven der charakteristische Blätterung im Fall  $n = 1$  in grün eingezeichnet.

Was dies alles bringt, zeigt der folgende Satz.

**Satz 2.47** (Kontaktstruktur in der Umgebung einer Fläche).

Seien  $S_i \subset (M_i, \xi_i)$  ( $i = 1, 2$ ) zwei orientierte, geschlossene Flächen in zwei Kontaktmannigfaltigkeiten und sei  $\phi : S_1 \rightarrow S_2$  ein Diffeomorphismus mit  $\phi(S_{1, \xi_1}) = S_{2, \xi_2}$ .

Dann gibt es einen Kontaktomorphismus  $\psi : U(S_1) \rightarrow U(S_2)$  von geeigneten Umgebungen  $U(S_i)$  von  $S_i$  in  $M_i$  mit  $\psi|_{S_1} = \phi$ .

*Beweis.* siehe [13, Satz 2.5.23]

□

Dieser Satz sagt also aus, dass eine Kontaktstruktur in einer Umgebung einer Fläche schon durch die charakteristische Blätterung auf dieser Fläche bestimmt ist. Dies ist eine entscheidende Beobachtung, wenn wir später Chirurgiekonstruktionen durchführen wollen, das heißt entlang Flächen aufschneiden und wieder zusammenkleben. Mit diesem Satz kann man solche Konstruktionen mit den Kontaktstrukturen verträglich machen, solange man dafür sorgen kann, dass die charakteristischen Blätterungen dieselben sind. Dies ist allerdings nicht so einfach, da charakteristische Blätterungen sehr kompliziert sein können. Dieses Problem löst die Theorie der konvexen Flächen, denn bei diesen ist die charakteristische Blätterung (und nach dem vorigen Satz dann auch die Kontaktstruktur) schon durch viel weniger bestimmt, nämlich durch eine endliche Vereinigung von eingebetteten, einfach geschlossenen Kurven auf der Fläche.

## 2.8 Konvexe Flächen

Um den Begriff der konvexen Fläche zu definieren, wird zuerst ein Objekt benötigt, das dem Liouville-Vektorfeld recht ähnlich ist.

**Definition 2.48** (Kontaktvektorfeld).

*Ein Vektorfeld  $X$  auf einer Kontaktmannigfaltigkeit  $(M, \xi = \ker \alpha)$  heißt **Kontaktvektorfeld** falls,  $\mathfrak{L}_X \alpha = \mu \alpha$  für eine Funktion  $\mu: M \rightarrow \mathbb{R}$  gilt.*

**Bemerkung 2.49**

(1) Diese Definition ist unabhängig von der speziellen Wahl der Kontaktform  $\alpha$ , welche die Kontaktstruktur  $\xi$  beschreibt, denn für eine weitere Kontaktform  $\tilde{\alpha} = \lambda \alpha$  mit  $\lambda: M \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gilt

$$\mathfrak{L}_X(\lambda \alpha) = (d\lambda(X) + \lambda \mu) \alpha,$$

wie man mit der Definition der Lie-Ableitung oder der Cartan-Formel sofort nachrechnen kann.

(2) Man kann zeigen, dass diese Definition äquivalent dazu ist, dass der Fluss von  $X$  die Kontaktstruktur erhält (also ein lokaler Kontaktomorphismus ist), was man normalerweise als Definition zugrunde legt. In dieser Arbeit wird allerdings nur die obige Eigenschaft eines Kontaktvektorfeldes benötigt.

Mit diesen Kontaktvektorfeldern kann man nun den Begriff der konvexen Fläche, völlig analog zu den Kontakthyperflächen in symplektischen Mannigfaltigkeiten definieren (siehe Proposition 2.32).

**Definition 2.50** (konvexe Fläche).

Eine orientierte geschlossene Fläche  $S \subset (M, \xi)$  heißt **konvexe Fläche**, falls ein Kontaktvektorfeld in einer Umgebung von  $S$  existiert, das transversal zu  $S$  ist.

**Bemerkung 2.51**

(1) Der Begriff konvex hat hier nichts mit dem geometrischen Begriff konvex zu tun. Hier gibt es auch keine Unterscheidung zwischen konvex und konkav, deshalb ist dieser Begriff etwas irreführend.

(2) Man kann den Begriff der konvexen Fläche auch etwas allgemeiner definieren und zwar für nicht-orientierbare Flächen oder Flächen mit Rand. Dies wird hier aber nicht benötigt.

(3) Man kann zeigen, dass jede geschlossene, orientierbare Fläche in einer Kontaktmannigfaltigkeit  $C^\infty$ -nahe zu einer konvexen Fläche liegt (siehe [13, Proposition 4.8.8]).

**Beispiel 2.52**

Betrachte wieder (wie in Beispiel 2.46)  $V \subset (S^1 \times \mathbb{R}^2, \xi_n)$ . Der Rand  $\partial V$  ist eine orientierte, geschlossene Fläche. Das Vektorfeld  $X := x \partial_x + y \partial_y$  ist transversal zu  $S$ . Weiter gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_X \alpha_n &= d(\iota_X \alpha_n) + \iota_X (d\alpha_n) \\ &= d(x \cos(n\theta) - y \sin(n\theta)) + \iota_X (-n \sin(n\theta) d\theta \wedge dx - n \cos(n\theta) d\theta \wedge dy) \\ &= \cos(n\theta) dx - nx \sin(n\theta) d\theta - \sin(n\theta) dy - ny \cos(n\theta) d\theta \\ &\quad + nx \sin(n\theta) d\theta + ny \cos(n\theta) d\theta \\ &= \alpha_n. \end{aligned}$$

Also ist  $X$  ein Kontaktvektorfeld für die konvexe Fläche  $\partial V \subset (S^1 \times \mathbb{R}^2, \xi_n)$ .

Jetzt haben wir die konvexen Flächen in Analogie zu den Kontakthyperflächen in symplektischen Mannigfaltigkeiten definiert. Nun stellt sich natürlich die Frage, ob wir damit wirklich eine einfachere Beschreibung der Kontaktstruktur als mit der charakteristischen Blätterung bekommen. Dies werden wir im Folgenden sehen.

**Definition 2.53** (Teilungsmenge).

Sei  $S \subset (M, \xi)$  eine konvexe Fläche mit Kontaktvektorfeld  $X$ . Die **Teilungsmenge** von  $S$  ist

$$\Gamma_S := \{p \in S : X(p) \in \xi_p\}.$$

Bezeichne mit  $\#\Gamma_S$  die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von  $\Gamma_S$ .

**Bemerkung 2.54**

(1) Diese Definition hängt von der Wahl des Kontaktvektorfeldes ab. Man kann aber zeigen, dass der Isotopietyp von  $\Gamma_S$  unabhängig von  $X$  ist, weswegen das Kontaktvektorfeld in der Notation weggelassen wird. Weiter wird auch der Isotopietyp der Teilungsmenge unter Kontaktomorphismen erhalten.

(2) Weiter unten werden wir sehen, dass die Teilungsmenge immer eine disjunkte Vereinigung von eingebetteten Kreisen ist.

Zuerst ein Beispiel dazu.

**Beispiel 2.55**

In Beispiel 2.52 wurde gezeigt, dass  $X = x \partial_x + y \partial_y$  ein Kontaktvektorfeld für die konvexe Fläche  $\partial V \subset (S^1 \times \mathbb{R}^2, \xi_n)$  ist. Die Teilungsmenge ist nun die Menge, an denen  $X$  tangential zu den Kontaktebenen ist, also alle Punkte auf  $\partial V$ , für die

$$\alpha_n(X) = x \cos(n\theta) - y \sin(n\theta) = 0$$

gilt. Die Teilungsmenge von  $\partial V$  zu dem Kontaktvektorfeld  $X$  ist also

$$\Gamma_{\partial V} = \left\{ (\theta, \pm \sin(n\theta), \pm \cos(n\theta)) \right\}.$$

(Betrachte dazu Abbildung 2.9 im Fall  $n = 1$ . Die Teilungsmenge ist in rot gezeichnet.)

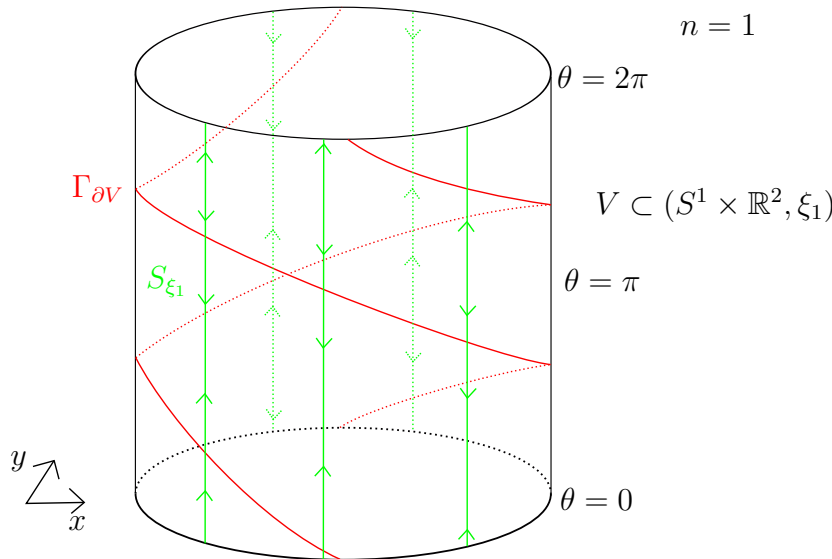


Abbildung 2.9: Die charakteristische Blätterung und die Teilungsmenge der konvexen Fläche  $\partial V$  bezüglich der Kontaktstruktur  $\xi_1$



In diesem Fall besteht die Teilungsmenge also aus zwei Kurven, das heißt  $\#\Gamma_{\partial V} = 2$ . Hier sieht man dann auch, dass die Kontaktstrukturen  $\xi_n$  paarweise nicht isotop sind. Denn wenn  $\xi_n$  isotop zu  $\xi_m$  ist, dann ist  $\Gamma_{\partial V, \xi_n}$  isotop zu  $\Gamma_{\partial V, \xi_m}$ , und dies ist offensichtlich nur der Fall für  $n = m$ .

Die Behauptung ist nun, dass diese Teilungsmenge im Wesentlichen schon die Kontaktstruktur beschreibt. Um dies einzusehen, braucht man noch eine weitere Definition.

**Definition 2.56** (Teilung einer Blätterung).

Sei  $\mathfrak{F}$  eine eindimensionale, singuläre Blätterung auf einer geschlossenen Fläche  $S$ . Eine disjunkte Vereinigung  $\Gamma$  von eingebetteten einfach geschlossenen Kurven in  $S$ , die transversal zu  $\mathfrak{F}$  sind, **teilt**  $\mathfrak{F}$ , wenn eine Volumenform  $\Omega$  auf  $S$  und ein Vektorfeld  $X$ , welches  $\mathfrak{F}$  repräsentiert, existieren, so dass

- $\mathfrak{L}_X \Omega \neq 0$  auf  $S \setminus \Gamma$  und
- mit  $S_{\pm} := \{p \in S : \pm \operatorname{div}_{\Omega}(X) > 0\}$  zeigt das Vektorfeld  $X$  entlang  $\Gamma$  aus  $S_+$  heraus.

Im obigen Bild sieht man sofort, dass diese Teilungsmenge die charakteristische Blätterung in diesem Beispiel wirklich teilt; dies gilt immer, wie folgender Satz zeigt.

**Korollar 2.57.**

Die Teilungsmenge einer konvexen Fläche teilt die charakteristische Blätterung dieser Fläche. Die Teilungsmenge ist also insbesondere eine disjunkte Vereinigung von einfach geschlossenen Kurven auf der konvexen Fläche.

*Beweis.*

Der Beweis ist nicht schwierig, für den Rest dieser Arbeit aber nicht von Bedeutung (deswegen siehe [13, Seiten 230-231]). □

Die Umkehrung dieses Korollars gilt aber auch.

**Satz 2.58** (Giroux-Kriterium für konvexe Flächen).

Eine geschlossene, orientierte Fläche  $S \subset (M, \xi)$  ist konvex genau dann, wenn die charakteristische Blätterung  $S_{\xi}$  von einer disjunkten Vereinigung von einfach geschlossenen Kurven auf  $S$  geteilt wird.

*Beweis.* siehe [13, Satz 4.8.5(a)] □

Der entscheidende Punkt in der Theorie der konvexen Flächen ist der folgende Satz.

**Satz 2.59** (Giroux-Flexibilität).

Sei  $S \subset (M, \xi)$  eine konvexe Fläche in einer Kontaktmannigfaltigkeit, sei  $\mathfrak{F}$  eine eindimensionale, singuläre Blätterung von  $S$ , die durch die Teilungsmenge  $\Gamma_S$  von  $S$  geteilt wird, und sei  $U(S)$  eine beliebige Umgebung von  $S$  in  $M$ .

Dann gibt es eine Isotopie  $\psi_t : S \rightarrow U(S)$  ( $t \in [0, 1]$ ) von Einbettungen mit

- $\psi_0$  ist die Inklusion  $S \subset M$ ,
- $\psi_t(S)$  ist eine konvexe Fläche mit Teilungsmenge  $\psi_t(\Gamma_S)$  für alle  $t \in [0, 1]$  und
- die charakteristische Blätterung  $(\psi_1(S))_\xi$  stimmt mit  $\psi_1(\mathfrak{F})$  überein.

*Beweis.* siehe [13, Satz 4.8.11] □

**Bemerkung 2.60**

Zusammen mit Satz 2.47 zeigt dieser Satz die volle Stärke der konvexen Flächen, denn der obige Satz sagt, dass die Teilungskurven (nach einer beliebig kleinen Störung) die charakteristische Blätterung bestimmen, und diese bestimmt nach Satz 2.47 die Kontaktstruktur in einer Umgebung der Fläche. Man kann also Chirurgiekonstruktionen so ausführen, dass die Kontaktstruktur erhalten bleibt, solange man dafür sorgt, dass die Teilungskurven auf den Flächen, die man zusammenklebt, dieselben sind.

Dies ist allerdings ein Phänomen, das nur im Dreidimensionalen auftritt. Diese Sätze lassen sich so nicht auf höhere Dimensionen ausweiten.

## 2.9 Kontaktstrukturen auf Volltori

In Kapitel 5 soll die Kontakt-Dehn-Chirurgie eingeführt werden. Man möchte also Volltori aus einer Kontaktmannigfaltigkeit herausschneiden und dann Volltori wieder hereinkleben. Dabei soll die Kontaktstruktur erhalten bleiben. Deswegen wird im Folgenden der Fall eines Volltorus mit Kontaktstruktur betrachtet, bezüglich derer der Rand des Volltorus eine konvexe Fläche ist.

**Definition 2.61** (Steigung eines konvexen Torus).

Sei  $V \subset (M, \xi)$  ein Volltorus mit konvexem Rand  $\partial V$  in einer Kontaktmannigfaltigkeit  $(M, \xi)$  mit straffer Kontaktstruktur  $\xi$ . Nach Festlegen eines Meridians  $\mu$  und einer Longitude  $\lambda$  auf  $\partial V$  (siehe Anfang von Kapitel 5 für eine genaue Definition) kann man  $\partial V$  mit  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  durch

$$\mu \equiv \{(t, 0) : t \in [0, 1]\}$$

$$\lambda \equiv \{(0, t) : t \in [0, 1]\}$$

identifizieren. Mittels dieser Identifikation erhalten wir:

Steigung von  $\mu$ =:  $s(\mu) = 0$

Steigung von  $\lambda$ =:  $s(\lambda) = \infty$

Nach Korollar 2.57 ist die Teilungsmenge  $\Gamma_{\partial V}$  eine disjunkte Einbettung von Kreisen in  $\partial V$ , welche wir **Teilungskurven** nennen. Nach einem Diffeomorphismus isotop zur Identität, welcher einer anderen Wahl eines Kontaktvektorfeldes entspricht, kann man annehmen, dass die Teilungskurven linear und parallel in  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  sind. (Dies geht, da die Kontaktstruktur straff sein soll und es somit nach dem Giroux-Kriterium für überdrehte Kontaktstrukturen keine auf  $\partial V$  zusammenziehbaren Teilungskurven geben kann, siehe dafür [13, Satz 4.8.13].)

Die Steigung der Teilungskurven heißt dann **Steigung** des konvexen Torus  $\partial V$  und wird mit  $s(\partial V)$  bezeichnet.

### Bemerkung 2.62

Die Steigung eines konvexen Torus ist immer rational, da lineare Kurven auf einem Torus genau dann geschlossen sind, wenn sie rationale Steigung haben (dafür siehe zum Beispiel [29, Proposition 14.1]).

### Beispiel 2.63

Betrachte wieder wie in den vorigen Beispielen die konvexe Fläche  $\partial V \subset (S^1 \times \mathbb{R}^2, \xi_n)$ , wobei  $\partial V = \{x^2 + y^2 = 1\}$ .

(1) Ein Meridian ist gegeben durch

$$\mu := \{(0, \cos \varphi, \sin \varphi) : \varphi \in S^1\}$$

und eine Longitude zum Beispiel durch

$$\lambda := \{(\theta, \sin(n\theta), \cos(n\theta)) : \theta \in S^1\}.$$

Mittels dieser Identifikation mit  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  erhalten wir  $s(\partial V) = s(\Gamma_{\partial V}) = s(\lambda) = \infty$ .

(2) Ein weitere Identifikation mit  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  ist gegeben durch

$$\mu := \{(0, \cos \varphi, \sin \varphi) : \varphi \in S^1\}$$

und

$$\lambda := \{(\theta, 1, 0) : \theta \in S^1\}.$$

Dann gilt für die Steigung  $s(\partial V) = s(\Gamma_{\partial V}) = -\frac{1}{n}$ .

(3) Eine Kontaktstruktur mit Steigung  $\infty$  bezüglich dieser Identifikation mit  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  ist durch die Kontaktform  $dx + y d\theta$  gegeben. Denn dann gilt:

$$\mathfrak{L}_{x\partial_x + y\partial_y}(dx + y d\theta) = \iota_{x\partial_x + y\partial_y}(dy \wedge d\theta) + d(x) = dx + y d\theta$$

Also ist  $\partial V$  auch eine konvexe Fläche für diese Kontaktstruktur. Die Teilungsmenge ist dann

$$\Gamma_{\partial V} = \{(dx + y d\theta)(x\partial_x + y\partial_y) = 0\} = \{x = 0\}.$$

Somit ist die Steigung  $s(\partial V) = s(\Gamma_{\partial V}) = \infty$ .

Es gibt also straffe Kontaktstrukturen auf  $S^1 \times D^2$  mit konvexem Rand, so dass es genau zwei Teilungskurven mit Steigung  $\frac{1}{n}$  gibt. Jetzt stellt sich natürlich die Frage, ob es für jede rationale Zahl eine solche Kontaktmannigfaltigkeit mit dieser rationalen Zahl als Steigung gibt und ob diese Kontaktstrukturen eindeutig sind. Die Antwort gibt der folgende Satz.

**Satz 2.64** (Klassifikation straffer Kontaktstrukturen auf Volltori).

*Für jedes  $n \in \mathbb{Z}$  (auch 0) existiert genau eine (bis auf Isotopie, die den Rand fest lässt) positive straffe Kontaktstruktur auf  $S^1 \times D^2$  mit festgelegtem konvexem Rand  $\partial(S^1 \times D^2)$ , so dass  $\#\Gamma_{\partial(S^1 \times D^2)} = 2$  und Steigung  $s(\partial(S^1 \times D^2)) = \frac{1}{n}$ .*

*Weiter gibt es für jedes  $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  mindestens eine positive straffe Kontaktstruktur auf  $S^1 \times D^2$  mit festgelegtem konvexem Rand  $\partial(S^1 \times D^2)$ , so dass  $\#\Gamma_{\partial(S^1 \times D^2)} = 2$  und Steigung  $s(\partial(S^1 \times D^2)) = r$ .*

*Beweisskizze.* (für einen genaueren Beweis siehe [28, Satz 5.1.30] oder [22, Satz 2.3])

Im vorigen Beispiel wurden genau solche Kontaktstrukturen mit Steigung  $\frac{1}{n}$  konstruiert. Zu zeigen bleibt also die Eindeutigkeit im Fall  $\frac{1}{n}$ .

Ein  $k$ -facher Dehn-Twist ( $k \in \mathbb{Z}$ ) entlang eines Meridians ist der Diffeomorphismus von  $\partial(S^1 \times D^2)$ , bei dem der Torus entlang einer meridionalen Scheibe aufgeschnitten, dann  $k$ -mal verdreht und anschließend wieder zusammengeklebt wird (siehe auch Definition 3.22). Ein solcher Dehn-Twist erweitert zu einem Diffeomorphismus über den Volltorus  $S^1 \times D^2$ . Die Erweiterung eines Dehn-Twists ist gegeben durch

$$(\theta, x, y) \longmapsto (\theta, x \cos(k\theta) + y \sin(k\theta), -x \sin(k\theta) + y \cos(k\theta)),$$

siehe auch Beispiel 2.5. Wenn man nun zeigen kann, dass der Satz für Steigung  $-\frac{1}{n}$

gilt, dann gilt er auch für Steigung  $-\frac{1}{n-k}$ , da man die Kontaktstrukturen mit Steigung  $-\frac{1}{n}$  mit einem  $k$ -fachen Dehn-Twist auf Kontaktstrukturen mit Steigung  $-\frac{1}{n-k}$  abbilden kann und umgekehrt (siehe Beispiel 2.5 und Beispiel 2.63). Es reicht also, diesen Satz für Steigung 1 zu beweisen. Dabei ist die Idee die Folgende:

Man schneidet den Volltorus entlang einer meridionalen Scheibe auf. Die resultierende Kontaktmannigfaltigkeit ist ein 3-Ball (nach Glättung des Winkels). Dabei soll die meridionale Scheibe so gewählt werden, dass der Rand dieses 3-Balles eine konvexe Fläche mit zusammenhängender Teilungsmenge ist (um zu zeigen, dass dies geht, müsste man noch ein wenig arbeiten). Ein Resultat von Eliashberg [9, Satz 2.1.3] besagt nun, dass ein 3-Ball mit konvexem Rand und zusammenhängender Teilungsmenge eine eindeutige straffe Kontaktstruktur (bis auf Isotopie fest am Rand) besitzt.

In [22, Satz 2.3] wird sogar eine vollständige Auflistung aller straffer Kontaktstrukturen auf  $S^1 \times D^2$  mit festgelegtem konvexem Rand  $\partial(S^1 \times D^2)$  gegeben, so dass  $\#\Gamma_{\partial(S^1 \times D^2)} = 2$  und Steigung  $s(\partial(S^1 \times D^2)) = r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  ist. Insbesondere folgt also, dass es zu jedem  $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  mindestens eine solche Kontaktstruktur gibt.  $\square$

### Bemerkung 2.65

Jetzt kann man sich noch fragen, was im Falle Steigung 0 passiert.

Nehmen wir zuerst an, dass es eine Kontaktstruktur auf  $S^1 \times D^2$  gibt, so dass  $\partial(S^1 \times D^2)$  eine konvexe Fläche mit zwei linearen und parallelen Teilungskurven mit Steigung 0 ist. Diese Kontaktstruktur ist dann in jedem Fall überdreht, denn da die Teilungskurven Steigung 0 haben, entsprechen diese Teilungskurven Meridianen, die gleichzeitig Legendre-Knoten sind. Diese beranden zweidimensionale Scheiben, die man so einbetten kann, dass sie an ihren Rändern transversal zu den Kontaktebenen stehen. So kann man überdrehte Scheiben erhalten.

Weiter kann man solche Kontaktstrukturen relativ leicht explizit mit einer Methode, die Lutz-Twist genannt wird, konstruieren. Dafür siehe zum Beispiel [5, Seiten 586-587].

## 3 Torusbündel über $S^1$

Torusbündel über  $S^1$  sind eine relativ einfache Klasse von 3-Mannigfaltigkeiten. Sie sind einfach zu beschreiben und zu verstehen, andererseits sind sie aber doch so zahlreich (es gibt insbesondere unendlich viele verschiedene) und vielfältig, dass man viele geometrische und topologische Phänomene an ihnen beschreiben und erkennen kann. So ist es auch in der Kontaktgeometrie. Am Ende dieses Kapitels wird das Hauptresultat dieser Arbeit, der Füllbarkeitssatz von Ding-Geiges, formuliert. Dieser Satz besagt, dass jedes Torusbündel über  $S^1$  unendlich viele Kontaktstrukturen trägt, die schwach symplektisch füllbar, aber nicht stark symplektisch füllbar sind.

Aber zuerst werden im ersten Abschnitt allgemeine Flächenbündel über  $S^1$  betrachtet. Im zweiten Abschnitt wird dann speziell auf Torusbündel über  $S^1$  eingegangen. Man wird sehen, dass jedes solche Torusbündel durch eine Matrix aus  $SL_2(\mathbb{Z})$  beschrieben wird. Diese Matrizen werden dann im dritten Abschnitt genauer betrachtet. Mit dem Verständnis dieser Matrizen können im vierten Abschnitt die Torusbündel über  $S^1$  klassifiziert werden. Im fünften Abschnitt wird dann auf die Kontaktgeometrie dieser Torusbündel eingegangen. Zuerst werden die entsprechenden Kontaktstrukturen konstruiert und dann werden der Klassifikationssatz dieser Kontaktstrukturen und der Füllbarkeitssatz von Ding-Geiges angegeben.

### 3.1 Flächenbündel über $S^1$

Zuerst wiederholen wir das allgemeine Konzept eines Faserbündels.

**Definition 3.1** (Faserbündel).

*Ein Tripel  $(E, \pi, B)$  heißt **Faserbündel** mit **Faser**  $F$ , falls  $E$ ,  $B$  und  $F$  Mannigfaltigkeiten sind,  $\pi: E \rightarrow B$  eine surjektive Abbildung ist und für jeden Punkt  $b \in B$  eine*

offene Umgebung  $U \subset B$  von  $b$  existiert, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\cong} & F \times U \\ \downarrow \pi & \swarrow & \\ U & & \end{array}$$

Dann nennt man  $E$  den **Totalraum** und  $B$  die **Basis** des Bündels. Ein Faserbündel mit Basis  $S^1$  und Faser eine Fläche nennt man **Flächenbündel über  $S^1$** . Ist die Faser ein Torus, so spricht man von einem **Torusbündel über  $S^1$** .

Zuerst ein paar Beispiele, einige davon sind schon vorher vorgekommen.

**Beispiel 3.2**

(1) Es gibt die sogenannten **trivialen Bündel**, das heißt Faserbündel, bei denen man für die offene Umgebung  $U$  aus der Definition oben immer den gesamten Basisraum  $B$  wählen kann, wie zum Beispiel:  $T^2 \times S^1 \cong T^3$ ,  $S^2 \times S^1$ ,  $T^2 \times D^2, \dots$

(2) Aber es gibt auch nicht-triviale Bündel wie das Möbiusband oder folgende Flächenbündel:

$$(\Sigma \times I) /_{(p,0) \sim (\psi(p),1)}$$

Hierbei bezeichnet  $I$  das abgeschlossene Intervall  $[0, 1]$  und  $\Sigma$  eine orientierbare Fläche (siehe auch die schematische Abbildung 3.1). Dabei ist  $\psi$  ein beliebiger orientierungserhaltender Diffeomorphismus  $\psi: \Sigma \rightarrow \Sigma$  (nicht isotop zur Identität).

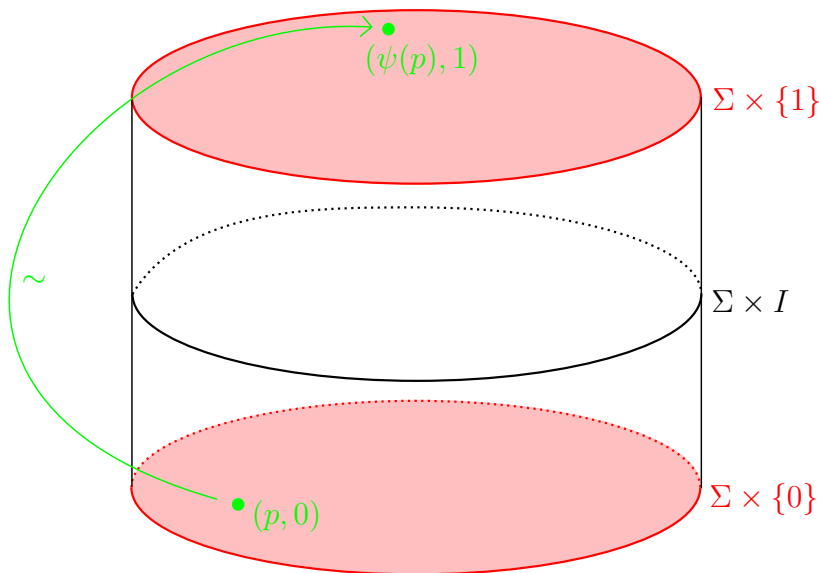


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung eines Flächenbündels über  $S^1$ .

**Bemerkung 3.3**

(1) Man kann oben im Beispiel natürlich auch orientierungsumkehrende Diffeomorphismen betrachten, erhält dann aber als Totalraum des Bündels eine Mannigfaltigkeit, die nicht orientierbar ist und somit für die Kontaktgeometrie nicht zu gebrauchen ist (siehe Bemerkung am Anfang).

(2) Vollkommen analog kann man das obige Flächenbündel auch durch

$$(\Sigma \times \mathbb{R}) /_{(p,t) \sim (\psi(p), t+1)}$$

beschreiben. Für rein topologische Betrachtungen ist die erste Darstellung oft besser zu verwenden. Möchte man jedoch glatte Strukturen (wie zum Beispiel Kontaktstrukturen) auf diesen Flächenbündeln beschreiben, ist es meistens einfacher, wenn man mit der zweiten Darstellung arbeitet, da man dort leichter erkennen kann, welche Strukturen sich auf den Quotientenraum übertragen (siehe zum Beispiel Abschnitt 3.5). Deswegen wird im Folgenden je nach Kontext einfach eine der beiden Darstellungen genutzt.

Umgekehrt kann man zeigen, dass jedes Flächenbündel mit orientierbarem Totalraum von der Form des obigen Beispiels ist. Dafür benötigt man das folgende Korollar.

**Korollar 3.4.**

*Ein Faserbündel über einer Scheibe  $D^k$  ist ein triviales Bündel.*

*Beweisskizze.* (für genaueren Beweis siehe [20, Korollar 4.8])

Sei  $\pi: E \rightarrow D^k$  ein Faserbündel über einer  $k$ -Scheibe  $D^k$  mit Faser  $F$ . Da  $D^k$  konvex ist, ist die Identität auf  $D^k$  homotop zu der konstanten Abbildung  $g: D^k \rightarrow \{0\} \subset D^k$ . Damit sind die Pullback-Bündel  $g^*(E)$  und  $\text{Id}^*(E)$  isomorph (siehe [20, Satz 4.7]) und es gilt

$$E \cong \text{Id}^*(E) \cong g^*(E) \cong F \times D^k.$$

□

**Satz 3.5** (Form von Flächenbündeln über  $S^1$ ).

*Ein Flächenbündel über  $S^1$  mit orientierbarem Totalraum ist von folgender Form (siehe Beispiel 3.2 (2)):*

$$(\Sigma \times I) /_{(p,0) \sim (\psi(p),1)}$$

*Dabei bezeichnen  $I$  das abgeschlossene Intervall  $[0, 1]$  und  $\Sigma$  eine orientierbare Fläche, und  $\psi: \Sigma \rightarrow \Sigma$  ist ein beliebiger orientierungserhaltender Diffeomorphismus.*



*Beweis.*

Entfernt man aus  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  den Punkt  $0 = 1$  und die zugehörige Faser, so erhält man ein  $\Sigma$ -Bündel über dem Intervall  $(0, 1)$ . Mit dem vorigen Korollar folgt, dass das Bündel trivial ist, also von der Form  $\Sigma \times (0, 1)$ . Um das ursprüngliche Bündel zurückzuerhalten, muss man nun die Faser über dem Punkt  $0 = 1$  wieder in das Bündel zurück kleben. Dies entspricht genau der Verklebung mit einem Diffeomorphismus  $\psi: \Sigma \rightarrow \Sigma$  wie gefordert (siehe auch Abbildung 3.1). Und da der Totalraum orientierbar sein soll, muss der Diffeomorphismus ein orientierungserhaltender sein (siehe die Bemerkung oben).  $\square$

**Definition 3.6** (Monodromie eines Flächenbündels über  $S^1$ ).

Der Diffeomorphismus  $\psi$  aus Satz 3.5 heißt **Monodromie** des Flächenbündels bezüglich der gewählten Identifikation  $\Sigma$  der Faser. Bezeichne dieses Flächenbündel dann mit  $\Sigma_\psi^3$ .

**Bemerkung 3.7**

- (1) Die Monodromie hängt wirklich von der gewählten Identifikation  $\Sigma$  der Faser ab (siehe dazu das nächste Beispiel).
- (2) Hier ist die Monodromie nur für Flächenbündel über  $S^1$  definiert, später (im nächsten Kapitel) werden wir die Monodromie für viel allgemeinere Objekte einführen.
- (3) Üblicherweise würde man eher  $\psi^{-1}$  als die Monodromie bezeichnen. Hier wird dies aber meistens keinen Unterschied machen (siehe Kapitel 4).

**Beispiel 3.8**

- (1) Betrachte folgendes  $T^2$ -Bündel über  $S^1$

$$T_\psi^3 = (T^2 \times I) /_{(p,0) \sim (\psi(p),1)},$$

wobei  $\psi$  ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus von  $T^2$  ist. Sei nun  $\phi$  ein weiterer orientierungserhaltender Diffeomorphismus von  $T^2$ . Mit diesem kann man die Identifikation des  $T^2$ -Faktors wie folgt ändern:

$$\begin{aligned} T^2 \times I &\longrightarrow \phi(T^2) \times I \\ (p, t) &\longmapsto (\phi(p), t) \end{aligned}$$

Dieser Diffeomorphismus induziert einen Diffeomorphismus zwischen folgenden Torus-

bündeln

$$T_\psi^3 = (T^2 \times I) / \sim \rightarrow (T^2 \times I) / \sim$$

$$(p, t) \mapsto (\phi(p), t).$$

Jetzt berechnet man die Monodromie des rechten Bündels, dazu betrachte:

$$\begin{array}{ccc} (p, 0) & \mapsto & (\phi(p), 0) =: (q, 0) \\ \wr & & \wr \\ (\psi(p), 1) & \mapsto & (\phi \circ \psi(p), 1) = (\phi \circ \psi \circ \phi^{-1}(q), 1) \end{array}$$

Die Monodromie auf dem rechten Bündel ist also gegeben durch  $\phi \circ \psi \circ \phi^{-1}$ . Hier sieht man also insbesondere, dass die Monodromie wirklich von der gewählten Identifikation der Faser abhängt.

(2) Sei  $W$  ein beliebiges  $\Sigma$ -Bündel über  $D^2$ . Dann ist dieses Bündel nach Korollar 3.4 ein triviales Bündel. Das induzierte Bündel über  $S^1 = \partial D^2$  ist also auch trivial und hat somit auch triviale Monodromie. Umgekehrt sieht man so, dass ein  $\Sigma$ -Bündel über  $S^1$  genau dann zu einem  $\Sigma$ -Bündel über  $D^2$  erweitert, wenn die Monodromie trivial ist.

Es stellt sich also die Frage, inwieweit ein solches Flächenbündel von der Monodromie abhängt und umgekehrt inwieweit die Monodromie von dem entsprechenden Bündel abhängt. Ein erster Schritt in die eine Richtung ist das folgende Korollar.

**Korollar 3.9.**

*Zwei Flächenbündel über  $S^1$  mit isotopen Monodromien haben diffeomorphe Totalräume.*

*Beweis.*

Seien  $\phi, \psi: \Sigma \rightarrow \Sigma$  orientierungserhaltende Diffeomorphismen einer Fläche  $\Sigma$  und sei  $F: \Sigma \times I \rightarrow \Sigma$  eine Isotopie von  $\phi$  zu  $\psi$ . Der Diffeomorphismus

$$\Sigma \times I \longrightarrow \Sigma \times I$$

$$(p, t) \mapsto (F(\phi^{-1}(p), t), t)$$

induziert einen Diffeomorphismus

$$\begin{aligned} \Sigma_\phi^3 &= (\Sigma \times I)/\sim \longmapsto (\Sigma \times I)/\sim = \Sigma_\psi^3 \\ (p, 0) &\longmapsto (\phi \circ \phi^{-1}(p), 0) = (p, 0) \\ \wr & & \wr \\ (\phi(p), 1) &\longmapsto (F(p, t), 1) = (\psi(p), 1). \end{aligned}$$

□

## 3.2 Die Abbildungsklassengruppe

Um nun Flächenbündel über  $S^1$  besser zu verstehen oder sogar zu klassifizieren, muss man die orientierungserhaltenden Diffeomorphismen der Flächen bis auf Isotopie verstehen. Dazu macht man die folgende natürliche Definition:

**Definition 3.10** (Abbildungsklassengruppe).

Die **Abbildungsklassengruppe**  $MCG(\Sigma)$  einer orientierbaren Fläche  $\Sigma$  ist die Menge der orientierungserhaltenden Diffeomorphismen von  $\Sigma$  bis auf Isotopie.

**Bemerkung 3.11**

- (1) Die Abkürzung MCG steht für *mapping class group* (englisch für Abbildungsklassengruppe).
- (2) Man rechnet sehr leicht nach, dass die Abbildungsklassengruppe wirklich eine Gruppenstruktur, induziert von der Verknüpfung von Diffeomorphismen, trägt.
- (3) Für allgemeine Flächen ist die Abbildungsklassengruppe relativ schwer zu bestimmen. In dieser Arbeit sind wir aber nur an Torusbündeln über  $S^1$  interessiert, weswegen wir uns von jetzt an nur noch auf den Torus beschränken.

Im Folgenden fassen wir den Torus  $T^2$  auf als  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ . Zuerst betrachten wir eine spezielle Klasse von (linearen) Diffeomorphismen von  $T^2$ . Dazu braucht man folgende Definition:

**Definition 3.12** (spezielle lineare Gruppe).

Die **spezielle lineare Gruppe**  $SL_2(\mathbb{Z})$  ist die Untergruppe von  $Mat_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$  der Matrizen mit Determinante gleich eins. Also:

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \{A \in Mat_{2 \times 2}(\mathbb{Z}) \mid \det(A) = 1\}$$

**Beispiel 3.13**

Jede solche Matrix  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$  liefert einen orientierungserhaltenden Diffeomorphismus

von  $T^2$ . Da  $A$  ganzzahlige Einträge hat, gilt  $A(\mathbb{Z}^2) \subset \mathbb{Z}^2$  und  $A$  liefert somit als lineare Abbildung eine Abbildung  $T^2 \rightarrow T^2$ . Weil weiter  $\det(A) = 1$  gilt, folgt sogar, dass  $A$  einen orientierungserhaltenden Diffeomorphismus  $T^2 \rightarrow T^2$  induziert. Bis auf Isotopie ist sogar jeder orientierungserhaltende Diffeomorphismus von  $T^2$  von dieser Form, wie der folgende Satz zeigt.

**Satz 3.14** (Abbildungsklassengruppe des 2-Torus).

*Die Abbildungsklassengruppe  $\text{MCG}(T^2)$  des 2-Torus ist isomorph zur speziellen linearen Gruppe  $SL_2(\mathbb{Z})$ .*

*Beweis.*

Dass  $SL_2(\mathbb{Z})$  eine Teilmenge von  $\text{MCG}(T^2)$  ist, folgt aus dem vorigen Beispiel. Für die andere Inklusion reicht es dann zu zeigen, dass ein Diffeomorphismus  $f: T^2 \rightarrow T^2$ , der auf Homologieniveau wie die Identität wirkt, schon Isotop zur Identität ist, siehe dafür zum Beispiel [30, Kapitel 2.D].  $\square$

Damit erhält man nun folgendes Ergebnis:

**Satz 3.15** (Form von Torusbündeln über  $S^1$ ).

(1) *Jedes orientierbare Torusbündel über  $S^1$  ist von der Form*

$$T_A^3 = (T^2 \times I) /_{(p,0) \sim (Ap,1)},$$

*wobei  $I$  das abgeschlossene Intervall  $[0, 1]$  bezeichnet und  $A$  eine Matrix aus  $SL_2(\mathbb{Z})$  ist.*

(2) *Zwei Torusbündel  $T_A^3$  und  $T_B^3$  sind diffeomorph genau dann, wenn  $A$  in  $SL_2(\mathbb{Z})$  ähnlich zu  $B$  oder  $B^{-1}$  ist (das heißt es existiert eine Matrix  $C \in SL_2(\mathbb{Z})$ , so dass  $A = CBC^{-1}$  oder  $A = CB^{-1}C^{-1}$  gilt).*

*Beweis.*

Teil (1) folgt sofort aus Satz 3.5, Satz 3.9 und Satz 3.14.

Für die Rückrichtung von Teil (2) bemerke man, dass eine andere Wahl einer ähnlichen Matrix aus  $SL_2(\mathbb{Z})$  genau einer anderen Identifikation der Torusfaser entspricht (siehe Beispiel 3.8 (1)) und dass  $T_A^3$  diffeomorph zu  $T_{A^{-1}}^3$  ist. Für Letzteres betrachte zum Beispiel die folgende Abbildung (siehe auch Bemerkung 2.23)

$$\begin{aligned} T^2 \times I &\longrightarrow T^2 \times I \\ (x, y, t) &\longmapsto (x, y, 1 - t). \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{array}{ccc} (x, y, 0) & \mapsto & (x, y, 1) = (A^{-1}A(x, y), 1) \\ \wr & & \wr \\ (A(x, y), 1) & \mapsto & (A(x, y), 0) \end{array}$$

induziert dies einen Diffeomorphismus  $T_A^3 \rightarrow T_{A^{-1}}^3$ .

Die Hinrichtung ist deutlich komplizierter. Dafür siehe zum Beispiel [19, Satz 2.6].  $\square$

**Bemerkung 3.16**

Torusbündel über  $S^1$  tragen eine durch die universelle Überlagerung  $\mathbb{R}^3$  induzierte kanonische Orientierung. Diese ist gegeben durch die Volumenform  $dx \wedge dy \wedge dt$ . Fasst man die Torusbündel über  $S^1$  damit als orientierte Mannigfaltigkeiten auf, dann sind  $T_A^3$  und  $T_B^3$  genau dann orientierungserhaltend diffeomorph, wenn  $A$  ähnlich zu  $B$  ist. Weiter ist  $T_A^3$  orientierungserhaltend diffeomorph zu  $\overline{T_{A^{-1}}^3}$ , wobei mit letzterer Mannigfaltigkeit wieder das Torusbündel mit umgekehrter Orientierung gemeint ist. Dies wird später bei der Betrachtung von Kontaktstrukturen auf Torusbündeln über  $S^1$  noch wichtig, vor allem bei der Klassifikation dieser Kontaktstrukturen (siehe Satz 3.44).

### 3.3 Die spezielle lineare Gruppe

Um nun diese Torusbündel über  $S^1$  zu verstehen, muss man also nur noch  $SL_2(\mathbb{Z})$  verstehen. Die Klassifikation der Torusbündel über  $S^1$  entspricht nun dem rein algebraischen Problem, die Ähnlichkeitsklassen von  $SL_2(\mathbb{Z})$  zu klassifizieren. Dies soll im Folgenden gemacht werden.

Als erstes beobachtet man, dass  $SL_2(\mathbb{Z})$  nicht abelsch ist und unendlich viele Elemente besitzt. Dazu folgendes Beispiel:

**Beispiel 3.17**

Betrachte folgende Matrizen aus  $SL_2(\mathbb{Z})$ :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit gilt:

$$S \cdot R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = R \cdot S$$

$SL_2(\mathbb{Z})$  ist also nicht abelsch. Betrachte weiter für  $k \in \mathbb{Z}$ :

$$R^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$SL_2(\mathbb{Z})$  besteht also auch aus unendlich vielen verschiedenen Elementen.

Eine weitere Matrix mit unendlicher Ordnung ist  $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Für diese Matrix gilt:

$$T^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

Auf den ersten Blick sieht  $SL_2(\mathbb{Z})$  also relativ schwierig aus; der Startpunkt um  $SL_2(\mathbb{Z})$  trotzdem zu verstehen ist der folgende Satz.

**Satz 3.18** (Erzeuger von  $SL_2(\mathbb{Z})$ ).

*$SL_2(\mathbb{Z})$  ist endlich erzeugt. Zwei Erzeuger sind zum Beispiel durch die Matrizen  $R$  und  $S$  aus dem vorigen Beispiel gegeben.*

*Beweis.* (siehe [3])

Sei  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$  gegeben. Zu zeigen ist, dass man  $A$  als endliches Produkt der Matrizen  $R, S$  und deren Inversen schreiben kann. Die Idee dabei ist, den Euklidischen Algorithmus in Multiplikation mit den Matrizen  $R$  und  $S$  zu übersetzen. Dazu bemerke man:

$$SA = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$R^k A = \begin{pmatrix} a + kc & b + kd \\ c & d \end{pmatrix}$$

Multiplikation von links mit  $S$  vertauscht also die Zeilen der Matrix und ändert dann in der oberen Zeile noch die Vorzeichen, und Multiplikation von links mit  $R^k$  addiert zur oberen Zeile das  $k$ -fache der unteren Zeile hinzu. Diese Operationen übersetzt man nun in den Euklidischen Algorithmus und führt sie solange aus, bis links unten eine Null steht. Ohne Einschränkung kann man annehmen, dass  $|a| \geq |c| > 0$ . (Ansonsten betrachtet man statt  $A$  die Matrix  $SA$ .) Dann gibt es ein  $q \in \mathbb{Z}$  und ein  $r \in \mathbb{Z}$  mit  $0 \leq r < |c|$ , so dass  $a = cq + r$  (Teilen mit Rest). Dann betrachtet man:

$$SR^{-q}A = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a - cq & b - cq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ r & b - cq \end{pmatrix}$$

Falls nun  $r \neq 0$  ist, gilt wieder  $|-c| \geq |r| > 0$  und man wendet das ganze Verfahren erneut an. Der Euklidische Algorithmus besagt nun, dass dieses Verfahren nach endlich vielen Schritten abbricht und man  $r = 0$  erreicht. Man erhält also eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

Da diese Matrix weiterhin Determinante gleich eins haben muss und nur ganzzahlige Einträge haben kann, folgt sogar, dass sie von folgender Form ist:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & \pm k \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} = \pm R^k$$

Insgesamt erhält man also:

$$GA = \pm R^k \Rightarrow A = \pm G^{-1}R^k,$$

wobei  $G$  ein endliches Produkt aus  $S$ ,  $R$  und deren Inversen ist. □

**Bemerkung 3.19**

Der obige Beweis liefert nebenbei auch einen Algorithmus, um für eine beliebige Matrix  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$  eine Darstellung als endliches Produkt aus  $S$ ,  $R$  und deren Inversen anzugeben. Diese Darstellung ist aber in keinsten Weise eindeutig (für Beispiele siehe auch [3] und Beispiel 5.22 (4)).

Im Prinzip könnte man jetzt hiermit schon die Torusbündel über  $S^1$  klassifizieren, aber bevor dies gemacht wird, zuerst noch einige kleinere Folgerungen.

**Korollar 3.20.**

*$SL_2(\mathbb{Z})$  wird von zwei Matrizen endlicher Ordnung erzeugt, nämlich von  $S$  und  $SR$ .*

*Beweis.*

Dass  $SL_2(\mathbb{Z})$  von diesen beiden Matrizen erzeugt wird, folgt sofort aus Satz 3.18. Es bleibt also nur Nachzurechnen, dass diese Matrizen endliche Ordnung haben:

$$S^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(SR)^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$S$  hat also Ordnung 4 und  $SR$  hat Ordnung 6. □

**Korollar 3.21.**

$SL_2(\mathbb{Z})$  wird von  $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  und  $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  (siehe Beispiel 3.17) erzeugt.

*Beweis.*

Wegen  $S = -T^{-1}RT^{-1}$  folgt dies sofort aus Satz 3.18. □

Betrachtet man diese beiden Matrizen  $R$  und  $T^{-1}$  als Diffeomorphismen von  $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ , so haben diese eine besondere Bedeutung. Sie repräsentieren nämlich eine besondere Klasse von Diffeomorphismen, die sogenannten Dehn-Twists.

**Definition 3.22** (Dehn-Twist).

Sei  $\gamma$  eine einfach geschlossene Kurve auf einer orientierten Fläche  $\Sigma$ . Identifiziere eine Umgebung von  $\gamma$  orientierungstreu mit  $S^1 \times [-1, 1]$ , so dass  $\gamma$  mit  $S^1 \times \{0\}$  identifiziert wird. Ein **rechtshändiger Dehn-Twist**  $T_\gamma$  entlang  $\gamma$  ist der Homöomorphismus von  $\Sigma$ , der außerhalb von  $S^1 \times [-1, 1]$  die Identität ist und auf  $S^1 \times [-1, 1]$  ( $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ) gegeben ist durch

$$\begin{aligned} S^1 \times [-1, 1] &\longrightarrow S^1 \times [-1, 1] \\ (s, t) &\longmapsto (s + \pi(t + 1), t). \end{aligned}$$

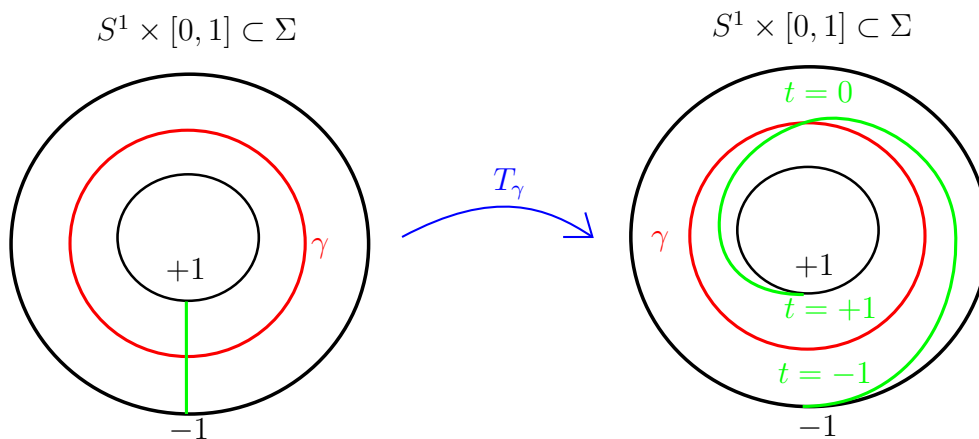


Abbildung 3.2: Ein rechtshändiger Dehn-Twist



**Bemerkung 3.23**

(1) Diese Abbildung ist am Rand von  $S^1 \times [-1, 1]$  nicht differenzierbar und liefert somit nur einen Homöomorphismus dieser Fläche. Diesen Homöomorphismus kann man aber leicht isotopieren, so dass er zu einem Diffeomorphismus wird (siehe Abbildung 3.3).

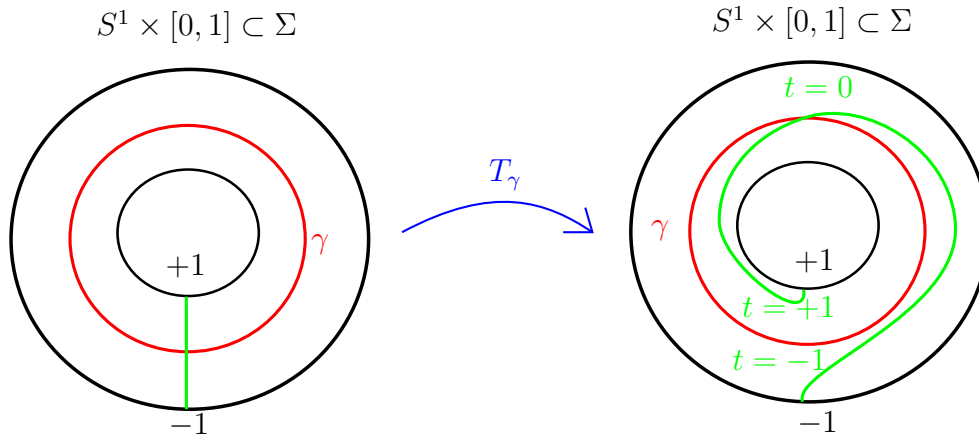


Abbildung 3.3: Ein glatter rechtshändiger Dehn-Twist

Generell bezeichnet man jede Abbildung, die isotop zu einem Dehn-Twist wie oben ist, auch als Dehn-Twist. Da in der Kontaktgeometrie glatte Abbildungen benötigt werden, ist hier mit einem Dehn-Twist immer ein glatter Dehn-Twist gemeint.

(2) Wenn man in der Umgebung von  $\gamma$  in die andere Richtung dreht, erhält man vollkommen analog einen sogenannten **linkshändigen Dehn-Twist** (siehe Abbildung 3.4). Man bemerke aber, dass dies nur von der Orientierung der Fläche  $\Sigma$  und nicht von der Orientierung der Kurve  $\gamma$  selbst abhängt.

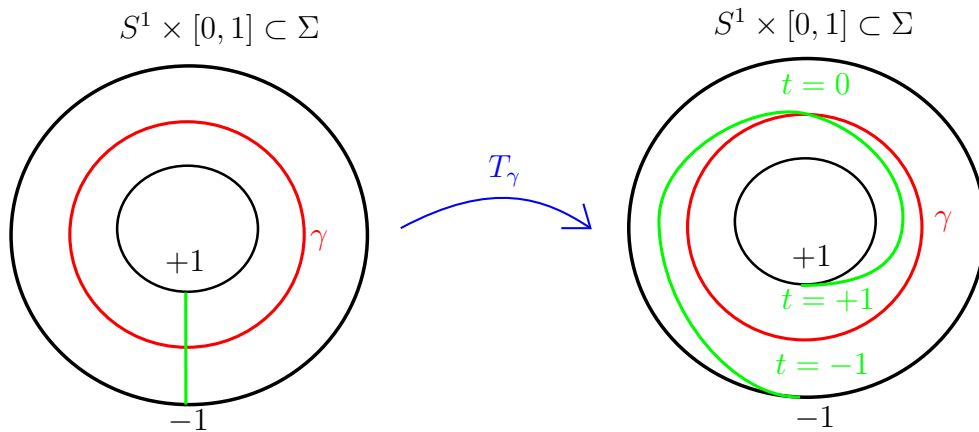


Abbildung 3.4: Ein linkshändiger Dehn-Twist

**Korollar 3.24.**

Die Matrizen  $R$  und  $T^{-1}$  aus  $SL_2(\mathbb{Z})$  sind auf dem Torus  $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  jeweils isotop zu einem rechtshändigen Dehn-Twist entlang einer nicht-trivialen Kurve in  $T^2$ .

*Beweis.*

Am besten sieht man dies, wenn man  $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  mit dem Rand eines Volltorus  $S^1 \times D^2$  identifiziert. Die Identifikation sei gegeben durch

$$\begin{aligned} (t \mapsto (t, 0)) &\equiv \mu := \{p\} \times \partial D^2 \text{ und} \\ (t \mapsto (0, t)) &\equiv \lambda := S^1 \times \{p\}, \end{aligned}$$

wobei das Paar  $(\mu, \lambda)$  so orientiert sein soll, dass es die positive Orientierung von  $S^1 \times S^1$  liefert (siehe auch Kapitel 5 und Abbildung 3.5). Betrachte nun den Effekt von  $T^{-1}$  auf diesen Kurven:

$$\begin{aligned} T^{-1}\mu &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} \equiv \mu - \lambda \\ T^{-1}\lambda &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \equiv \lambda \end{aligned}$$

$T^{-1}$  ist also isotop zu einem (rechtshändigen) Dehn-Twist entlang  $\lambda$  (siehe auch Abbildung 3.5).

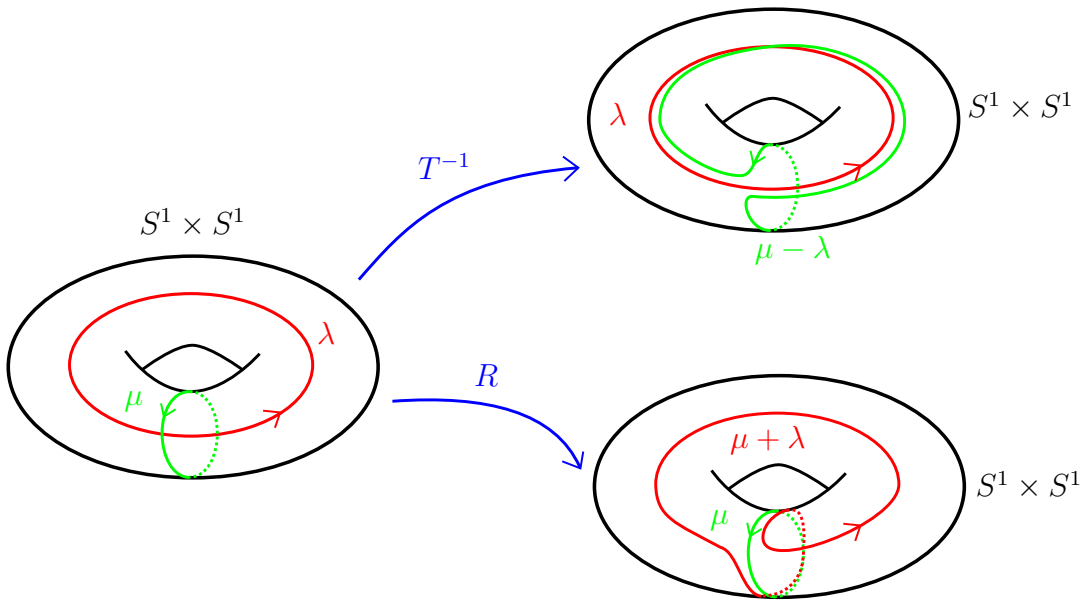


Abbildung 3.5: Wirkung von  $T^{-1}$  und  $R$  auf Meridian und Longitude.

Genau die gleiche Rechnung macht man nun für  $R$ :

$$R\mu \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \mu$$

$$R\lambda \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \equiv \mu + \lambda$$

$R$  ist also isotop zu einem (rechtshändigen) Dehn-Twist entlang  $\mu$  (siehe auch Abbildung 3.5). □

Die Abbildungsklassengruppe von  $T^2$  wird also von Dehn-Twists (gegeben durch  $R$  und  $T^{-1}$ ) erzeugt; dies ist ein Spezialfall des berühmten Satzes von Dehn-Lickorish:

**Satz 3.25** (Satz von Dehn-Lickorish).

*Jeder orientierungstreue Diffeomorphismus einer orientierbaren Fläche  $\Sigma$  ist isotop zu einer Komposition von rechts- und linkshändigen Dehn-Twists.*

*Beweis.* siehe zum Beispiel [29, Satz 12.3] □

Auf  $T^2$  gilt sogar noch mehr:

**Korollar 3.26.**

*Jeder orientierungstreue Diffeomorphismus von  $T^2$  ist isotop zu einer Komposition von rechtshändigen Dehn-Twists (gegeben durch  $R$  und  $T^{-1}$ ). Man benötigt also keine linkshändigen Dehn-Twists.*

*Beweis.*

Nach Satz 3.14 ist jeder orientierungstreue Diffeomorphismus von  $T^2$  isotop zu einer Matrix  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ . Diese Matrix wiederum lässt sich nach Korollar 3.21 als endliches Produkt von  $R$ ,  $T$  und deren Inversen schreiben. Weiter rechnet man nach:

$$(T^{-1}R)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es folgt also, dass man  $R^{-1}$  und  $T$  jeweils als endliches Produkt von  $R$  und  $T^{-1}$  schreiben kann. Da diese beiden Matrizen nach Korollar 3.24 rechtshändige Dehn-Twists beschreiben, folgt die Behauptung. □

**Bemerkung 3.27**

(1) Da  $R^{-1}$  und  $T$  linkshändigen Dehn-Twists entsprechen gilt das obige Korollar natürlich vollkommen analog auch für linkshändige Dehn-Twists.

(2) Man kann die Konstruktion aus dem Beweis oben zusammen mit dem Beweis von Satz 3.18 in einen Algorithmus übersetzen, der eine Darstellung einer beliebigen Matrix aus  $SL_2(\mathbb{Z})$  in entweder nur rechtshändige oder nur linkshändige Dehn-Twists liefert. Diese Darstellung ist aber auch nicht eindeutig (siehe auch Bemerkung nach Satz 3.18 und Beispiel 5.22 (4)).

### 3.4 Klassifikation der Torusbündel über $S^1$

Mit diesen Vorbereitungen können wir jetzt zur versprochenen Klassifikation der Ähnlichkeitsklassen von  $SL_2(\mathbb{Z})$  und der damit verbundenen Klassifikation der Torusbündel über  $S^1$  kommen.

**Satz 3.28** (Klassifikation der Ähnlichkeitsklassen von  $SL_2(\mathbb{Z})$ ).

*Jede Ähnlichkeitsklasse von  $SL_2(\mathbb{Z})$  kann durch eine der folgenden Matrizen dargestellt werden:*

(1)  $\pm S, \pm RS, \pm (RS)^2$

(2)  $\pm R^n$  für  $n \in \mathbb{Z}$

(3)  $\pm R^{k_1} S R^{k_2} S \cdots R^{k_n} S$  mit  $n \geq 1, k_1 \geq 3$  und  $k_i \geq 2$ .

*In den ersten beiden Fällen ist diese Matrix sogar eindeutig. Im dritten Fall ist die Darstellung nicht eindeutig.*

*Beweis.* siehe auch [23, Lemma 2.1]

Schreibe in diesem Beweis  $A \sim B$ , falls  $A$  in  $SL_2(\mathbb{Z})$  ähnlich zu  $B$  ist. Zuerst erinnert man sich, dass ähnliche Matrizen dieselben Eigenwerte und somit auch dieselbe Spur haben. Wegen  $\text{Spur}(-A) = -\text{Spur}(A)$  folgt, dass  $A$  nicht ähnlich zu  $-A$  sein kann. (Dass dies im Fall  $\text{Spur}(A) = 0$  auch nicht sein kann, wird im weiteren Verlauf dieses Beweises noch gezeigt.) Deswegen reicht es, diese Klassifikation ohne Vorzeichen auszuführen. (Formal bedeutet dies, dass man in  $PSL_2(\mathbb{Z}) := SL_2(\mathbb{Z}) /_{A \sim -A}$  arbeitet.)

Nach Korollar 3.20 wird  $SL_2(\mathbb{Z})$  von den beiden endlichen Matrizen  $S$  und  $SR$  erzeugt. Genau wie im Beweis von Korollar 3.26 wird  $SL_2(\mathbb{Z})$  dann sogar positiv von  $S$  und  $SR$  erzeugt, das heißt jede Matrix aus  $SL_2(\mathbb{Z})$  lässt sich als ein Produkt aus  $S$  und  $SR$  schreiben (und die Inversen dieser Matrizen braucht man nicht). Also ist eine beliebige

Matrix  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$  ähnlich zu

$$\text{Id}, S, R^n \ (n \geq 1) \text{ oder } R^{k_1} S \cdots R^{k_n} S \ (k_i \geq 1).$$

Betrachte zuerst den letzten Fall, wenn dort eines der  $k_i = 1$  ist, dann kann man durch Permutation der Matrizen eine zu  $A$  ähnliche Matrix erreichen, in der  $k_1 = 1$  ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} A &\sim R^1 S R^{k_2} S \cdots R^{k_n} S \\ &= (RSR) R^{k_2-1} S \cdots R^{k_n-1} RS \\ &\sim [S(RS)] (RSR) R^{k_2-1} S \cdots R^{k_n-1} RS [(RS)^{-1} S] \\ &= \underbrace{(SR)^3}_{=-\text{Id}} R^{k_2-1} S \cdots R^{k_n-1} S. \end{aligned}$$

Dieses Verfahren wiederholt man so lange bis alle  $k_i \geq 2$  sind (oder bis  $A$  ähnlich zu  $S$ ,  $RS$  oder  $(RS)^2$  ist). Wenn alle  $k_i = 2$  sind, gilt

$$A \sim (R^2 S)^n = R(RSR)^{n-1} RS \sim (RSR)^n.$$

Jetzt rechnet man explizit nach, dass  $RSR = -SR^{-1}S$  gilt. Damit folgt dann

$$A \sim (RSR)^n \sim (SR^{-1}S)^n = SR^{-n}S \sim R^{-n}.$$

Jede Matrix aus  $SL_2(\mathbb{Z})$  ist also ähnlich zu einer der obigen Matrizen aus dem Theorem. Um den Beweis abzuschließen, ist noch zu zeigen, dass diese Matrizen alle nicht ähnlich zueinander sind. Dazu berechnet man zuerst die Spuren dieser Matrizen. Für die ersten Matrizen rechnet man dies einfach aus:

$$\text{Spur}(S) = 0, \text{Spur}(RS) = 1 = \text{Spur}((RS)^2), \text{Spur}(R^n) = 2$$

Für die Matrizen aus Klasse (3) ist die Spur immer größer als 2. Dazu zeigt man zuerst per Induktion nach  $n$ , dass für jede Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A = R^{k_1} S R^{k_2} S \cdots R^{k_n} S$$

mit  $k_i$  wie dort vorgegeben folgende Aussagen gelten:

- $a \geq 2$
- $c \geq 1$
- $b \leq -1$
- $d \leq 0$
- $a - 1 > |b| > |d|$
- $a - 1 > c > |d|$

Wegen  $1 = \det(A) = ad - bc = a(\text{Spur}(A) - a) - bc$  gilt dann

$$\begin{aligned} \text{Spur}(A) &= \frac{a^2 + 1 + bc}{a} \\ &= a + \frac{1 + bc}{a} \\ &> a + \frac{1 - (a - 1)^2}{a} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass  $S$  nicht ähnlich zu  $-S$  ist (der Fall  $\text{Spur} = 0$ ), dass  $RS$  nicht ähnlich zu  $(RS)^2$  ist und dass  $R^n$  nicht ähnlich zu  $R^m$  ist (für  $n \neq m$ ). Dies rechnet man alles explizit per Widerspruch nach. Sei zum Beispiel  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$  mit  $AS = -SA$ , dann folgt

$$\begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix} = AS = -SA = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}$$

und somit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \notin SL_2(\mathbb{Z})$ . Die anderen beiden Fälle gehen ähnlich.  $\square$

**Bemerkung 3.29**

Im Beweis hat man gesehen, dass für die Matrizen aus (1) immer  $|\text{Spur}| < 2$  gilt, für die aus (2) immer  $|\text{Spur}| = 2$  und für die aus (3) immer  $|\text{Spur}| > 2$ . Die Torusbündel zugehörig zu diesen drei verschiedenen Klassen von Matrizen haben, wie man im Folgenden sehen wird, grundlegend andere topologische und geometrische Eigenschaften. Dies motiviert die folgende Definition.

**Definition 3.30.**

Eine Matrix aus  $SL_2(\mathbb{Z})$  mit  $|\text{Spur}| < 2$  heißt **elliptisch**.

Eine Matrix aus  $SL_2(\mathbb{Z})$  mit  $\text{Spur} = 2$  heißt **positiv parabolisch**.

Eine Matrix aus  $SL_2(\mathbb{Z})$  mit  $\text{Spur} = -2$  heißt **negativ parabolisch**.

Eine Matrix aus  $SL_2(\mathbb{Z})$  mit  $|\text{Spur}| > 2$  heißt **hyperbolisch**.

Zuerst betrachten wir die entsprechenden Torusbündel etwas genauer.

**Beispiel 3.31**

(1) Das einfachste Beispiel eines Torusbündels über  $S^1$  ist, wie gesagt, der 3-Torus  $T^3$ . Hier ist die Monodromie  $A = \text{Id}$ . Den 3-Torus kann man sich vorstellen als einen Würfel  $I \times I \times I$ , bei dem gegenüberliegende Seiten auf die kanonische Weise identifiziert werden (siehe Abbildung 3.6).

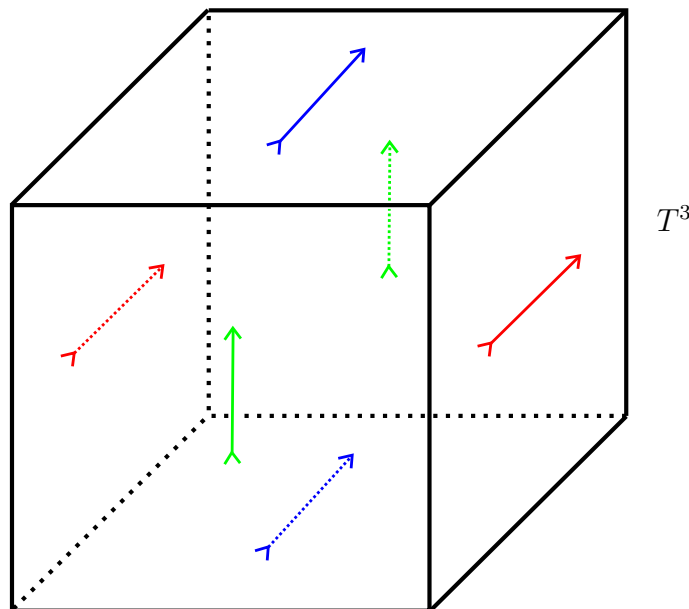


Abbildung 3.6: Eine Darstellung des 3-Torus  $T^3$ .

(2) Ähnlich kann man auch viele andere Torusbündel über  $S^1$  darstellen. Betrachte zum Beispiel  $T^3_S$ . Dieses Torusbündel über  $S^1$  kann man nun auch wieder als Würfel  $I \times I \times I$  darstellen, diesmal identifiziert man aber etwas anders. Die Seiten rechts, links, vorne und hinten werden wie beim 3-Torus auf die kanonische Weise identifiziert, aber die obere Seite des Würfels muss zuerst um  $90^\circ$  gegen den Uhrzeigersinn gedreht werden und wird dann erst mit der unteren Seite identifiziert (siehe Abbildung 3.7).

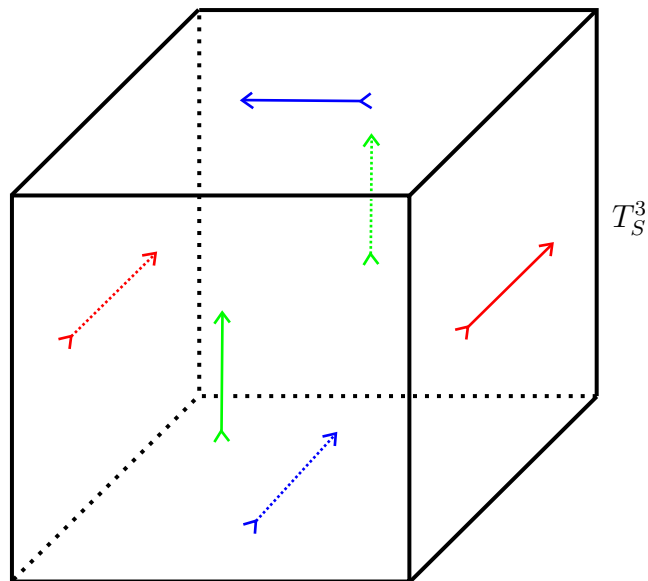


Abbildung 3.7: Eine Darstellung von  $T_S^3$ .

Im  $\mathbb{R}^3$  kann man diesen Würfel nun um  $90^\circ$  gegen den Uhrzeigersinn verdrehen. Um daraus dann  $T_S^3$  zu erhalten, muss man gegenüberliegende Seiten nur auf die kanonische Art identifizieren. Deswegen nennt man  $T_S^3$  auch die  $(\frac{1}{4})$ -**Drehung-Mannigfaltigkeit** (siehe auch [32]).

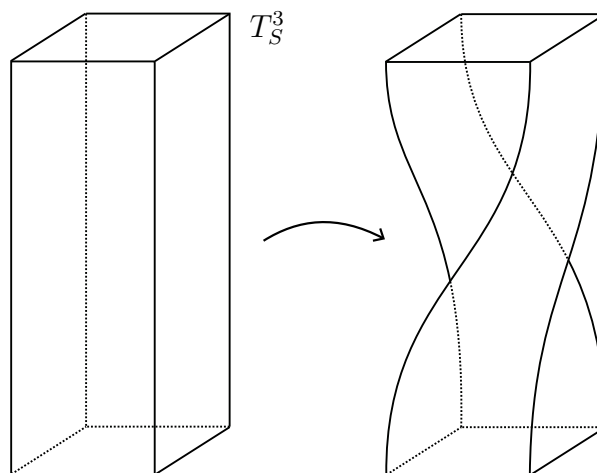


Abbildung 3.8: Eine weitere Darstellung von  $T_S^3$ .

(3) Da  $-\text{Id}$  bzw.  $-S$  Drehungen um  $180^\circ$  bzw.  $270^\circ$  entsprechen, erhält man auf dieselbe Art  $T_{-\text{Id}}^3$  die  $(\frac{1}{2})$ -**Drehung-Mannigfaltigkeit** bzw.  $T_{-S}^3$  die  $(\frac{3}{4})$ -**Drehung-Mannigfaltigkeit**.



Man bemerke, dass man die  $(1/2)$ -Drehung-Mannigfaltigkeit auch als Kleinsche-Flaschen-Bündel über  $S^1$  sehen kann. Dazu stellt man sich den  $S^1$ -Basisraum als einen Kreis vor, der die beiden Flächen in Abbildung 3.9 rechts und links mit dem roten Pfeil verbindet. Die Flächen orthogonal zu dieser  $S^1$ -Richtung sind dann Kleinsche-Flaschen. Fasst man diese Mannigfaltigkeit also als Kleinsche-Flaschen-Bündel über  $S^1$  auf, so ist dieses Bündel trivial.

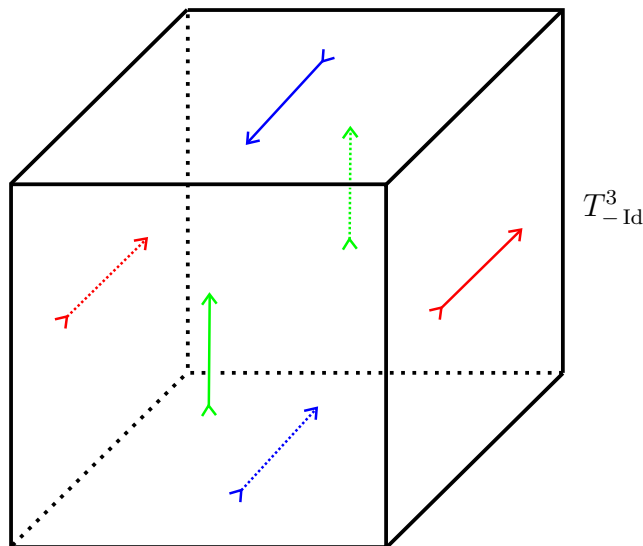


Abbildung 3.9: Eine Darstellung von  $T^3_{-\text{Id}}$ .

(4) Betrachte die Matrix  $RS = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Auf  $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  sieht man nicht sofort wie  $RS$  wirkt und kann somit das zugehörige Torusbündel auch nicht direkt beschreiben. Deswegen fasst man  $T^2$  hier als Quotienten von  $\mathbb{R}^2$  unter einer Pflasterung von  $\mathbb{R}^2$  durch 6-Ecke wie in Abbildung 3.10 auf.

Auf diesem sogenannten **hexagonalen Torus** hat die Matrix  $RS$  nun eine einfache geometrische Bedeutung. Dazu wählt man Meridian  $\mu$  und Longitude  $\lambda$  wie in Abbildung 3.11 (diese Kurven liefern wirklich einen Meridian und eine Longitude, da dies zwei einfach geschlossene homologisch verschiedene Kurven mit nur einem transversalen Schnittpunkt sind, siehe auch Kapitel 5) und identifiziert  $\mu \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\lambda \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Dann wirkt  $RS$  wie folgt:

$$\begin{aligned} RS\mu &\equiv RS\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \mu + \lambda, \\ RS\lambda &\equiv RS\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv -\mu. \end{aligned}$$

In Abbildung 3.11 sieht man dann, dass  $RS$  hier also einer Drehung um  $\frac{\pi}{3}$  entspricht.

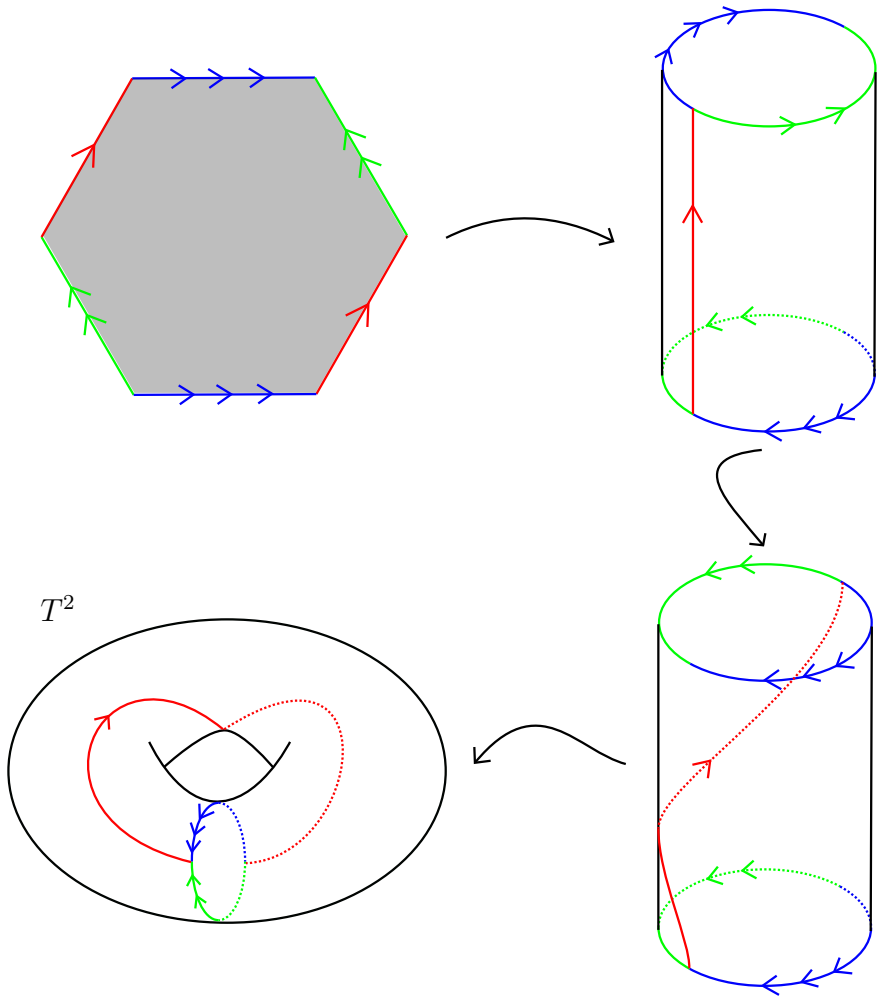


Abbildung 3.10: Ein hexagonaler Torus.

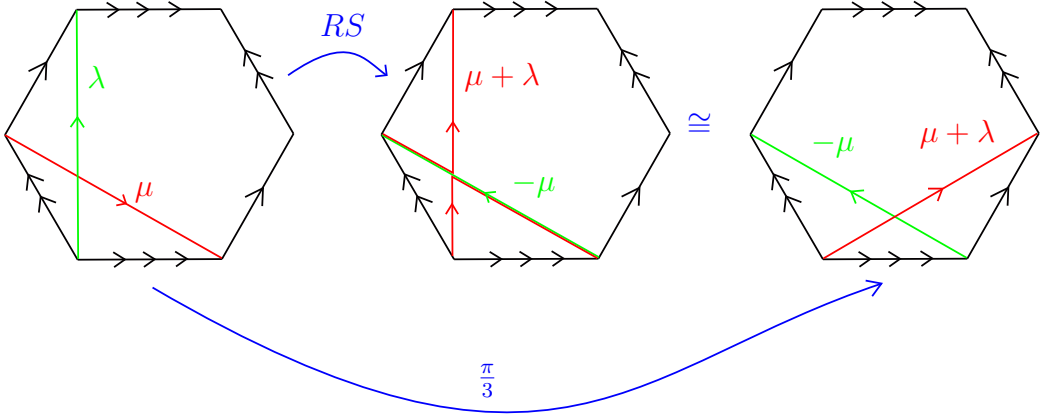


Abbildung 3.11: Die Wirkung von  $RS$  auf dem hexagonalen Torus.

Natürlich entspricht dann  $(RS)^2$  einer Drehung um  $\frac{2\pi}{3}$  und die negativen Matrizen Drehungen um die negativen Winkel. Das entsprechende hexagonale Torusbündel nennt man deswegen auch  $(\frac{1}{3})$ -**Drehung-Mannigfaltigkeit** (analog für die anderen Matrizen mit  $\text{Spur} = \pm 1$ ) und kann diese ähnlich wie die obigen Beispiele zeichnen (nur das man statt dem Standardtorus einen hexagonalen Torus zeichnen muss, siehe auch [32]).

(5) Man hat aber nicht für alle Matrizen eine solch einfache Darstellung. Wenn man eine positiv parabolische Matrix betrachtet wie zum Beispiel  $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  (wegen  $STS^{-1} = R^{-1}$  ist  $T$  ähnlich zu  $R^{-1}$ ), erhält man  $T_T^3$  aus  $T^2 \times [0, 1]$  durch folgende Identifikation:

$$(x, y, 0) \sim (T(x, y), t) = (x, x + y, 1)$$

(siehe auch [31, Abbildung 3.26]). Betrachtet man zum Beispiel die Kurven mit Steigung 0 in  $T^2$  gegeben durch  $\{(x, y_0, 0)\}$  für einen festen Wert  $y_0$ , dann bilden diese Kurven auf Kurven mit Steigung 1 ab gegeben durch  $\{(x, x + y_0, 1)\}$  (siehe auch Abbildung 3.12).

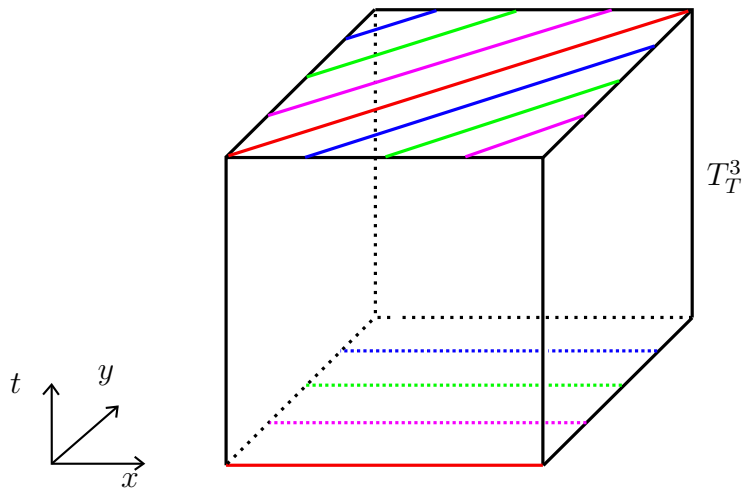


Abbildung 3.12: Eine Darstellung von  $T_T^3$ .

Die Verklebung hier kann man also im  $\mathbb{R}^3$  nicht mehr ohne weiteres ausführen. Hier sieht man allerdings ein weiteres Mal, dass  $T$  einem Dehn-Twist entspricht.

(6) Wenn man eine beliebige Matrix aus  $SL_2(\mathbb{Z})$  wählt (zum Beispiel eine hyperbolische), dann ist die Wirkung dieser Matrix nicht so leicht zu zeichnen.

Wenn man sich nun die vorigen Beispiele etwas genauer ansieht, erhält man folgende topologische Klassifikation der Torusbündel über  $S^1$ .

**Satz 3.32** (Topologische Klassifikation der Torusbündel über  $S^1$ ).

Sei  $A$  eine beliebige Matrix aus  $SL_2(\mathbb{Z})$ . Dann gilt:

(1) Ist  $A$  elliptisch, so ist  $T_A^3$  Seifert-gefasert über  $S^2$  mit 3 singulären Fasern. (Je nach Ähnlichkeitsklassen der Matrizen kann man die Invarianten dieser Mannigfaltigkeit sogar genau angeben, siehe [19, Seite 45].)

(2) Ist  $A$  positiv parabolisch, so ist  $T_A^3$  ein  $S^1$ -Bündel über  $T^2$  mit Eulerzahl  $n$ .

Ist  $A$  negativ parabolisch, so ist  $T_A^3$  ein  $S^1$ -Bündel über der Kleinschen Flasche mit Eulerzahl  $n$ . (Dabei ist  $n$  dadurch festgelegt, dass  $A$  dann ähnlich zu  $\pm R^n$  ist.)

(3) Ist  $A$  hyperbolisch, so fasert  $T_A^3$  nur über  $S^1$  und trägt einen Anosov-Fluss transversal zu den Torusfasern.

*Beweisidee.*

(1) folgt aus vorigem Beispiel und aus [19, Seite 45]; dort werden je nach Ähnlichkeitsklasse der Monodromie auch die Seifert-Invarianten dieser Mannigfaltigkeiten berechnet.

(2) Die Faserungen im Fall  $A = \pm \text{Id}$  hat man im obigen Beispiel gesehen. Für den allgemeinen positiv parabolischen Fall siehe Beispiel 4.6 (4). Der negativ parabolische Fall geht ähnlich (siehe zum Beispiel [16, Abbildung 5.3]).

(3) Im Beweis von Satz 3.39 (1) wird gezeigt, dass jede hyperbolische Matrix zwei Eigenwerte mit je einem anziehenden und einem abstoßenden Eigenvektor hat. Dies liefert dann den Anosov-Fluss.  $\square$

Torusbündel über  $S^1$  spielen auch in Thurstons Geometriesierungssatz für 3-Mannigfaltigkeiten eine entscheidende Rolle. Zwei der dort auftretenden Modellgeometrien werden durch Torusbündel über  $S^1$  realisiert. Diese Aspekte sind für diese Arbeit nicht relevant; Thurstons geometrische Klassifikation der Torusbündel über  $S^1$  wird im Folgenden dennoch angegeben.

**Satz 3.33** (Geometrische Klassifikation der Torusbündel über  $S^1$ ).

Sei  $A$  eine beliebige Matrix aus  $SL_2(\mathbb{Z})$ . Dann gilt:

(1) Ist  $A$  elliptisch, so trägt  $T_A^3$  eine euklidische Struktur.

(2) Ist  $A = \text{Id}$  oder  $A = -\text{Id}$ , so trägt  $T_A^3$  eine euklidische Struktur.

Ist  $A$  eine andere parabolische Matrix, so trägt  $T_A^3$  eine Nil-Geometrie.

(3) Ist  $A$  hyperbolisch, so trägt  $T_A^3$  eine Sol-Geometrie.

*Beweis.* siehe [31, Aufgabe 3.8.10]  $\square$

### 3.5 Kontaktstrukturen auf Torusbündeln über $S^1$

Diese Aspekte der dreidimensionalen Geometrie und Topologie sind hier allerdings nicht so wichtig. In dieser Arbeit soll es vornehmlich um die Kontaktstrukturen auf diesen Torusbündeln gehen. Im Rest dieses Kapitels werden die wichtigsten Kontaktstrukturen auf diesen Bündeln eingeführt und erste Eigenschaften dieser Kontaktstrukturen untersucht. Zum Abschluss werden die Klassifikation dieser Kontaktstrukturen und das Hauptresultat dieser Arbeit, der Füllbarkeitssatz von Ding-Geiges, angegeben. Die Hauptreferenzen für diesen Abschnitt sind [14] und [15].

In Bemerkung 3.16 wurde schon erwähnt, dass die universelle Überlagerung von  $T_A^3$  durch  $\mathbb{R}^3$  gegeben ist. Um nun Kontaktstrukturen auf  $T_A^3$  zu definieren, geht man vollkommen analog wie beim 3-Torus  $T^3$  vor. Zuerst definiert man Kontaktstrukturen auf  $\mathbb{R}^3$  und fragt sich dann, wann diese Kontaktstrukturen auf dem Quotienten  $T_A^3$  induzieren.

#### Beispiel 3.34

Für  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit Ableitung  $\varphi' \neq 0$  betrachte folgende 1-Form auf dem  $\mathbb{R}^3$  mit kartesischen Koordinaten  $(x, y, t)$ :

$$\alpha_\varphi = \cos \varphi(t) dx - \sin \varphi(t) dy$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \alpha_\varphi \wedge d\alpha_\varphi &= (\cos \varphi(t) dx - \sin \varphi(t) dy) \wedge (-\varphi'(t) \sin \varphi(t) dt \wedge dx - \varphi'(t) \cos \varphi(t) dt \wedge dy) \\ &= \varphi'(t) dt \wedge dx \wedge dy \end{aligned}$$

$\alpha_\varphi$  liefert also eine Kontaktstruktur  $\xi_\varphi$  auf  $\mathbb{R}^3$ . Diese Kontaktstruktur ist kontaktomorph zur Standardkontaktstruktur  $\xi_{st}$  auf dem  $\mathbb{R}^3$ . Betrachte dazu folgenden Diffeomorphismus von  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, t) &\longmapsto (q, p, z) := (x \cos \varphi(t) - y \sin \varphi(t), [x \sin \varphi(t) + y \cos \varphi(t)] \varphi'(t), t) \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 f^*(\alpha_{st}) &= f^*(dq + p dz) \\
 &= d(x \cos \varphi(t) - y \sin \varphi(t)) + (x \sin \varphi(t) + y \cos \varphi(t)) \varphi'(t) dt \\
 &= \cos \varphi(t) dx - \sin \varphi(t) dy \\
 &= \alpha_\varphi
 \end{aligned}$$

Ähnlich wie beim 3-Torus  $T^3$  kann man sich nun fragen, wann eine solche Kontaktstruktur auf  $\mathbb{R}^3$  eine Kontaktstruktur auf  $T_A^3$  induziert.

**Lemma 3.35.**

*Eine Kontaktstruktur  $\xi$  auf  $\mathbb{R}^3$  induziert eine Kontaktstruktur auf  $T_A^3$  genau dann, wenn die Kontaktstruktur  $\xi$  invariant unter der Decktransformationsgruppe von  $T_A^3$  ist, das heißt jede Decktransformation ist ein Kontaktomorphismus von  $(\mathbb{R}^3, \xi)$ .*

*Beweis.*

Zuerst schreibt man ein beliebiges Torusbündel  $T_A^3$  als Quotienten seiner universellen Überlagerung  $\mathbb{R}^3$

$$T_A^3 = \mathbb{R}^3 / \sim,$$

wobei wie folgt identifiziert wird,

$$(x, y, t) \sim (x + 1, y, t) \sim (x, y + 1, t) \sim (A(x, y), t + 1).$$

Die Decktransformationsgruppe wird dann von den drei Abbildungen  $f_1, f_2, f_3: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  erzeugt, gegeben durch:

$$\begin{aligned}
 f_1: (x, y, t) &\longmapsto (x + 1, y, t) \\
 f_2: (x, y, t) &\longmapsto (x, y + 1, t) \\
 f_3: (x, y, t) &\longmapsto (A(x, y), t + 1)
 \end{aligned}$$

Eine Kontaktstruktur  $\xi$  auf  $\mathbb{R}^3$  mit Kontaktform  $\alpha$  liefert dann eine Kontaktstruktur auf  $T_A^3$  genau dann, wenn die Kontaktstruktur  $\xi$  unter den obigen Identifikationen erhalten bleibt, was genau dann der Fall ist, wenn  $\alpha$  bis auf Multiplikation mit einer skalaren Funktion  $\lambda: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  unter den Decktransformationen erhalten bleibt. Dies bedeutet genau, dass  $\lambda\alpha = f^*\alpha$  für alle Decktransformationen  $f$  gilt, was wiederum per Definition bedeutet, dass jede Decktransformation ein Kontaktomorphismus ist.  $\square$

**Korollar 3.36.**

Eine Kontaktstruktur  $\xi_\varphi$  auf  $\mathbb{R}^3$  induziert eine Kontaktstruktur auf  $T_A^3$  genau dann, wenn für alle  $t \in \mathbb{R}$

$$A\Delta_{\varphi(t)} = \Delta_{\varphi(t+1)}$$

gilt, wobei  $\Delta_\varphi$  den Halbstrahl  $\{s(\sin \varphi, \cos \varphi) \mid s \geq 0\}$  bezeichnet. Diese neue Kontaktstruktur auf  $T_A^3$  wird dann der Einfachheit halber wieder mit  $\xi_\varphi$  bezeichnet.

*Beweis.*

An der folgenden Skizze kann man schon erkennen, dass diese Aussage Sinn ergibt. Wenn man den Halbstrahl  $\Delta_{\varphi(t)}$  mit  $A$  abbildet, muss dieser neue Halbstrahl genau dem Halbstrahl  $\Delta_{\varphi(t+1)}$  entsprechen, damit die Kontaktstruktur bei  $\{t = 0\}$  und  $\{t = 1\}$  gleich aussieht.

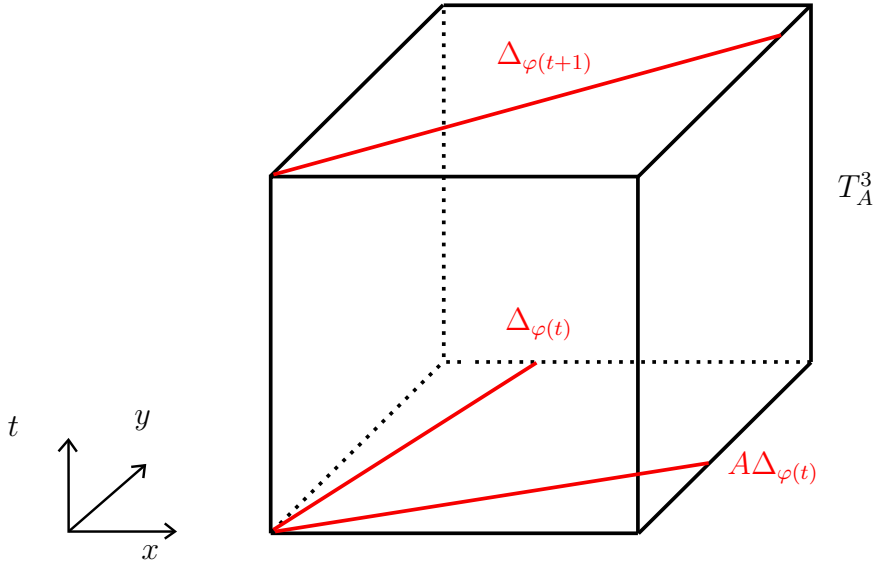


Abbildung 3.13: Kontaktstrukturen  $\xi_\varphi$  mit  $A\Delta_{\varphi(t)} = \Delta_{\varphi(t+1)}$  induzieren Kontaktstrukturen auf  $T_A^3$ .

Genauer betrachtet man wieder die Decktransformationsgruppe, die von den drei Abbildungen  $f_1, f_2, f_3: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  aus dem Beweis des vorigen Lemmas erzeugt wird. Nach dem vorigen Lemma muss man also nur nachrechnen, wann diese Abbildungen Kontaktomorphismen von  $(\mathbb{R}^3, \xi_\varphi)$  sind. Für  $f_1$  und  $f_2$  folgt dies sofort ( $d(x + 1) = dx$  und  $d(y + 1) = dy$ ). Für  $f_3$  wird dies von  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$  und  $\varphi$  abhängen. Man rechnet nach, dass  $f_3$  ein Kontaktomorphismus ist genau dann, wenn es eine Funktion

$\lambda: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gibt, so dass

$$\begin{aligned} f_3^*(\alpha_\varphi) &= \cos \varphi(t+1) d(ax + by) - \sin \varphi(t+1) d(cx + ey) \\ &= (a \cos \varphi(t+1) - c \sin \varphi(t+1)) dx - (e \sin \varphi(t+1) - b \cos \varphi(t+1)) dy \\ &= \lambda(t, x, y) (\cos \varphi(t) dx - \sin \varphi(t) dy). \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert nun, dass  $\lambda$  unabhängig von  $x$  und  $y$  ist und folgendes Gleichungssystem erfüllt sein muss:

$$\begin{aligned} \lambda(t) \sin \varphi(t) &= +e \sin \varphi(t+1) - b \cos \varphi(t+1) \\ \lambda(t) \cos \varphi(t) &= -c \sin \varphi(t+1) + a \cos \varphi(t+1) \end{aligned}$$

Da nun  $A^{-1} \in SL_2(\mathbb{Z})$  gegeben ist durch  $A^{-1} = \begin{pmatrix} e & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ , ist dieses Gleichungssystem äquivalent zu:

$$\lambda(t) \begin{pmatrix} \sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \sin \varphi(t+1) \\ \cos \varphi(t+1) \end{pmatrix}$$

Dies schreibt sich um zu:

$$A \Delta_{\varphi(t)} = \Delta_{\varphi(t+1)}$$

□

### Bemerkung 3.37

- (1) Selbst wenn die Bedingung  $A \Delta_{\varphi(t)} = \Delta_{\varphi(t+1)}$  erfüllt ist, ist die Kontaktform  $\alpha_\varphi$  auf  $\mathbb{R}^3$  im Allgemeinen **nicht** invariant unter  $f_3$  und induziert somit **keine** Kontaktform auf  $T_A^3$ . Man kann aber immer eine Funktion  $\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  finden, so dass die Kontaktform  $\mu(t) \alpha_\varphi$  auch invariant unter  $f_3$  wird und somit eine Kontaktform auf  $T_A^3$  induziert.
- (2) Der Winkel  $\varphi$  in  $\Delta_\varphi$  ist unüblich gewählt. Er ist im Uhrzeigersinn orientiert und  $\varphi = 0$  entspricht dem Vektor  $(0, 1)$  (siehe Abbildung 3.14).
- (3) Wenn es solche Kontaktstrukturen  $\xi_\varphi$  auf  $\mathbb{R}^3$  gibt, dann sind sie alle straff (siehe Beispiel 3.34) und aus dem Kontaktüberlagerungslemma 2.19 folgt auch, dass dies sogar universell straffe Kontaktstrukturen auf den entsprechenden Torusbündeln liefert.

Hierbei ist natürlich nicht klar, dass es solche Funktionen für beliebiges  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$  immer gibt. Dazu werden zuerst für einige spezielle Matrizen Beispiele gegeben und dann wird ein allgemeiner Satz von Giroux bewiesen, der dieses Problem für beliebiges  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$  vollständig löst.



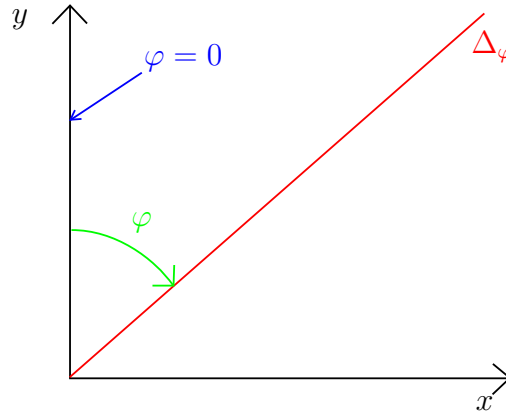


Abbildung 3.14: Der Winkel  $\varphi$  ist unüblich gewählt.

**Beispiel 3.38**

(1) Betrachte zuerst  $T_{-\text{Id}}^3$ . Die Matrix  $-\text{Id}$  dreht jeden Halbstrahl  $\Delta_\varphi$  um den Winkel  $\pi$ . Eine Möglichkeit wäre also  $\varphi(t) = \pi t$ , denn dann gilt

$$\Delta_{\varphi(t+1)} \sim \begin{pmatrix} \sin(\pi t + \pi) \\ \cos(\pi t + \pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\pi t) \\ -\cos(\pi t) \end{pmatrix} \sim -\text{Id} \Delta_{\varphi(t)},$$

wobei  $\sim$  bedeuten soll, dass die entsprechenden Vektoren dieselbe Gerade im  $\mathbb{R}^3$  aufspannen. Dies liefert also eine Kontaktstruktur auf  $T_{-\text{Id}}^3$  gegeben durch

$$\xi_\varphi = \ker \left( \cos(\pi t) dx - \sin(\pi t) dy \right).$$

In diesem Fall ist sogar die Kontaktform  $\cos \pi t dx - \sin \pi t dy$  invariant unter der Decktransformationsgruppe und liefert somit sogar eine Kontaktform auf  $T_{-\text{Id}}^3$ .

(2) Auf  $T_S^3$  (und vollkommen analog auf  $T_{-S}^3$ ) geht dies ähnlich.  $S$  dreht jeden Halbstrahl um den Winkel  $-\frac{\pi}{2}$  (wobei hier der Winkel wie bei  $\varphi$  im Uhrzeigersinn gedreht wird). Die Funktion  $\varphi(t) = \frac{3\pi}{4}t$  liefert also genau wie im ersten Beispiel eine Kontaktstruktur auf  $T_S^3$  gegeben durch

$$\xi_\varphi = \ker \left( \cos \left( \frac{3\pi}{4}t \right) dx - \sin \left( \frac{3\pi}{4}t \right) dy \right).$$

Auch hier ist schon die Kontaktform invariant unter der Decktransformationsgruppe und liefert somit sogar eine Kontaktform auf  $T_S^3$ .

(3) Betrachte  $T_{T^k}^3 =: T^3(k)$  (für  $k \neq 0$ ).  $T^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$  lässt den Vektor  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  fest. Für

Vektoren der Form  $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$  gilt (siehe für den Fall  $k = 1$  Abbildung 3.15)

$$T^k \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ m+k \end{pmatrix}.$$

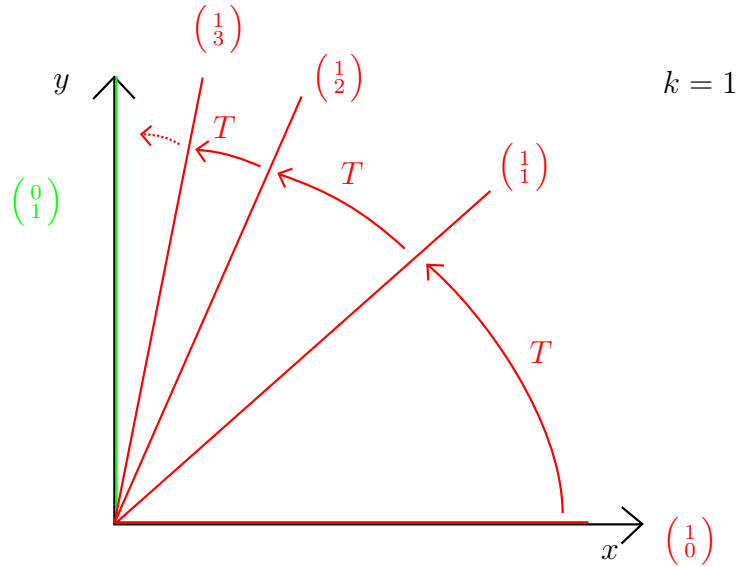


Abbildung 3.15: Die Wirkung von  $T$ .

Gesucht ist nun eine Funktion  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\varphi' \neq 0$ , so dass

$$T^k \Delta_{\varphi(t)} = \Delta_{\varphi(t+1)}.$$

Die letzte Bedingung übersetzt sich in

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \cot \varphi(t+1) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \sin \varphi(t+1) \\ \cos \varphi(t+1) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \sin \varphi(t) \\ k \sin \varphi(t) + \cos \varphi(t) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ k + \cot \varphi(t) \end{pmatrix}.$$

Eine offensichtliche Lösung dieser Gleichung ist die Funktion

$$\varphi(t) := \operatorname{arccot}(kt).$$

Weiter rechnet man nach, dass

$$\varphi'(t) = -\frac{k}{1+(kt)^2} \neq 0$$

gilt. Die zugehörige Kontaktstruktur auf  $T^3(k)$  ist dann gegeben durch

$$\xi_\varphi = \ker \left( \sin \operatorname{arccot}(kt) dx - \cos \operatorname{arccot}(kt) dy \right) = \ker \left( dy - kt dx \right).$$

Weiter rechnet man sofort nach, dass die 1-Form  $dy - kt dx$  auf dem  $\mathbb{R}^3$  invariant unter der Decktransformationsgruppe ist und somit sogar eine Kontaktform auf  $T^3(k)$  liefert.

Für allgemeine Matrizen (zum Beispiel hyperbolische) ist es nicht so einfach, solche Funktionen explizit anzugeben. Eine Konstruktionsmethode liefert aber der Beweis des folgenden Satzes.

**Satz 3.39** (Konstruktion von Kontaktstrukturen mit beliebiger Giroux-Torsion).

Sei  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$  eine beliebige vorgegebene Matrix.

(1) Für jedes  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  gibt es eine Funktion  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit Ableitung  $\varphi' \neq 0$  und  $A\Delta_{\varphi(t)} = \Delta_{\varphi(t+1)}$ , so dass

$$2\pi(n-1) < \sup_{t \in \mathbb{R}} \{\varphi(t+1) - \varphi(t)\} \leq 2\pi n$$

gilt. Dieses  $n$  heißt **Giroux-Torsion** von  $\varphi$  (bzw. der von  $\varphi$  induzierten Kontaktstruktur  $\xi_\varphi$  auf  $T_A^3$ ).

(2) Die Kontaktstrukturen  $\xi_\varphi$  auf  $T_A^3$  hängen bis auf (fasererhaltende) Isotopie nur von der Giroux-Torsion  $n$  ab, weswegen diese Kontaktstrukturen auf  $T_A^3$  von nun an nur noch mit  $\xi_n$  bezeichnet werden.

(3) Als Ebenenfelder auf  $T_A^3$  sind alle  $\xi_n$  homotop zueinander.

**Bemerkung 3.40**

Die hier definierte Giroux-Torsion ist genau eins größer als die Giroux-Torsion in der Originalarbeit [14]. Der Vorteil dieser Definition hier ist, dass man eine symmetrische Situation für positive und negative Kontaktstrukturen erhält.

**Beispiel 3.41**

(1) Für die Kontaktstrukturen aus Beispiel 3.38 (1) und (2) gilt jeweils

$$0 < \varphi(t+1) - \varphi(t) \leq 2\pi.$$

Beide haben also Giroux-Torsion 1. Für diese Matrizen ist es auch nicht weiter schwierig, Kontaktstrukturen mit beliebiger Giroux-Torsion anzugeben.

(2) Betrachte auf  $T^3(k)$  die Kontaktstruktur

$$\xi_\varphi = \ker \left( \sin \operatorname{arccot}(kt) dx - \cos \operatorname{arccot}(kt) dy \right) = \ker \left( dy - kt dx \right)$$

aus dem vorigen Beispiel. Wegen  $\operatorname{arccot}(x) \in (-\pi/2, \pi/2)$  gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi(t+1) - \varphi(t) \leq \pi < 2\pi && \text{für } k < 0 \\ -2\pi < \pi &\leq \varphi(t+1) - \varphi(t) \leq 0 && \text{für } k > 0. \end{aligned}$$

Die Giroux-Torsion dieser Funktion ist also 1 für  $k < 0$  und  $-1$  für  $k > 0$ . Hier ist nicht sofort klar, wie man Kontaktstrukturen mit anderen Giroux-Torsionen bekommt.

*Beweis von Satz 3.39.*

(1) Zuerst konstruiert man eine Funktion  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit folgenden Eigenschaften

- $\varphi' \neq 0$ ,
- $\Delta_{\varphi(0)} = \Delta$ ,
- $A\Delta_{\varphi(t)} = \Delta_{\varphi(t+1)}$ ,
- $\varphi(1) - \varphi(0) \in (2\pi(n-1), 2\pi n]$ ,

wobei  $\Delta$  ein fester vorgegebener Halbstrahl ist. Dazu wählt man zuerst  $\varphi(0)$ , so dass  $\Delta_{\varphi(0)} = \Delta$  gilt. (Dabei ist  $\varphi(0)$  eindeutig bis auf Addition eines ganzzahligen Vielfachen von  $2\pi$ .) Dann ist wegen

$$A\Delta = A\Delta_{\varphi(0)} = \Delta_{\varphi(1)}$$

$\varphi(1)$  bis auf Addition eines ganzzahligen Vielfachen von  $2\pi$  festgelegt. Dieses Vielfache ist dann wiederum eindeutig durch die Forderung  $\varphi(1) - \varphi(0) \in (2\pi(n-1), 2\pi n]$  festgelegt. In einer hinreichend kleinen Umgebung von  $t = 0$  setzt man nun  $\varphi$  gleich einer Funktion mit nirgends verschwindender Ableitung (dabei soll das Vorzeichen der Ableitung gleich dem Vorzeichen von  $n$  sein), zum Beispiel

$$\varphi(t) = \varphi(0) \pm t.$$

In einer Umgebung von  $t = 1$  ist  $\varphi$  dann wieder durch die Forderung  $\Delta_{\varphi(t+1)} = A\Delta_{\varphi(t)}$  (und weil  $\varphi(1)$  festgelegt ist) eindeutig bestimmt (siehe die roten Stellen in Abbildung 3.16).

Als nächstes interpoliert man glatt und monoton zwischen den Umgebungen von  $t = 0$

und  $t = 1$  (siehe die grünen Stellen in Abbildung 3.16). Zwischen  $t = 1$  und  $t = 2$  ist  $\varphi$  dann wieder durch die Forderung  $\Delta_{\varphi(t+1)} = A\Delta_{\varphi(t)}$  (und die richtige Anschlussbedingung bei  $t = 1$ ) eindeutig festgelegt. Vollkommen analog ist  $\varphi$  so auch zwischen den anderen Umgebungen von  $t = k$  und  $t = k + 1$  festgelegt (siehe Abbildung 3.16).

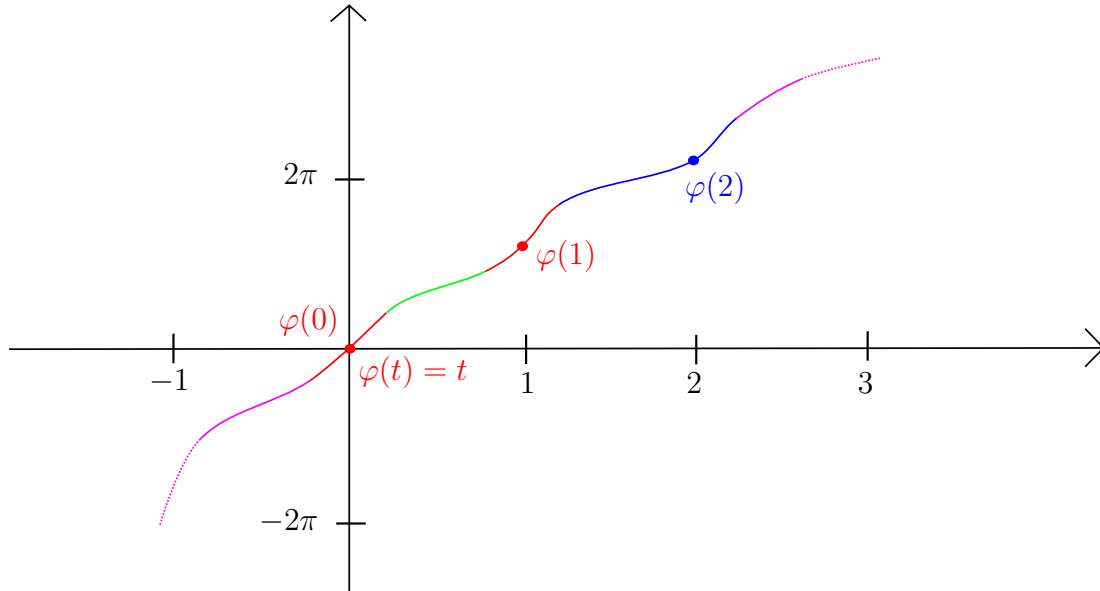


Abbildung 3.16: Die Konstruktion der Funktion  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  für  $n = 1$ .

Dieses Verfahren liefert also für jede Matrix  $A$  aus  $SL_2(\mathbb{Z})$  eine Funktion  $\varphi$ , die dann eine Kontaktstruktur  $\xi_\varphi$  auf dem entsprechenden Torusbündel  $T_A^3$  induziert. Noch zu zeigen ist jetzt, dass man so auch jede Giroux-Torsion erreichen kann. Dazu zeigt man, dass für geeignete Wahl des Halbstrahles  $\Delta$  die Giroux-Torsion von  $\varphi$  gleich  $n$  ist, also

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \{ \varphi(t+1) - \varphi(t) \} \in (2\pi(n-1), 2\pi n].$$

Für die meisten Fälle wird dies sofort folgen, für einige spezielle Fälle wird man allerdings den vorgegeben Halbstrahl  $\Delta$  auf eine spezielle Weise wählen müssen.

Zuerst betrachtet man, was schief gehen kann. Dazu betrachte die Matrix  $A = T^{-1}$  (analog für andere Potenzen). Diese Matrix hat als einzigen Eigenwert 1 mit einzigem Eigenvektor  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Wenn man nun den Halbstrahl  $\Delta$  so wählt, dass er in Richtung  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  zeigt und  $\varphi$  wie oben mit  $\varphi(0) = 0$  konstruiert, dann folgt

$$\varphi(1) = 2\pi n.$$

Ein Halbstrahl  $\Delta_\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) nahe  $\Delta$  bildet dann auf einen Halbstrahl  $\Delta_{\varepsilon+\delta}$  (für  $\delta > 0$  passend) ab (siehe Abbildung 3.15). Die Giroux-Torsion von  $\varphi$  ist dann also  $n + 1$ . Man erhält so also nur Funktionen mit Giroux-Torsion größer oder gleich 2.

Wie man den Halbstrahl  $\Delta$  wählen muss, um jede mögliche Giroux-Torsion zu erhalten, hängt also von den Eigenvektoren der Matrix  $A$  ab. Zuerst rechnet man also durch Betrachten des charakteristischen Polynoms nach, dass für die Eigenwerte  $\lambda$  einer Matrix  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$

$$\left(\lambda - \frac{\text{Spur}(A)}{2}\right)^2 = \left(\frac{\text{Spur}(A)}{2}\right)^2 - 1$$

gilt. Im folgenden wird nur der Fall für positive  $n$  betrachtet, für negative  $n$  geht dies analog.

Ist  $A$  elliptisch, so besitzt  $A$  also keinen reellen Eigenwert und somit auch keinen Eigenvektor. Jeder Halbstrahl wird also unter  $A$  nur um einen (im Allgemeinen nicht-konstanten) Winkel in immer dieselbe Richtung gedreht. In diesem Fall kann man  $\Delta$  also beliebig wählen und erhält für jede Wahl von  $\Delta$  eine zugehörige Funktion  $\varphi$  mit Giroux-Torsion  $n$ . Genauso folgt dies, wenn  $A = \pm \text{Id}$  ist.

Ist  $A$  negativ parabolisch, so hat  $A$  als einzigen Eigenwert  $-1$ . Wenn  $A \neq -\text{Id}$ , so ist  $A$  ähnlich zu  $-T^k$  mit  $k \neq 0$  und hat somit nur einen einzigen Eigenvektor.  $A$  wirkt also wie in Abbildung 3.17 dargestellt. (Die Richtung des Eigenvektors ist in grün gezeichnet.)

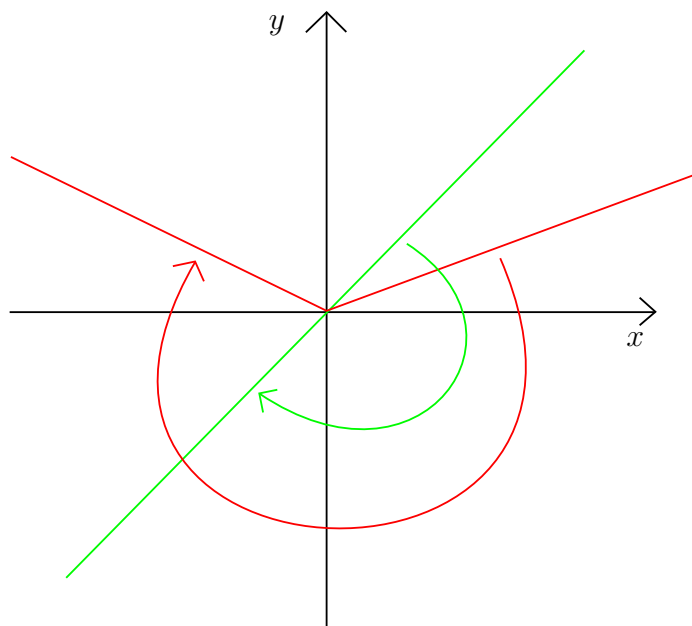


Abbildung 3.17: Die Wirkung einer negativ parabolischen Matrix.

Hier wird also auch jeder Halbstrahl um einen (nicht-konstanten) Winkel in immer dieselbe Richtung gedreht und somit ist wie oben die Giroux-Torsion von  $\varphi$  gleich  $n$ .

Ist  $A \neq \text{Id}$  jedoch positiv parabolisch, so hat  $A$  nur einen einzigen Eigenvektor zum einzigen Eigenwert 1.  $A$  wirkt also wie die Matrix  $T^k$  oben. Wenn man also eine Funktion  $\varphi$  mit Giroux-Torsion 1 erhalten will, muss man (im Fall  $n = 1$ )  $\Delta$  so wählen, dass  $\Delta$  nicht in die Richtung des Eigenvektors zeigt.

Wenn  $A$  hyperbolisch ist, dann hat  $A$  entweder zwei positive Eigenwerte oder zwei negative Eigenwerte mit je einem Eigenvektor. Hat  $A$  zwei negative Eigenwerte (dies ist gleichbedeutend mit  $\text{Spur}(A) < -2$ ), dann wird (ähnlich wie im negativ parabolischen Fall) also auch jeder Halbstrahl um einen (nicht-konstanten) Winkel in immer dieselbe Richtung gedreht und somit ist wie oben die Giroux-Torsion von  $\varphi$  gleich  $n$ . Hat  $A$  zwei positive Eigenwerte (dies ist gleichbedeutend mit  $\text{Spur}(A) > 2$ ), dann wirkt  $A$  also wie in folgender Abbildung dargestellt (die Eigenvektoren sind wieder in grün gezeichnet):

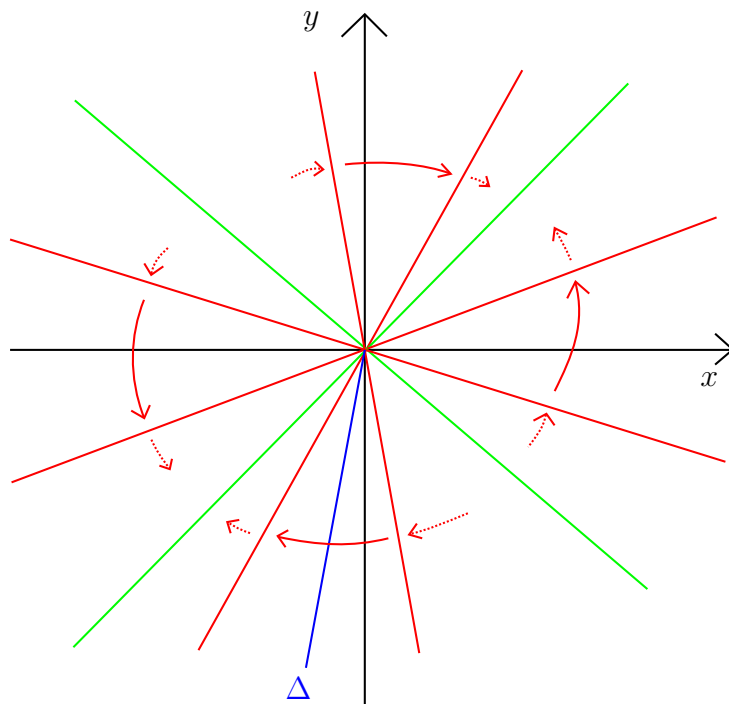


Abbildung 3.18: Die Wirkung einer hyperbolischen Matrix.

Wenn man  $\Delta$  also so wählt, dass vom Ursprung aus gesehen links ein abstoßender Eigenvektor und rechts ein anziehender Eigenvektor liegt, dann liefert dies (im Fall  $n = 1$ ) eine Funktion  $\varphi$  mit Giroux-Torsion 1. (Für andere Wahlen von  $\Delta$  erhält man wieder Giroux-Torsion  $n + 1$ .)

(2) Seien  $\varphi, \psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Funktionen wie in (1) mit gleicher Giroux-Torsion  $n$ . Aus Teil (1) folgt, dass  $\varphi, \psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bijektiv sind, wenn  $n \neq \pm 1$ . Dann existiert eine Diffeomorphismus

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

mit  $\varphi \circ f = \psi$ . Weiter gilt

$$\Delta_{\varphi(f(t+1))} = \Delta_{\psi(t+1)} = A\Delta_{\psi(t)} = A\Delta_{\varphi(f(t))} = \Delta_{\varphi(f(t)+1)}.$$

Da die Giroux-Torsionen von  $\varphi$  und  $\psi$  gleich sind, folgt sogar  $\varphi(f(t+1)) = \varphi(f(t)+1)$ , und weil  $\varphi$  ein Diffeomorphismus ist, folgt

$$f(t+1) = f(t) + 1.$$

Betrachte nun die Abbildung

$$\begin{aligned} F: T^2 \times \mathbb{R} &\longrightarrow T^2 \times \mathbb{R} \\ (x, y, t) &\longmapsto (x, y, f(t)). \end{aligned}$$

Wegen  $f(t+1) = f(t) + 1$  gilt nun

$$\begin{aligned} (x, y, t) &\longmapsto (x, y, f(t)) \\ \wr & & \wr \\ (A(x, y), t+1) &\longmapsto (A(x, y), f(t+1)), \end{aligned}$$

und somit induziert diese Abbildung einen Diffeomorphismus von  $T_A^3$ , der wieder mit  $F$  bezeichnet wird. Wegen  $F^*(\mu_\varphi(t)\alpha_\varphi) = \lambda(t)\mu_\psi(t)\alpha_\psi$  (wobei  $\mu_\varphi$  und  $\mu_\psi$  so gewählt sind, dass  $\mu_\varphi(t)\alpha_\varphi$  und  $\mu_\psi(t)\alpha_\psi$  Kontaktformen auf  $T_A^3$  liefern und  $\lambda$  eine nirgends verschwindende Funktion ist, siehe auch Bemerkung 3.37 (1)) ist dies sogar ein Kontaktomorphismus

$$F: (T_A^3, \xi_\psi) \longrightarrow (T_A^3, \xi_\varphi).$$

Es bleibt zu zeigen, dass die Abbildung  $F$  isotop zur Identität ist. Dazu betrachte folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} H: [0, 1] \times T_A^3 &\longrightarrow T_A^3 \\ (s, (x, y, t)) &\longmapsto (x, y, sf(t) + (1-s)t) \end{aligned}$$



Dann ist  $H$  (wieder wegen  $f(t+1) = f(t) + 1$ ) wohldefiniert,  $H_s$  ist für jedes  $s \in [0, 1]$  ein Diffeomorphismus,  $H_0 = \text{Id}$  und  $H_1 = F$ .  $H$  ist also eine Isotopie von der Identität zu  $F$ .

Aus dem Beweis von Teil (1) folgt, dass  $\psi, \varphi$  nicht surjektiv sind, wenn die Giroux-Torsion  $n$  gleich  $\pm 1$  ist und  $A$  hyperbolisch mit Spur  $< -2$  oder positiv parabolisch ( $\neq \text{Id}$ ) ist. In diesem Fall betrachtet man statt  $\psi$  die Funktion

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \tilde{\psi}(t) = \psi(t) + X, \end{aligned}$$

wobei  $X = k\pi$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  so gewählt, dass  $\text{Im}(\tilde{\psi}) = \text{Im}(\varphi)$  ist (siehe auch Beweis von Teil (1)). Wegen

$$\begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi}(t) \\ \cos \tilde{\psi}(t) \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \cos \psi(t) \\ \cos \psi(t) \end{pmatrix}$$

gilt  $\Delta_{\tilde{\psi}(t+1)} = \pm \Delta_{\psi(t+1)} = \pm A \Delta_{\psi(t)} = A \Delta_{\tilde{\psi}(t)}$  und  $\xi_{\tilde{\psi}} = \xi_{\psi}$ . Weiter ist die Giroux-Torsion von  $\psi$  gleich der Giroux-Torsion von  $\tilde{\psi}$ . Da nun  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \text{Im}(\varphi)$  und  $\tilde{\psi}: \mathbb{R} \rightarrow \text{Im}(\tilde{\psi})$  Diffeomorphismen sind, existiert eine Funktion  $f$  wie oben mit  $\varphi \circ f = \tilde{\psi}$ . Der Rest geht dann genau wie im ersten Fall.

(3) Seien  $\xi_n$  und  $\xi_m$  zwei solche Kontaktstrukturen auf  $\mathbb{R}^3$  mit Kontaktformen  $\alpha_n$  und  $\alpha_m$  auf  $\mathbb{R}^3$ . Wie in Bemerkung 3.37 (1) wählt man nun Funktionen  $\lambda_n, \lambda_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , so dass  $\lambda_n(t) \alpha_n$  und  $\lambda_m(t) \alpha_m$  Kontaktstrukturen auf  $T_A^3$  induzieren. Betrachte dann für  $s \in [0, 1]$  die auf  $T_A^3$  definierte 1-Form

$$\alpha^s := (1-s)\lambda_n(t) \alpha_n + s\lambda_m(t) \alpha_m + s(1-s) dt.$$

Da  $\alpha^s$  nie null wird, ist  $\ker(\alpha^s)$  immer ein Ebenenfeld und liefert somit die gesuchte Homotopie zwischen  $\xi_n$  und  $\xi_m$  auf  $T_A^3$ .  $\square$

Genau wie im topologischen Fall gilt:

**Lemma 3.42.**

*Seien  $A$  und  $B$  ähnliche Matrizen in  $SL_2(\mathbb{Z})$ . Dann ist die Kontaktmannigfaltigkeit  $(T_A^3, \xi_n)$  kontaktomorph zu  $(T_B^3, \xi_n)$ .*

*Beweis.*

Sei  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, so dass  $\xi_{\varphi}$  eine Kontaktstruktur auf  $T_A^3$  mit Giroux-Torsion  $n$  liefert. Sei nun  $C \in SL_2(\mathbb{Z})$ , so dass  $A = C^{-1}BC$ . Dann definiere eine glatte Funktion

$\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\psi' \neq 0$  durch die Forderung

$$\Delta_{\psi(t)} = C\Delta_{\varphi(t)}.$$

( $\psi$  ist eindeutig bis auf Addition eines ganzzahligen Vielfachen von  $2\pi$ .) Dann gilt

$$\Delta_{\psi(t+1)} = C\Delta_{\varphi(t+1)} = CA\Delta_{\varphi(t)} = CAC^{-1}\Delta_{\psi(t)} = B\Delta_{\psi(t)}.$$

Dies liefert also eine Kontaktstruktur  $\xi_\psi$  auf  $T_B^3$ , und da  $C$  eine lineare Abbildung mit Determinante 1 ist, ist die Giroux-Torsion von  $\psi$  gleich der Giroux-Torsion von  $\varphi$ , also gleich  $n$ .

Seien nun  $\mu_\varphi(t)\alpha_\varphi$  und  $\mu_\psi(t)\alpha_\psi$  Kontaktformen der entsprechenden Kontaktstrukturen auf den entsprechenden Torusbündeln und schreibe  $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix}$ . Dann betrachtet man den Diffeomorphismus (siehe Beispiel 3.8 (1))

$$\begin{aligned} F: T_A^3 &\longrightarrow T_B^3 \\ (x, y, t) &\longmapsto (C(x, y), t) \end{aligned}$$

und rechnet nach, dass

$$\begin{aligned} F^*\mu_\varphi(t)\alpha_\psi &= \mu_\varphi(t) \left( \cos \psi(t) d(ax + by) - \sin \psi(t) d(cx + ey) \right) \\ &= \mu_\varphi(t) \left( a \cos \psi(t) - c \sin \psi(t) \right) dx - \mu_\varphi(t) \left( e \sin \psi(t) - b \cos \psi(t) \right) dy \\ &= \lambda(t) \left( \cos \varphi(t) dx - \sin \varphi(t) dy \right) \\ &= \tilde{\lambda}(t)\mu_\psi(t)\alpha_\psi \end{aligned}$$

gilt, wobei in der vorletzten Gleichung wieder  $\Delta_{\psi(t)} = C\Delta_{\varphi(t)}$  benutzt wurde und  $\lambda, \tilde{\lambda}$  nirgends verschwindende Funktionen sind.  $F$  wird also zu einem Kontaktomorphismus

$$F: (T_A^3, \xi_\varphi) \longrightarrow (T_B^3, \xi_\psi).$$

□

Anders als auf dem 3-Torus  $T^3$  (siehe Satz 2.22 (2)) sind die  $\xi_n$  für eine allgemeine Matrix  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$  nicht die einzigen straffen Kontaktstrukturen auf  $T_A^3$ . Obwohl in dieser Arbeit nur die Kontaktstrukturen  $\xi_n$  betrachtet werden, sind im folgenden Beispiel noch einige andere straffe Kontaktstrukturen aufgeführt.

**Beispiel 3.43**

Betrachte dazu die Matrix  $\pm T^k = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$  und bezeichne das zugehörige Torusbündel über  $S^1$  mit  $T_{\pm}^3(k) := T_{\pm T^k}^3$  (vergleiche Beispiel 3.38 (3)). Im Folgenden soll eine straffe Kontaktstruktur auf  $T_{\pm}^3(k)$  konstruiert werden; dabei gehen wir vollkommen analog wie bei den  $\xi_n$  vor. Betrachte zunächst für  $m \in \mathbb{Z}$  folgende 1-Form auf dem  $\mathbb{R}^3$ :

$$\beta_m = \sin(2\pi m x) (dy - kt dx) + |k + 1| \cos(2\pi m x) dt$$

Nun rechnet man nach, dass dies eine Kontaktform auf  $\mathbb{R}^3$  ist:

$$d\beta_m = 2\pi m \cos(2\pi m x) dx \wedge dy + (2\pi m |k + 1| - k) \sin(2\pi m x) dt \wedge dx$$

$$\beta_m \wedge d\beta_m = (2\pi m |k + 1| - k \sin^2(2\pi m x)) dt \wedge dx \wedge dy$$

Der letzte Term in der Klammer ist für alle Werte von  $k$  ungleich null (für  $m$  positiv größer als null und für  $m$  negativ kleiner als null), also liefert  $\beta_m$  eine Kontaktstruktur  $\eta_m := \ker(\beta_m)$  auf dem  $\mathbb{R}^3$ . Als nächstes rechnet man nach, dass diese Kontaktstruktur kontaktomorph zur Standardkontaktstruktur  $\xi_{st}$  auf dem  $\mathbb{R}^3$  ist. Betrachte dazu folgenden Diffeomorphismus von  $\mathbb{R}^3$ :

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} z \\ p \\ q \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y \sin(2\pi m x) + t|k + 1| \cos(2\pi m x) \\ t(|k + 1| 2\pi m - k) \sin(2\pi m x) - 2\pi m y \cos(2\pi m x) \\ x \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} f^*(\alpha_{st}) &= f^*(dz + p dq) \\ &= d(y \sin(2\pi m x) + t|k + 1| \cos(2\pi m x)) + \\ &\quad (t(|k + 1| 2\pi m - k) \sin(2\pi m x) - 2\pi m y \cos(2\pi m x)) dx \\ &= \sin(2\pi m x) (dy - kt dx) + |k + 1| \cos(2\pi m x) dt \\ &= \beta_m \end{aligned}$$

Also ist  $\eta_m$  eine straffe Kontaktstruktur auf dem  $\mathbb{R}^3$ . Jetzt rechnet man nach, dass diese Kontaktstruktur  $\eta_m$  auf dem  $\mathbb{R}^3$  eine Kontaktstruktur auf  $T_{\pm}^3(k)$  induziert. Nach Lemma 3.35 reicht es hierzu nachzurechnen, dass jede Decktransformation ein Kontaktmorphismus von  $(\mathbb{R}^3, \eta_m)$  ist. Wie im Beweis von Lemma 3.35 wird die Decktransformations-

gruppe von den drei Abbildungen  $f_1, f_2, f_3: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  erzeugt, gegeben durch:

$$\begin{aligned} f_1: (x, y, t) &\longmapsto (x + 1, y, t) \\ f_2: (x, y, t) &\longmapsto (x, y + 1, t) \\ f_3: (x, y, t) &\longmapsto (\pm x, \pm kx \pm y, t + 1) \end{aligned}$$

Für  $f_2$  folgt sofort, dass dies ein Kontaktomorphismus ist ( $d(y + 1) = dy$ ), für  $f_1$  und  $f_3$  rechnet man dies nach:

$$\begin{aligned} f_1^*(\beta_m) &= \sin(2\pi mx + 2\pi m) (dy - kt d(x + 1)) + |k + 1| \cos(2\pi mx + 2\pi m) dt \\ &= \sin(2\pi mx) (dy - kt dx) + |k + 1| \cos(2\pi mx) dt \\ &= \beta_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3^*(\beta_m) &= \sin(\pm 2\pi mx) (d(\pm kx \pm y) - k(t + 1) d(\pm x)) + |k + 1| \cos(\pm 2\pi mx) d(t + 1) \\ &= \pm \sin(2\pi mx) (\pm k dx \pm dy \mp ktdx \mp k dx) + |k + 1| \cos(2\pi mx) dt \\ &= \sin(2\pi mx) (dy - kt dx) + |k + 1| \cos(2\pi mx) dt \\ &= \beta_m \end{aligned}$$

Die Kontaktstruktur  $\eta_m$  auf  $\mathbb{R}^3$  induziert also eine Kontaktstruktur auf  $T_{\pm}^3(k)$ . Diese Kontaktstruktur wird der Einfachheit halber wieder mit  $\eta_m$  bezeichnet. Da  $\eta_m$  auf  $\mathbb{R}^3$  straff ist, ist  $\eta_m$  nach dem Kontaktüberlagerungslemma 2.19 auch auf  $T_{\pm}^3(k)$  straff und somit per Definition sogar universell straff. Dass diese Kontaktstrukturen  $\eta_m$  im Allgemeinen zu keiner der Kontaktstrukturen  $\xi_n$  kontaktomorph sind, ist nicht so leicht zu sehen, wird aber von dem folgenden Klassifikationssatz von Giroux und Honda beantwortet.

**Satz 3.44** (Klassifikation straffer Kontaktstrukturen auf Torusbündeln über  $S^1$ ).

Sei  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$  eine beliebige vorgegebene Matrix. Dann gilt:

(1)  $(T_A^3, \xi_n)$  ist kontaktomorph zu  $(T_A^3, \xi_m)$  genau dann, wenn  $n = m$  gilt. Insbesondere existieren also auf jedem Torusbündel unendlich viele (bis auf Kontaktomorphie) verschiedene straffe Kontaktstrukturen.

(2) Ist  $A$  **nicht** negativ parabolisch, so ist jede positive, universell straffe Kontaktstruktur auf  $T_A^3$  kontaktomorph zu einer der obigen Kontaktstrukturen  $\xi_n$ .

(3) Wenn  $A$  negativ parabolisch ist, so ist  $(T_-^3(k), \eta_m)$  kontaktomorph zu  $(T_-^3(k), \eta_n)$  genau dann, wenn  $n = m$  ist. Weiter ist  $(T_-^3(k), \eta_m)$  nie (das heißt für beliebige Wahlen von  $n$  und  $m$ ) kontaktomorph zu  $(T_-^3(k), \xi_n)$ . Insbesondere gibt es auf  $T_-^3(k)$  also unendlich viele universell straffe Kontaktstrukturen, die nicht kontaktomorph zu den Kontaktstrukturen  $\xi_n$  sind.

(4) Auf allen Torusbündeln über  $S^1$  existieren nur endlich viele (bis auf Kontaktomorphie) verschiedene virtuell überdrehten Kontaktstrukturen; die Anzahl kann sogar explizit bestimmt werden (siehe [15, Satz 1.3]).

*Beweis.* siehe [15, Satz 1.3] und [23, Satz 0.1] □

### Bemerkung 3.45

Aussage (2) gilt für negative Kontaktstrukturen nicht, da Torusbündel im Allgemeinen keinen orientierungsumkehrenden Diffeomorphismus zulassen (siehe auch Bemerkung 2.23). Mit dem Diffeomorphismus aus Bemerkung 3.16 erhält man aber dieselbe Aussage für negative Kontaktstrukturen auf  $T_A^3$  mit  $\text{Spur}(A) = 2$ .

Das Hauptresultat in dieser Arbeit ist der folgende Satz, analog zum Füllbarkeitssatz von Eliashberg 2.39.

**Satz 3.46** (Füllbarkeitssatz von Ding-Geiges).

(1) Für jede Matrix  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$  und jedes  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  ist die Kontaktmannigfaltigkeit  $(T_A^3, \xi_n)$  schwach symplektisch füllbar.

(2) Für jede Matrix  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$  existiert ein  $n(A) \in \mathbb{N}$ , so dass die Kontaktmannigfaltigkeit  $(T_A^3, \xi_n)$  für  $n > n(A)$  **nicht** stark symplektisch füllbar ist.

Der erste Teil wird im folgenden Kapitel bewiesen, indem man eine schwache symplektische Füllung relativ explizit als eine Lefschetz-Faserung über  $D^2$  konstruiert und dann eine ähnliche Methode wie im Beweis des Füllbarkeitssatzes von Eliashberg 2.39 benutzt. Der zweite Teil wird in Kapitel 5 und 6 mittels Kontakt-Dehn-Chirurgie entlang Legendre-Knoten bewiesen. Dort wird die obige Aussage auf den Füllbarkeitssatz von Eliashberg 2.39 zurückgeführt. Deswegen erhält man auch hier kein genaueres geometrisches Verständnis über die Unterschiede zwischen schwach und stark symplektisch füllbaren Kontaktstrukturen.

Zusammen mit dem Klassifikationssatz 3.44 der Kontaktstrukturen auf Torusbündeln über  $S^1$  von Giroux und Honda erhält man sofort folgendes Korollar:

**Korollar 3.47.**

Ist  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$  **nicht** negativ parabolisch, dann existieren auf  $T_A^3$  nur endlich viele (bis auf Kontaktomorphie) verschiedene positive, stark symplektisch füllbare Kontaktstrukturen.

*Beweis.*

Aus dem Klassifikationssatz 3.44 und Korollar 2.25 folgt, dass alle bis auf endlich viele straffe Kontaktstrukturen universell straff sind, und im Fall  $\text{Spur}(A) \neq -2$  ist jede positive, universell straffe Kontaktstruktur kontaktomorph zu einer der Kontaktstrukturen  $\xi_n$ . Nach dem Füllbarkeitssatz von Ding-Geiges 3.46 sind von diesen nur endlich viele stark symplektisch füllbar.  $\square$

In Abschnitt 5.4 werden einige verbesserte Resultate für spezielle Matrizen  $A$  gegeben. Insbesondere wird ein Algorithmus angegeben, der eine mögliche Schranke  $n(A)$  liefert. Auch werden einige positive Resultate über die starke Füllbarkeit der Kontaktstrukturen  $\xi_1$  auf speziellen Torusbündeln gegeben.

## 4 Lefschetz-Faserungen und die schwache Füllbarkeit

In diesem Kapitel soll eine Einführung in die Theorie der Lefschetz-Faserungen gegeben werden. Die Grundlagen dafür sind [16, Kapitel 8] und [28, Kapitel 10]. Lefschetz-Faserungen sind grob gesprochen 4-Mannigfaltigkeiten, die man überall bis auf in isolierten kritischen Punkten als Flächenbündel über einer Fläche schreiben kann. Ähnlich wie in der Morsetheorie (in der man Urbilder von Funktionen in die reellen Zahlen studiert) kann man nun durch das Studium dieser kritischen Punkte Rückschlüsse auf die globale Topologie der Mannigfaltigkeit ziehen. Diese Aspekte werden im ersten Abschnitt genauer erklärt.

In Abschnitt 2 wird genauer auf eine spezielle Klasse von Lefschetz-Faserungen eingegangen, die Lefschetz-Faserungen, die (bis auf kritische Punkte) Torusbündel über  $D^2$  sind. Hier wird man dann sehen, dass (anders als in der Morsetheorie) die Urbilder in einer Umgebung eines kritischen Punktes alle diffeomorph sind. Bewegt man sich also einmal um einen kritischen Punkt herum, erhält man so einen Diffeomorphismus von  $T^2$ . Diesen Diffeomorphismus nennt man dann lokale Monodromie des kritischen Punktes (siehe auch Definition 3.6). In diesem Abschnitt wird dann untersucht, inwieweit diese lokale Monodromie die Lefschetz-Faserung bestimmt und es wird gezeigt, dass man umgekehrt zu jeder Monodromie eine entsprechende Lefschetz-Faserung konstruieren kann. Zu diesen Lefschetz-Faserungen wird auch ein explizites Kirby-Diagramm angegeben.

Im dritten Abschnitt wird dann der Zusammenhang zu den symplektischen Mannigfaltigkeiten gezogen. Außer in wenigen und gut verstandenen Ausnahmen lässt jede Lefschetz-Faserung eine symplektische Struktur zu und umgekehrt trägt jede symplektische Mannigfaltigkeit die Struktur einer Lefschetz-Faserung.

Im letzten Abschnitt werden dann mit den bis dahin entwickelten Methoden explizite symplektische Füllungen der Torusbündel  $(T_A^3, \xi_n)$  konstruiert.

## 4.1 Lefschetz-Faserungen

Zuerst die Definition einer Lefschetz-Faserung.

**Definition 4.1** (Lefschetz-Faserung).

Es seien  $W^4$  und  $\Sigma^2$  orientierte, kompakte und zusammenhängende 4- bzw. 2-Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung  $f: W^4 \rightarrow \Sigma^2$  heißt **Lefschetz-Faserung**, wenn

- ihr Differential in bis auf endlich vielen isolierten Ausnahmepunkten  $\{p_1, \dots, p_k\} =: \text{Krit}(f) \subset \text{int}(W)$  surjektiv ist,
- die kritischen Werte  $q_i := f(p_i) \in \Sigma$  alle verschieden sind,
- $f$  außerhalb der kritischen Werte ein Flächenbündel über einer Fläche mit zusammenhängenden Fasern ist und
- es um jeden kritischen Punkt  $p_i$  und jeden zugehörigen kritischen Wert  $q_i$  Orientierungstreue komplexe Karten gibt, sodass  $f$  in diesen Karten aussieht wie

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (z, w) &\longmapsto z^2 + w^2. \end{aligned}$$

Ist  $q_i \in \Sigma$  ein kritischer Wert, so bezeichnet man  $f^{-1}(q_i)$  als **singuläre Faser** der Lefschetz-Faserung, ansonsten nennt man  $f^{-1}(q)$  **reguläre Faser**. Weiter definiert man das **Geschlecht** (oder **Genus**) einer solchen Lefschetz-Faserung als das Geschlecht der regulären Fasern.

**Bemerkung 4.2**

- (1) Sowohl  $W$  als auch  $\Sigma$  aus der obigen Definition dürfen Rand haben. Dann gilt  $f^{-1}(\partial\Sigma) \subset \partial W$ .
- (2) Die Orientierung von  $\Sigma$  spielt keine Rolle, denn komplexe Konjugation von  $z$  und  $w$  lässt  $f$  und die Orientierung von  $W$  invariant, aber ändert die Orientierung auf  $\Sigma$ .
- (3) Die Orientierung von  $W$  ist jedoch ein entscheidender Punkt. Lässt man die Orientierungsbedingung an die Karten von  $W$  fallen, so haben die entstehenden Objekte grundlegend andere Eigenschaften, insbesondere geht der Zusammenhang zu den symplektischen Mannigfaltigkeiten verloren (siehe Abschnitt 4.4).
- (4) In dieser Arbeit werden nur Lefschetz-Faserungen über  $D^2$  benötigt, weswegen in vielen Sätzen nur auf diese speziellen Lefschetz-Faserungen eingegangen wird. Einige von diesen Sätzen gelten aber auch nur für diese spezielle Klasse von Lefschetz-Faserungen.



**Beispiel 4.3**

- (1) Jedes Faserbündel  $f: W^4 \rightarrow \Sigma^2$  ist eine (triviale) Lefschetz-Faserung.
- (2) Das einfachste nicht-triviale, aber gleichzeitig auch wichtigste, Beispiel ist die Abbildung (siehe auch [1, Seiten 1-5])

$$f: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(z, w) \longmapsto z^2 + w^2.$$

Diese Abbildung hat einen eindeutigen kritischen Punkt  $z = w = 0$  mit kritischem Wert  $f(z, w) = 0$ ; dennoch ist diese Abbildung keine Lefschetz-Faserung nach der Definition oben, denn die Mannigfaltigkeiten  $\mathbb{C}^2$  und  $\mathbb{C}$  sind beide nicht kompakt. Man könnte aber statt  $\mathbb{C}^2$  und  $\mathbb{C}$  kompakte Teilmengen betrachten, wie zum Beispiel  $D^2 \subset \mathbb{C}$  und  $\{z^2 + w^2 \leq 1\} \subset \mathbb{C}^2$ , und so eine Lefschetz-Faserung erhalten.

Andererseits ergibt es auch Sinn, diese Abbildung wie oben definiert zu studieren, da jede Lefschetz-Faserung in der Umgebung eines kritischen Punktes genau so aussieht. Durch das Studium dieser Abbildung erhält man also immer lokale Aussagen über Lefschetz-Faserungen.

Ähnlich wie in der Morsetheorie (in der man Urbilder von Funktionen in die reellen Zahlen studiert) betrachtet man nun die Urbilder

$$F_\lambda := f^{-1}(\lambda) = \{z^2 + w^2 = \lambda\} \subset \mathbb{C}^2,$$

um so Rückschlüsse auf die globale Topologie und Geometrie der Mannigfaltigkeit zu ziehen. Anders als bei Morsefunktionen sind hier aber alle Urbildmengen in der Umgebung eines kritischen Punktes diffeomorph.

Dies sieht man einfach, indem man (für  $\lambda \neq 0$ ) die Riemannsche Fläche  $F_\lambda$  der Funktion  $w(z) = \sqrt{\lambda - z^2}$  betrachtet. Ist  $z \neq \pm\sqrt{\lambda}$ , dann gibt es für jeden  $z$ -Wert genau zwei Werte für  $w$ , einen positiven und einen negativen. Entfernt man nun aus zwei Kopien von  $\mathbb{C}$  die Strecke  $(-\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda})$  zwischen  $-\sqrt{\lambda}$  und  $+\sqrt{\lambda}$ , erhält man zwei Äste, auf denen die Funktion (nach Wahl eines Vorzeichens für  $w$ ) holomorph ist (siehe Abbildung 4.1). Der Graph  $F_\lambda$  der Funktion  $w = \sqrt{\lambda - z^2}$  besteht also aus zwei komplexen Ebenen, die entlang einer Strecke identifiziert werden.

Um nun zu sehen, dass dies diffeomorph zu einem Zylinder ist, schneidet man die beiden komplexen Ebenen entlang  $(-\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda})$  auf (weswegen eine solche Strecke auch oft als Schnitt bezeichnet wird). Wenn man sich die Funktion  $w = \sqrt{\lambda - z^2}$  genauer ansieht, erkennt man, dass die Ränder dieser aufgeschnittenen komplexen Ebenen wie in

Abbildung 4.2 verklebt werden und man erhält (wie in dieser Abbildung gezeigt) eine Mannigfaltigkeit, die unabhängig von  $\lambda$  diffeomorph zu einem Zylinder  $S^1 \times \mathbb{R}$  ist.

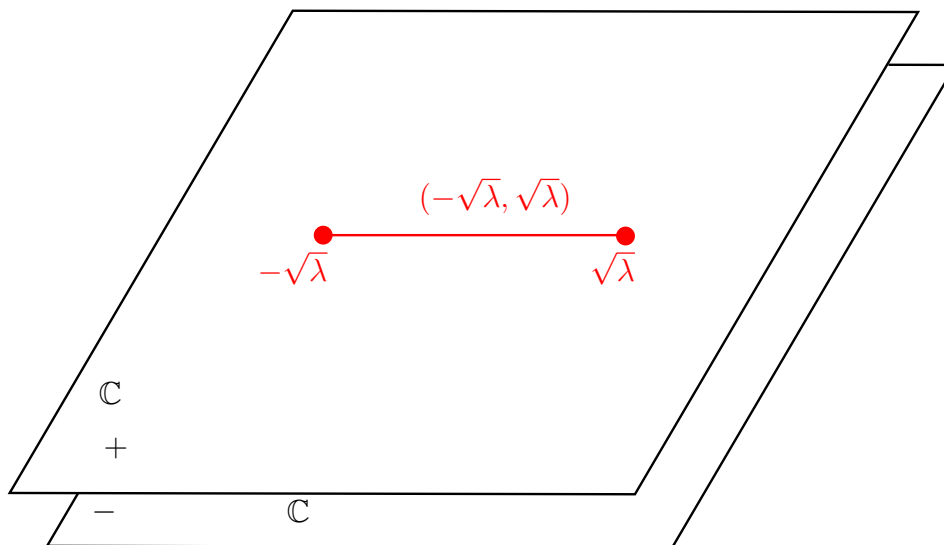


Abbildung 4.1: Die Riemannsche Fläche der Funktion  $w = \sqrt{\lambda - z^2}$

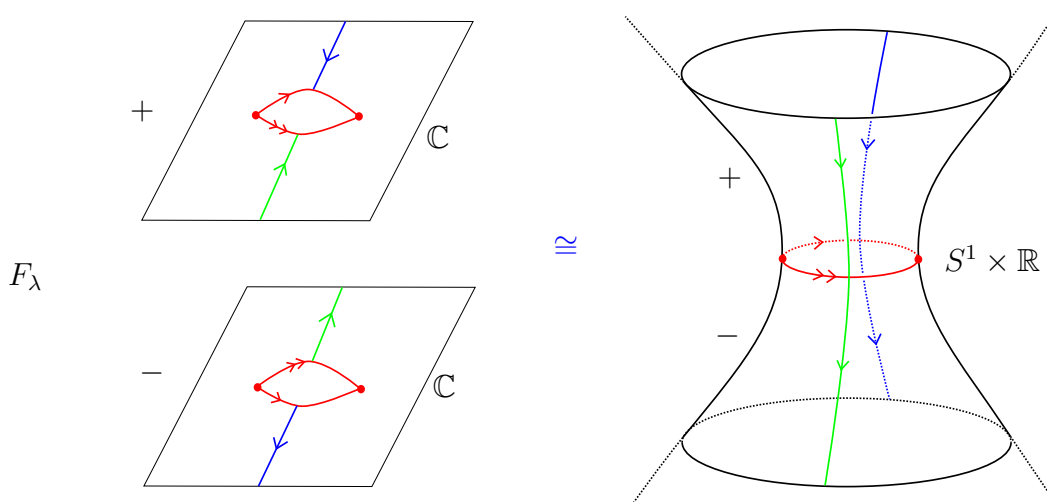


Abbildung 4.2: Das Urbild  $F_\lambda$  eines regulären Wertes ist diffeomorph zu einem Zylinder.

Betrachte als nächstes den Kreis

$$C_\lambda := \{z = \sqrt{\lambda} e^{it} \mid t \in [0, 2\pi]\} \subset F_\lambda.$$

Dieser Kreis repräsentiert den  $S^1$ -Faktor, wenn man  $F_\lambda$  als  $S^1 \times \mathbb{R}$  auffasst (siehe Abbildung 4.3). Lässt man nun  $\lambda$  gegen 0 konvergieren, so konvergiert  $C_\lambda$  gegen den Punkt

$(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ . Die singuläre Faser  $F_0$  entsteht also aus einer regulären Faser, indem man den Kreis  $C_\lambda$  zu einem Punkt zusammenzieht. Deswegen nennt man  $C_\lambda$  auch **Verschwindkreis** (engl. vanishing cycle). Die singuläre Faser besteht also aus zwei komplexen Ebenen, die sich in einem einzigen Punkt transversal schneiden. Dies kann man auch wie in Abbildung 4.3 als Kegel zeichnen.

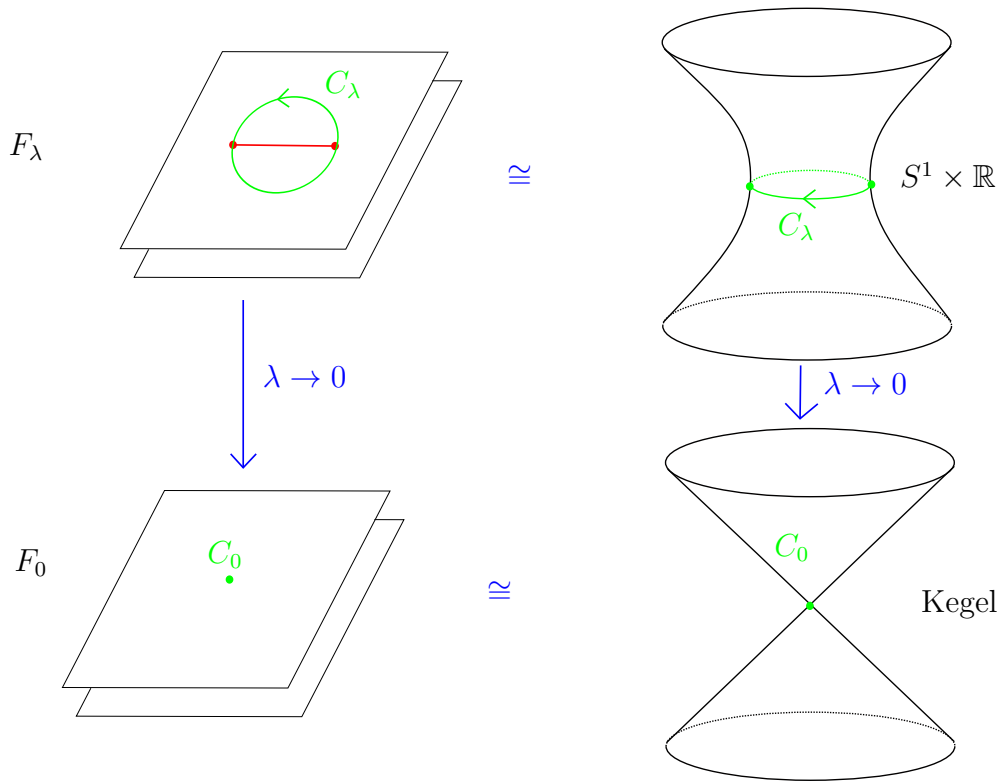


Abbildung 4.3: Der Verschwindkreis  $C_\lambda$  und die singuläre Faser  $F_0$

Auf diese Art zerlegt sich der ganze  $\mathbb{C}^2$  in eine singuläre Faser  $F_0$  und die regulären Fasern  $F_\lambda$ , zugehörig zu den entsprechenden Werten der Funktion  $f$ .

Lokal sieht jede Umgebung eines kritischen Punktes in einer Lefschetz-Faserung so aus. Insbesondere entsteht eine singuläre Faser aus einer regulären Faser immer, indem man einen Kreis in der regulären Faser zu einem Punkt zusammenzieht.

(3) Eine allgemeine Lefschetz-Faserung kann man sich also vorstellen als ein Flächenbündel über einer Fläche, bei dem in den singulären Fasern jeweils ein Kreis zu einem einzigen Punkt zusammengezogen wird. In Abbildung 4.4 ist eine Genus-2-Lefschetz-Faserung über  $D^2$  schematisch dargestellt. Dort sind die beiden kritischen Werte und die zugehörigen singulären Fasern in rot dargestellt, einige reguläre Werte und die zugehörigen regulären Fasern sind in lila gezeichnet. Die beiden Verschwindekreise sind in

grün dargestellt. Man erkennt hier zwei grundsätzlich verschiedene Möglichkeiten von Verschwindekreisen, die man nur in der globalen Faser unterscheiden kann. Die eine Möglichkeit ist, dass das Zusammenziehen des Verschwindekreises das Geschlecht der Faser um eins reduziert, wie bei der linken singulären Faser in der Abbildung. Die andere Möglichkeit ist, dass das Zusammenziehen des Verschwindekreises die singuläre Faser in zwei Komponenten teilt. Einen solchen Verschwindekreis nennt man deswegen **separierend**.

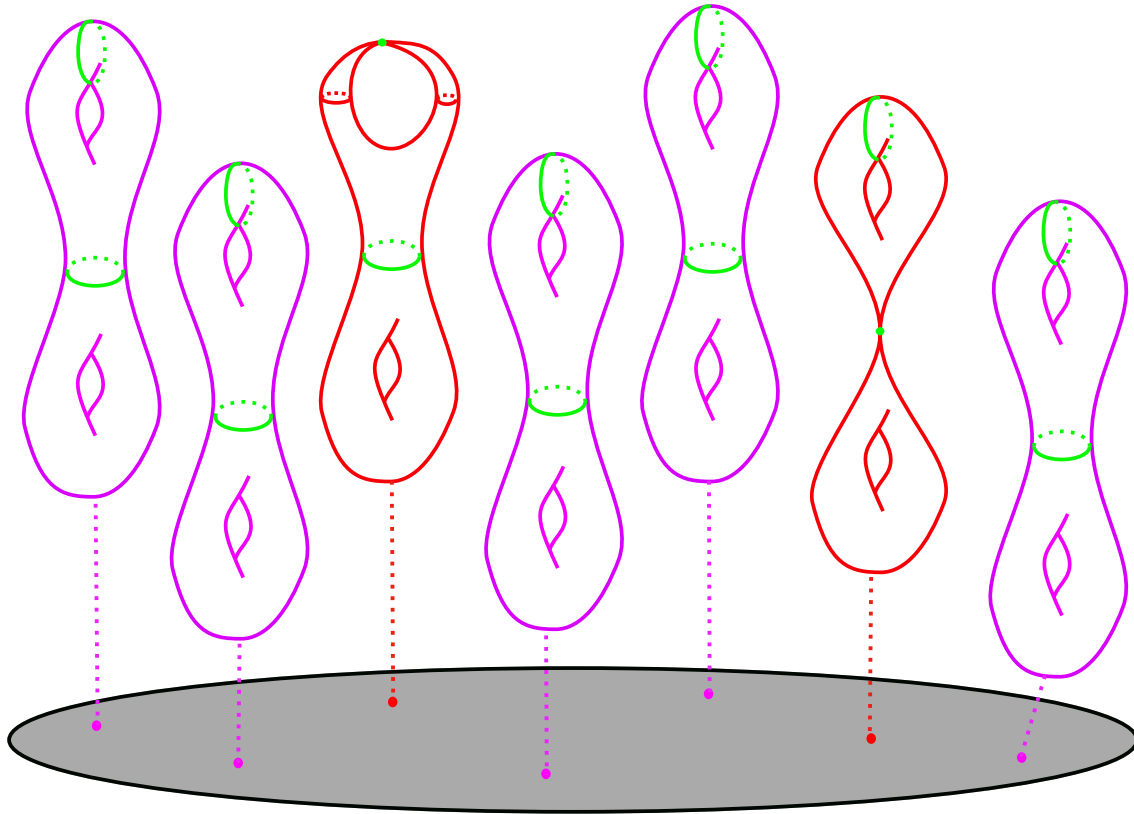


Abbildung 4.4: Schematische Skizze einer Genus-2-Lefschetz-Faserung über  $D^2$

Aus diesem Beispiel folgt sofort eine grundlegende Eigenschaft von Lefschetz-Faserungen:

**Korollar 4.4.**

*Die singulären Fasern sind kompakte immersierte Flächen mit genau einem transversalem Selbstschnitt in dem entsprechenden kritischen Punkt. Die singulären Fasern erhält man aus einer benachbarten regulären Faser, indem man den Verschwindekreis (eine einfach geschlossen Kurve auf der regulären Faser) zu einem Punkt zusammenzieht.*

Als nächstes wird gezeigt, dass jeder kritische Punkt einer Lefschetz-Faserung über  $D^2$  dem Anheften eines 2-Henkels entspricht, genauer:

**Korollar 4.5.**

Sei  $f: W^4 \rightarrow D^2$  eine Lefschetz-Faserung,  $q_0 \in D^2$  ein kritischer Wert und  $q \in D^2$  ein regulärer Wert hinreichend nahe an  $q_0$ . Dann erhält man eine reguläre Umgebung  $\nu F_{q_0} \subset W^4$  der singulären Faser, indem man einen 2-Henkel an eine reguläre Umgebung  $\nu F_q \subset W^4$  der regulären Faser entlang des Verschwindekreises  $C_q$  in einer Torusfaser in  $\partial\nu F_q$  mit Rahmung  $-1$  anheftet, wobei die 0-Rahmung durch einen zu  $C_q$  parallelen Knoten in der entsprechenden Torusfaser gegeben ist.

*Beweisidee.* (für genauen Beweis siehe [16, Seite 293] oder [28, Seiten 156-157])

Wähle lokale Koordinaten so, dass  $q_0 = 0 \in \mathbb{C}$  und  $q \in \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{C}$ . Betrachte die Scheibe

$$D_q^2 := \{ \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Re}(w)^2 \leq q^2, \operatorname{Im}(z) = 0 = \operatorname{Im}(w) \} \subset W.$$

Für  $q \rightarrow 0$  konvergiert  $D_q^2$  gegen einen Punkt. Der Rand  $\partial D_q^2$  repräsentiert also den Verschwindekreis  $C_q$  in der Faser  $F_q$ . Hier sieht man dann explizit, wie  $F_{q_0}$  aus  $F_q$  entsteht, indem die Scheibe  $D_q^2$  zu einem Punkt zusammengezogen wird. Eine Umgebung  $\nu F_{q_0}$  der singulären Faser entsteht also aus einer Umgebung  $\nu F_q$  der regulären Faser, indem man eine Umgebung der Scheibe  $D_q^2$  in  $W$  an  $\partial\nu F_q$  anheftet. Dies entspricht genau dem Anheften eines 2-Henkels (siehe auch die schematische Abbildung 4.5 in Dimension 3).

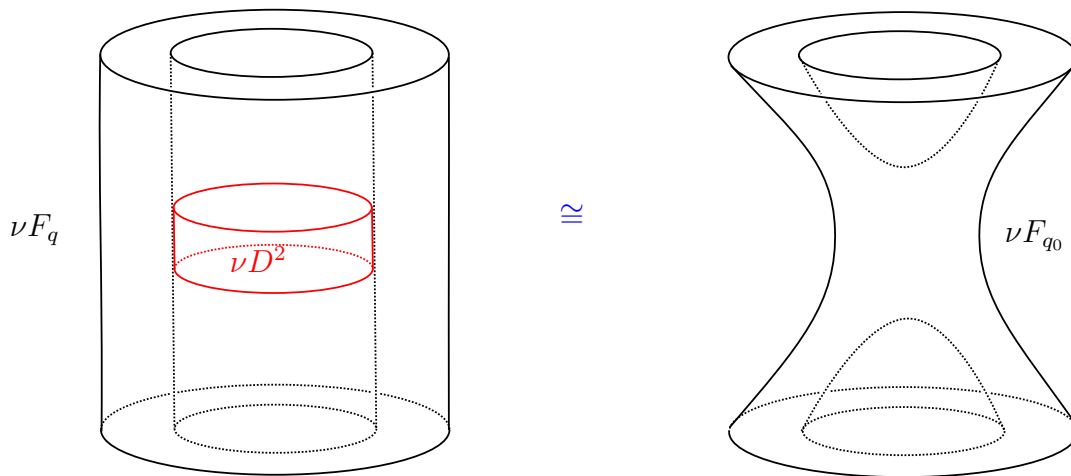


Abbildung 4.5: Umgebungen einer regulären und einer singulären Faser unterscheiden sich nur durch einen 2-Henkel.

Wenn man nun die Rahmung dieses 2-Henkels beschreiben will, so muss man zuerst eine Referenzrahmung angeben. Dazu wählt man die Umgebung  $\nu F_q$  so, dass der Rand  $\partial\nu F_q$  die komplette Faser  $F_r$  enthält, wobei  $r \in (0, q) \subset \mathbb{C}$  sein soll. Die 0-Rahmung des Ver-

schwindekreises  $C_r$ , an den der 2-Henkel angeheftet wird, soll dann die Rahmung sein, die durch einen zu  $C_r$  parallelen Knoten in  $F_r$  gegeben ist. Wenn man jetzt eine genaue Rechnung durchführt und die Orientierungen der obigen Objekte sorgfältig berücksichtigt, erhält man für den 2-Henkel eine Rahmung von  $-1$  (siehe dafür zum Beispiel [16, Seite 293 und Aufgabe 8.2.2] oder [28, Seiten 156-157]).  $\square$

Mit diesem Korollar kann man nun einige Lefschetz-Faserungen als 3-dimensionale Diagramme darstellen. Diese Diagramme nennt man **Kirby-Diagramme**. Dabei wird die entsprechende 4-Mannigfaltigkeit zuerst als Henkelkörper mit nur einem einzigen 0-Henkel  $D^4$  und sonst nur 1- und 2-Henkeln geschrieben. In einem Kirby-Diagramm werden dann nur die Anklebesphären der 1- und 2-Henkel in  $S^3 = \partial D^4$  eingezeichnet (wobei die Anklebesphären der 2-Henkel auch über die 1-Henkel laufen können). Wenn man zusätzlich zu den Anklebesphären der 2-Henkel noch die richtige Rahmung (siehe auch Kapitel 5) angibt, kann man zeigen, dass diese Daten die zugehörige 4-Mannigfaltigkeit eindeutig festlegen (siehe dafür zum Beispiel [16, Kapitel 4 und 5]). Hier werden nur Genus-1-Lefschetz-Faserungen über  $D^2$  betrachtet; die meisten Beispiele funktionieren aber auch für viel allgemeinere Lefschetz-Faserungen.

**Beispiel 4.6**

(1) Sei  $f: W \rightarrow D^2$  eine Genus-1-Lefschetz-Faserung ohne kritischen Punkt. Dann ist  $f: W \rightarrow D^2$  ein Faserbündel über  $D^2$  und somit nach Lemma 3.4 das triviale Bündel  $T^2 \times D^2 \rightarrow D^2$  mit Rand  $T^3$  aufgefasst als triviales  $T^2$ -Bündel über  $S^1$ .

Ein Kirby-Diagramm davon ist wie folgt gegeben (siehe [16, Seiten 132-133]):

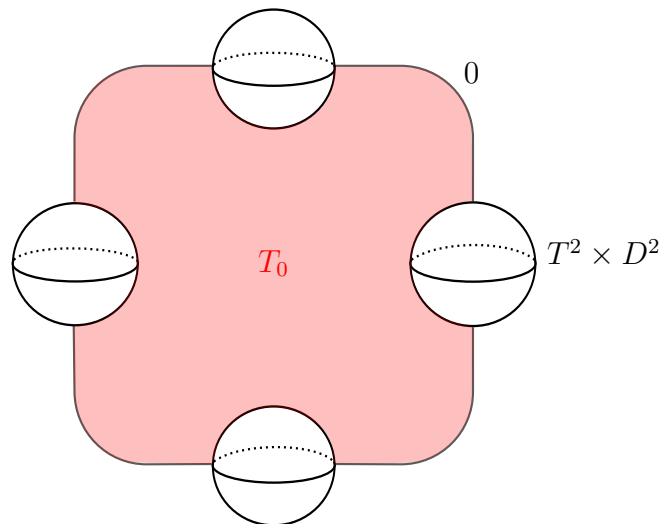


Abbildung 4.6: Ein Kirby-Diagramm von  $T^2 \times D^2$

Dabei werden jeweils die gegenüberliegenden 3-Bälle durch Spiegelung identifiziert (dies beschreibt die beiden 1-Henkel). Der Knoten, der über diese beiden 1-Henkel läuft, beschreibt die Anklebesphäre des 2-Henkel. Um die Rahmung dieser Anklebesphäre zu beschreiben, bemerkt man, dass dieser Knoten eine Torus-Seifertfläche  $T_0$  berandet (das heißt  $T_0$  erweitert über die 1- und 2-Henkel zu einem Torus) und somit null-homolog ist. Die Nullrahmung dieses Knotens soll dann der Flächenrahmung bezüglich dieser Seifertfläche entsprechen (siehe auch Abschnitt 5.3).

Natürlich kann man ein solches Kirby-Diagramm auch immer als Diagramm für die berandende 3-Mannigfaltigkeit lesen. Dann sieht man auch explizit die Produktstruktur von  $T^3$  aufgefasst als  $T^2 \times S^1$ . Dabei ist der  $S^1$ -Faktor durch den Kreis gegeben, der die Torusfaser  $T_0$  senkrecht durchstößt und dann einmal durch  $\infty$  läuft. Dieser  $S^1$ -Faktor wird dann an jedem Punkt von genau einer zu  $T_0$  parallelen Torusfaser geschnitten.

Aus diesem Kirby-Diagramm kann man weiter auch ein Chirurgie-Diagramm (siehe Kapitel 5) der berandenden 3-Mannigfaltigkeit erhalten (siehe Abbildung 4.7).

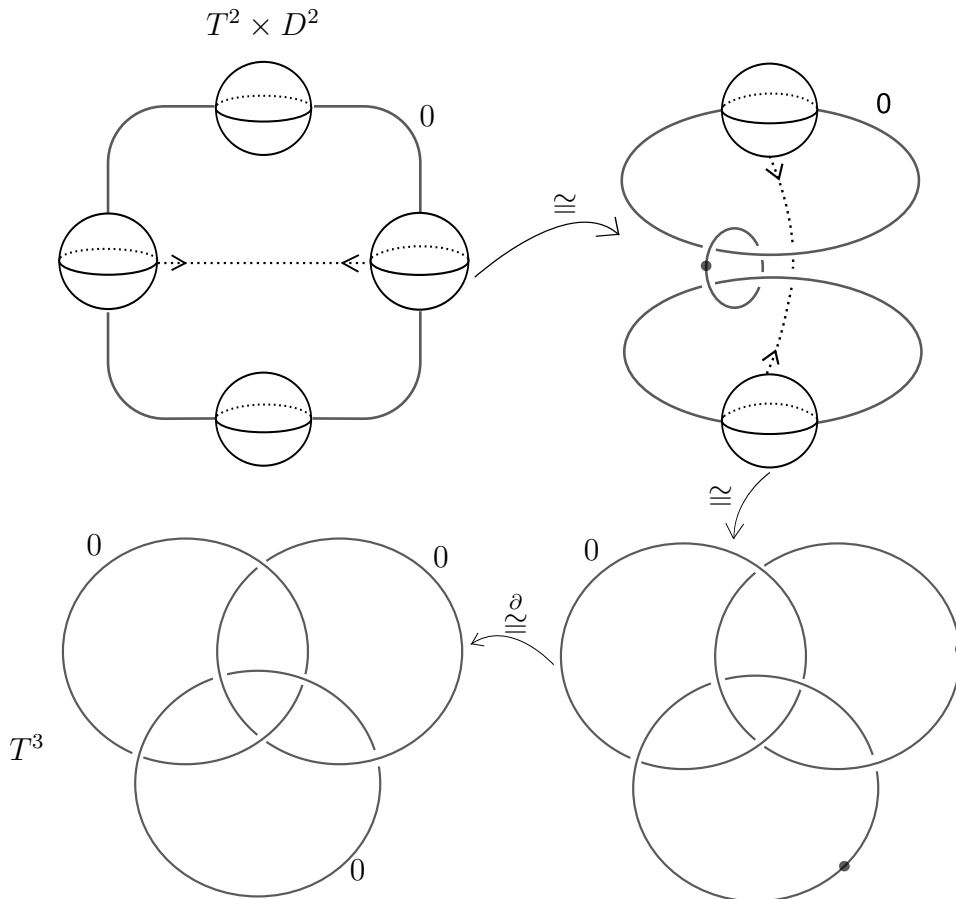


Abbildung 4.7: Von einem Kirby-Diagramm des 3-Torus zu einem Chirurgie-Diagramm

Dazu bemerkt man, dass das Anheften eines 1-Henkels an den 0-Henkel  $D^4$  äquivalent zu dem Entfernen eines 2-Henkels aus  $D^4$  ist (siehe auch [16, Kapitel 5.4]). Die Anklebepöhre eines solchen entfernten 2-Henkels wird als ein punktierter Kreis gezeichnet. In den ersten beiden Schritten in Abbildung 4.7 werden die beiden 1-Henkel in diese Notation übersetzt. Der dritte Schritt stellt dann nur ein Diffeomorphismus der berandenden 3-Mannigfaltigkeit dar, aber die 4-Mannigfaltigkeit wird geändert (siehe [16, Seite 167]). (2) Möchte man nun eine Lefschetz-Faserung mit einem einzigen kritischen Punkt beschreiben, so muss man (nach dem vorigen Korollar) einen 2-Henkel entlang des Verschwindekreises in einer Torusfaser anheften. Identifiziert man die 0-Rahmung wie im vorigen Beispiel wieder mit der Flächenrahmung gegeben durch die Torusfaser  $T_0$ , so muss man den 2-Henkel nach dem vorigen Korollar mit Rahmung  $-1$  anheften. (Der Verschwindekreis ist aber, zumindest wenn er nicht-separierend ist, nicht null-homolog, weswegen man mit diesem Rahmkoeffizienten aufpassen muss, da er im Allgemeinen nicht isotopie-invariant ist.) Ohne Einschränkung kann man den Verschwindekreis also so wählen, dass er in der Torusfaser  $T_0$  liegt (wie es zum Beispiel in Abbildung 4.8 gezeichnet ist).

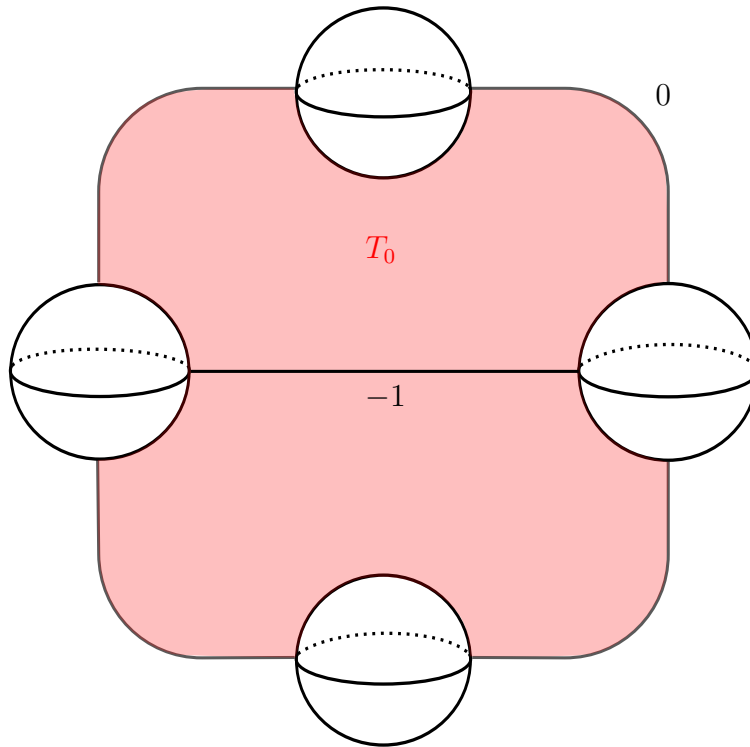


Abbildung 4.8: Eine Lefschetz-Faserung über  $D^2$  mit einem einzigen kritischen Punkt



Wenn man jetzt zusätzlich den Fall betrachtet, dass der Verschwindekreis nicht-separierend ist, dann muss der Verschwindekreis also über mindestens einen 1-Henkel laufen. Nach Henkelverschiebungen kann man dann ohne Einschränkung annehmen, dass der 2-Henkel wie in Abbildung 4.8 angeheftet ist (für ein Beispiel siehe Abbildung 4.9).

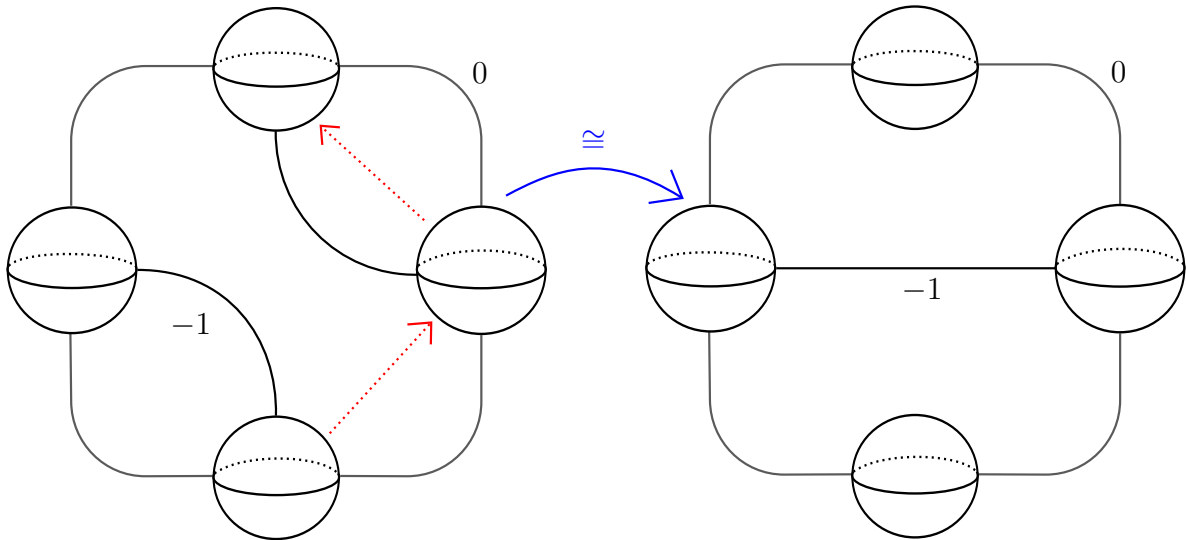


Abbildung 4.9: Eine Henkelverschiebung, die den Verschwindekreis auf eine möglichst einfache Form bringt.

In diesem Fall gibt es also nur eine einzige Möglichkeit. Auch hier kann man wie beim 3-Torus aus dem Kirby-Diagramm eine Chirurgie-Beschreibung der berandenden 3-Mannigfaltigkeit erhalten, wie es in Abbildung 4.10 dargestellt ist. Dabei wurde in den ersten beiden Schritten der 2-Henkel mit Rahmung 0 über den 2-Henkel mit Rahmung  $-1$  bewegt. (Im ersten Schritt wurde addiert und im zweiten subtrahiert. Dafür braucht man auch die Hilfsorientierung der Knoten, siehe [16, Seiten 141-142]). Dann heben sich der horizontale 1-Henkel und der 2-Henkel mit Rahmung  $-1$  auf, so dass man beide weglassen kann. Im vierten Schritt wird der verbliebene 1-Henkel (wie in Abbildung 4.7) in die punktierte-Kreis-Notation übersetzt.

Die 4-Mannigfaltigkeit aus Abbildung 4.10 unten links nennt man auch **Fischschwanz** (engl. fishtail) (siehe [16, Seite 70 und Beispiel 8.2.8]).

(3) Genauso kann man jetzt auch Kirby-Diagramme für Lefschetz-Faserungen über  $D^2$  mit mehreren kritischen Punkten konstruieren. Dabei gibt es jetzt aber natürlich mehrere Möglichkeiten. Zum Beispiel kann man zwei kritische Punkte erhalten, indem man 2-Henkel entlang zweier (nicht-separierenden) Verschwindekreise, die über entgegengesetzte 1-Henkel laufen, anheftet, wie in Abbildung 4.11 oben links dargestellt.

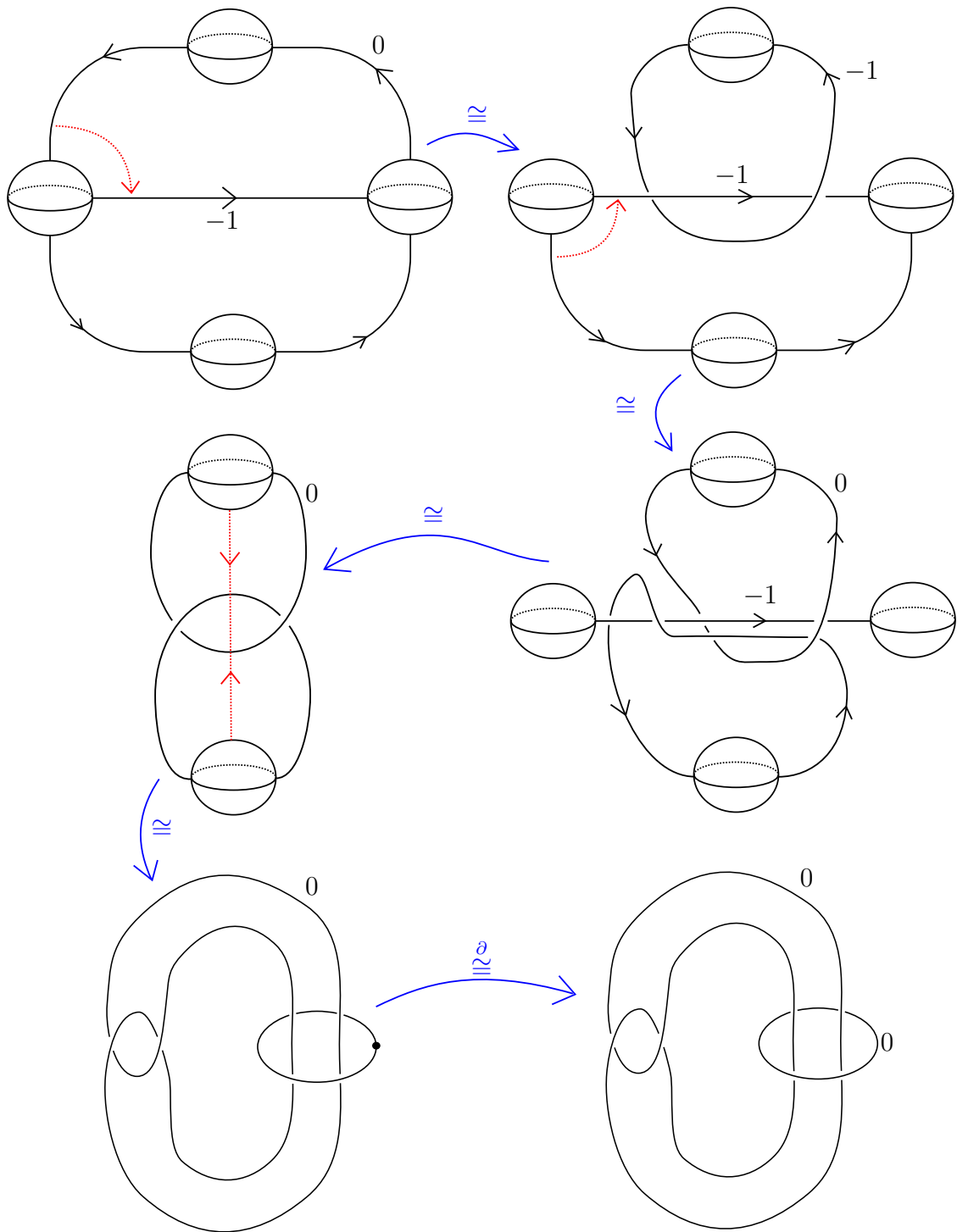


Abbildung 4.10: Von einer Genus-1-Lefschetz-Faserung über  $D^2$  zu einem Fischschwanz

Dabei sollen die beiden Knoten mit Rahmung  $-1$  in unterschiedlichen Torusfasern liegen und die  $0$ -Rahmung soll wieder wie eben durch diese Torusfasern gegeben sein.

Dieses Kirby-Diagramm kann man ähnlich wie eben vereinfachen und erhält dann wie in Abbildung 4.11 eine 4-Mannigfaltigkeit (die auch zugleich ein Chirurgie-Diagramm beschreibt), die man **Spitze** (engl. cusp) nennt (siehe [16, Seite 70 und Beispiel 8.2.8]).

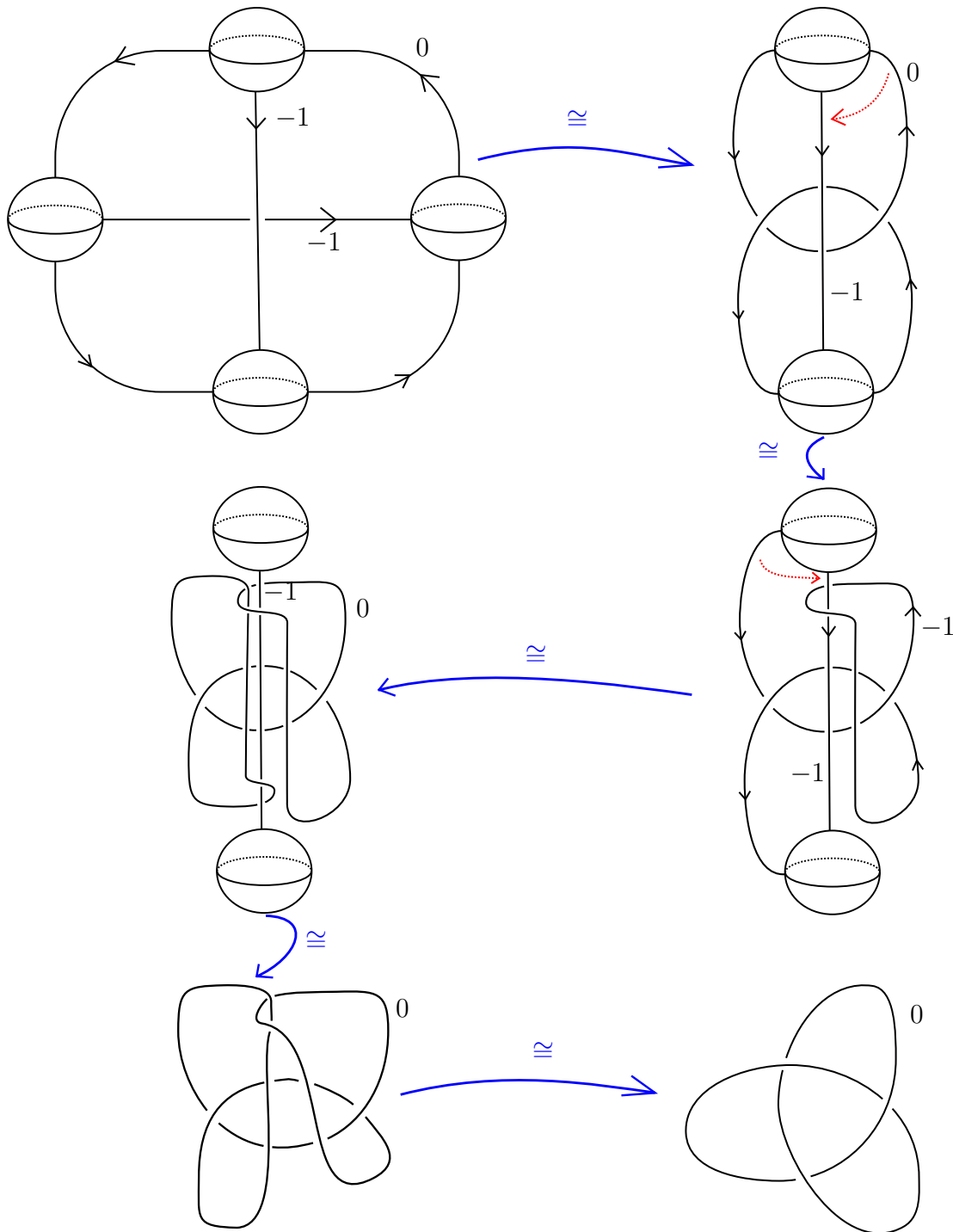


Abbildung 4.11: Von einer Genus-1-Lefschetz-Faserung über  $D^2$  zu einer Spitze

(4) Man kann aber auch  $n$  kritische Punkte erhalten, indem man zum Beispiel  $n$  2-Henkel anheftet, die alle über denselben 1-Henkel laufen, wie in Abbildung 4.12 oben links dargestellt.

Der erste Diffeomorphismus funktioniert genauso wie in Abbildung 4.7, im zweiten Schritt führt man dann  $n$  mal einen Slam-Dunk (siehe [16, Seite 163]) aus, anschließend führt man dieselben Schritte wie im ersten Diffeomorphismus wieder rückwärts aus. Die entstehende 4-Mannigfaltigkeit ist ein  $D^2$ -Bündel über  $T^2$  mit Eulerzahl  $n$  (siehe [16, Seiten 132-133]). Der Rand der obigen Lefschetz-Faserung ist also das  $S^1$ -Bündel über  $T^2$  mit Eulerzahl  $n$ . Hier kann man schon vermuten, dass diese Lefschetz-Faserung (für  $n = 2$ ) nicht diffeomorph zu der Lefschetz-Faserung mit zwei kritischen Punkten aus dem vorigen Beispiel ist, da sie verschiedene Ränder haben. Im nächsten Abschnitt wird dies bewiesen.

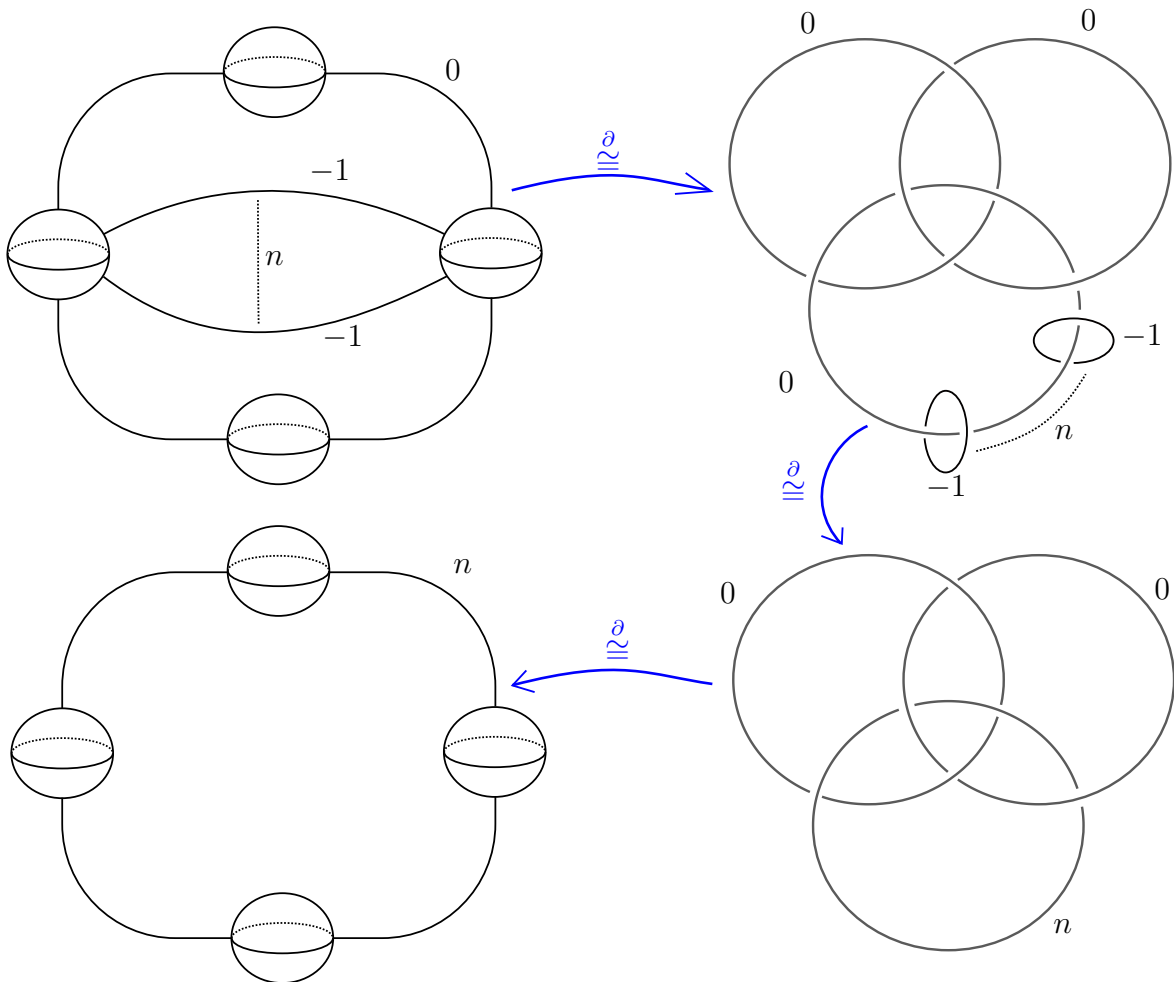


Abbildung 4.12: Eine Lefschetz-Faserung, deren Rand ein  $D^2$ -Bündel über  $T^2$  ist.

(5) Natürlich kann man die 2-Henkel auch entlang viel unregelmäßigerer Verschwindungskreise anheften, wie zum Beispiel in folgender Abbildung:

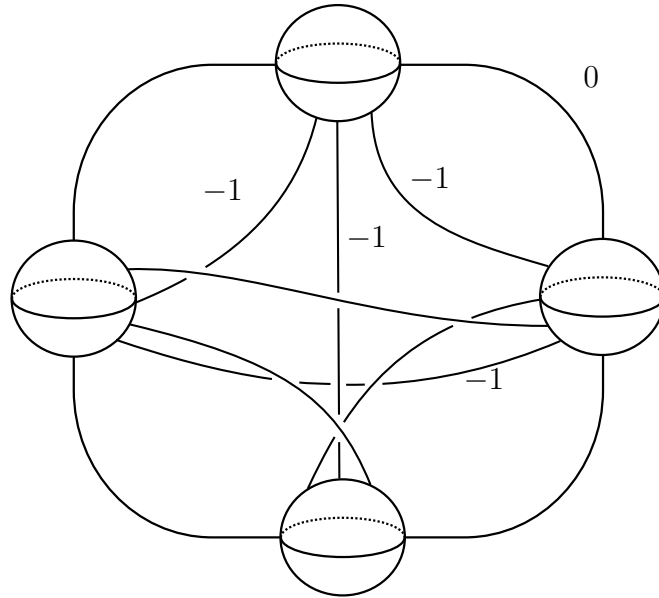


Abbildung 4.13: Eine weitere Genus-1-Lefschetz-Faserung über  $D^2$

## 4.2 Monodromie einer Lefschetz-Faserung über $D^2$

In diesem Abschnitt betrachtet man Lefschetz-Faserungen über  $D^2$ . Zuerst wird das Konzept der Monodromie einer Lefschetz-Faserung definiert und dann untersucht, wie man diese berechnet. Anschließend wird zu gegebener Monodromie eine zugehörige Lefschetz-Faserung konstruiert.

**Definition 4.7** (Monodromie einer Lefschetz-Faserung).

Sei  $f: W^4 \rightarrow D^2$  eine Lefschetz-Faserung. Dann liegen auf dem Rand  $\partial D^2 = S^1 \subset \mathbb{C}$  keine kritischen Werte, und nach Beispiel 4.3 (1) ist dann

$$f|_{f^{-1}(\partial D^2)}: f^{-1}(\partial D^2) \longrightarrow \partial D^2$$

ein Flächenbündel über  $S^1$ . Man definiert die **Monodromie der Lefschetz-Faserung**  $f$  als Monodromie dieses Flächenbündels über  $S^1$ , wobei die Fasern des Flächenbündels mit  $f^{-1}(1)$  identifiziert werden (siehe Definition 3.6 und folgende Bemerkungen und Beispiele).

**Beispiel 4.8**

Als erstes betrachtet man wieder eine Umgebung eines kritischen Punktes wie in Beispiel 4.3 (2) (siehe auch [1, Seiten 1-5]). Betrachte also die Abbildung

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (z, w) &\longmapsto z^2 + w^2. \end{aligned}$$

In Beispiel 4.3 hatten wir schon gesehen, dass die regulären Fasern alle diffeomorph zu einem Zylinder  $S^1 \times \mathbb{R}$  sind und die kritische Faser aus einem solchen Zylinder entsteht, indem man den Verschwindungskreis zu einem Punkt zusammenzieht.

Betrachte nun einen Kreis  $\gamma$  in  $\mathbb{C}$ , der einmal um den kritischen Wert 0 herumläuft:

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto e^{2\pi it} \end{aligned}$$

Die Monodromie der Lefschetz-Faserung

$$f|_{f^{-1}(D^2)}: f^{-1}(D^2) \rightarrow D^2$$

nennt man auch die **lokale Monodromie** des kritischen Punktes  $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ . Diese lokale Monodromie soll im Folgenden berechnet werden; dazu berechnet man, wie sich die Faser  $F_{\gamma(t)}$  ändert, wenn  $t$  von 0 bis 1 läuft. Betrachte dazu wieder (wie in Beispiel 4.3) die Riemannsche Fläche der Funktion

$$w = \sqrt{\gamma(t) - z^2}.$$

Wenn  $t$  wächst, drehen sich die beiden Verzweigungspunkte

$$z = \pm\sqrt{\gamma(t)} = \pm e^{\pi it}$$

in positiver Richtung um 0 herum und landen für  $t = 1$  bei dem jeweils anderen Verzweigungspunkt. Man erhält also eine Folge von Riemannschen Flächen wie in Abbildung 4.14.

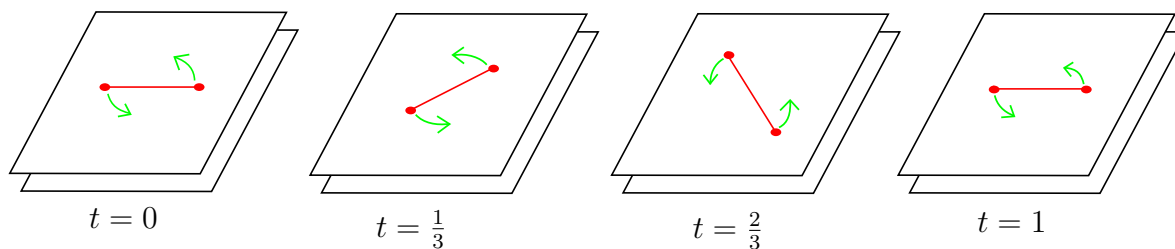


Abbildung 4.14: Die Folge der Riemannschen Flächen  $F_{\gamma(t)}$

Konstruiere nun eine (in  $t$  glatte) Familie von Diffeomorphismen

$$\Psi_t: F_{\gamma(0)} \longrightarrow F_{\gamma(t)}$$

mit  $\Psi_0 = \text{Id}$ . Dann ist  $\Psi_1 = \psi$  die lokale Monodromie des kritischen Punktes  $(0, 0)$ . (Diese Monodromie ist aber natürlich nur soweit eindeutig wie in Kapitel 3 beschrieben.) Zur Konstruktion dieser Familie von Diffeomorphismen wählt man sich zum Beispiel eine monoton fallende Abschneidefunktion  $\chi: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow [0, 1]$  (siehe Abbildung 4.15) mit

- $\chi(x) = 1$  für  $0 \leq x \leq 2$
- $\chi(x) = 0$  für  $3 \leq x$

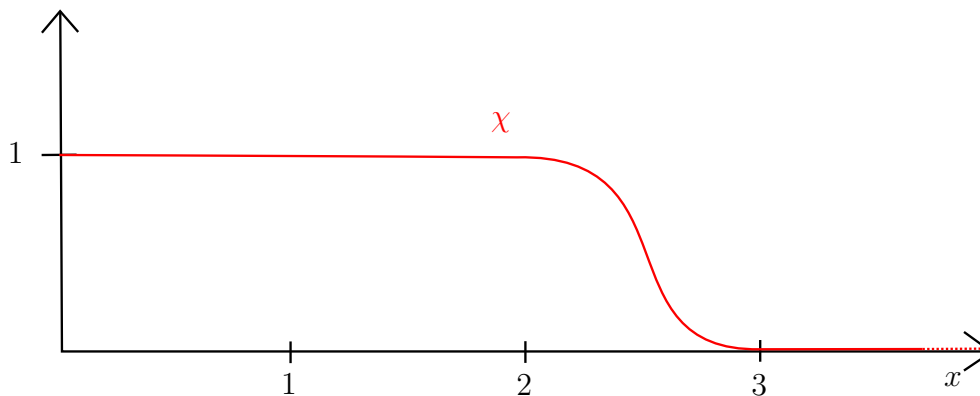


Abbildung 4.15: Die Abschneidefunktion  $\chi: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow [0, 1]$

und definiert

$$g_t: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto e^{\pi i t \chi(|z|)} z.$$

Dieser Diffeomorphismus erweitert dann zu dem gesuchten Diffeomorphismus

$$\Psi_t: F_{\gamma(0)} \longrightarrow F_{\gamma(t)}.$$

So erhält man also eine Darstellung der Monodromie  $\psi = \Psi_1: F_1 \rightarrow F_1$ . Um diese topologisch genauer zu verstehen, bemerkt man zuerst, dass  $\psi$  außerhalb der kompakten Menge  $\{|z| \leq 3\}$  die Identität ist. Um  $\psi$  auch im Inneren dieser kompakten Menge zu verstehen, betrachtet man die Wirkung von  $\psi$  auf zwei speziellen Kurven in  $F_1$ : Zum einen auf dem Verschwindungskreis  $C_1$  (siehe Beispiel 4.3), der den  $S^1$ -Faktor repräsentiert, wenn man  $F_1$  als  $S^1 \times \mathbb{R}$  auffasst, und zum anderen auf der Kurve  $D_1$ , die den  $\mathbb{R}$ -Faktor repräsentiert. Dabei soll  $D_1$  so orientiert sein, dass das Paar  $(C_1, D_1)$  die positive Orientierung von  $F_1$  liefert (siehe Abbildung 4.17). Auf diesen beiden Kurven wirkt  $\psi$  also wie in den folgenden Abbildungen dargestellt:

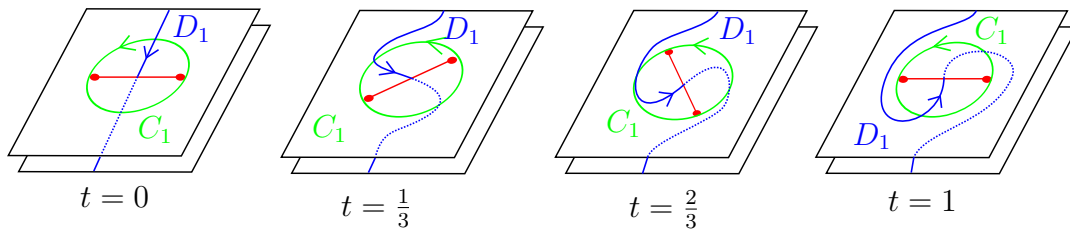


Abbildung 4.16: Die Monodromie in der Riemannschen Fläche  $F_\gamma(1)$

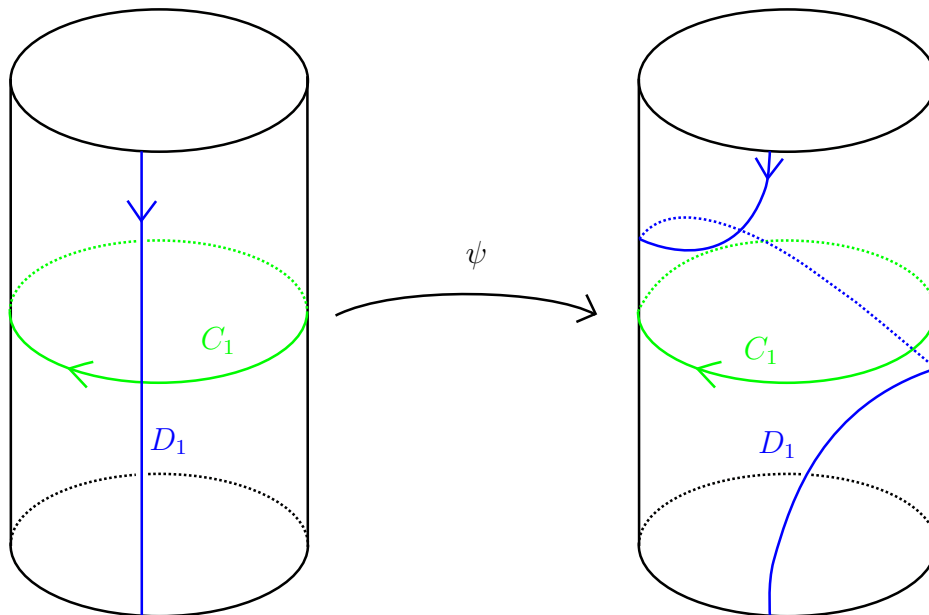


Abbildung 4.17: Die Monodromie in  $F_\gamma(1)$  aufgefasst als Zylinder  $S^1 \times \mathbb{R}$



Dies entspricht genau der Definition eines Dehn-Twists entlang des Verschwindekreises  $C_1$  (siehe Definition 3.22).

Führt man diese ganze Rechnung sorgfältig mit Orientierungen aus, dann sorgt die Orientierungsbedingung an die Karten in der Definition der Lefschetz-Faserungen dafür, dass jede lokale Monodromie einem linkshändigen Dehn-Twists entspricht (vergleiche Bemerkung 3.7 (3)). Lässt man diese Bedingung fallen, so kann man auch rechtshändige Dehn-Twists erhalten. Da hier aber hauptsächlich Lefschetzfaserungen betrachtet werden, deren reguläre Fasern Tori sind, macht dies meistens keinen großen Unterschied, da man auf Tori rechtshändige Dehn-Twist durch Komposition von linkshändigen Dehn-Twist und umgekehrt erhalten kann (siehe Korollar 3.26 und Beweis von Korollar 4.12).

Da nun jeder kritische Punkt einer Lefschetz-Faserung lokal so wie das obige Beispiel aussieht, erhält man sofort, dass die lokale Monodromie eines kritischen Punktes immer ein rechtshändiger Dehn-Twist entlang des Verschwindekreises ist. Wie man die (globale) Monodromie berechnet, zeigt der folgende Satz.

**Satz 4.9** (Berechnung der globalen Monodromie).

*Sei  $f: W^4 \rightarrow D^2$  eine Lefschetz-Faserung mit kritischen Punkten  $p_1, \dots, p_k \in W$  und zugehörigen kritischen Werten  $q_1, \dots, q_k \in D^2$ . Dann gilt (nach Umnummerierung) für die (globale) Monodromie  $\psi$  der Lefschetz-Faserung*

$$\psi = \psi_k \circ \dots \circ \psi_1,$$

*wobei  $\psi_i$  die (lokale) Monodromie zugehörig zu dem kritischen Punkt  $p_i$  ist, gegeben durch einen Dehn-Twist entlang des Verschwindekreises wie im obigen Beispiel.*

*Beweis.*

Zerteile die Fläche  $D^2 \subset \mathbb{C}$  durch Bögen  $b_1, \dots, b_{k-1}$  von  $1 \in \partial D^2 \subset \mathbb{C}$  zu verschiedenen anderen Randpunkten von  $D^2$ , die sich paarweise nur in 1 schneiden, so dass in jeder Komponente von  $D^2 \setminus \{b_1 \cup \dots \cup b_{k-1}\}$  genau ein kritischer Wert  $q_i$  liegt. Dabei seien die kritischen Werte  $q_i$  und die Bögen  $b_i$  so nummeriert, dass der Index  $i$  aufsteigt, wenn man gegen den Uhrzeigersinn in  $D^2$  um  $1 \in D^2$  herumläuft und so, dass der kritische Wert  $q_i$  zwischen den Bögen  $b_{i-1}$  und  $b_i$  liegt (also so wie in Abbildung 4.18).

Einschränkung dieser Lefschetz-Faserung auf die Urbilder der  $k$  Zusammenhangskomponenten von  $D^2 \setminus \{b_1 \cup \dots \cup b_{k-1}\}$  liefert  $k$  Lefschetz-Faserungen über  $k$  neuen Scheiben mit jeweils nur einem einzigen kritischen Wert. Sei nun  $\psi_i$  die Monodromie der Lefschetz-Faserung zugehörig zum kritischen Wert  $q_i$ , dann gilt für die Monodromie  $\psi$  der gesamten

Lefschetz-Faserung (siehe Abbildung 4.19)

$$\psi = \psi_k \circ \cdots \circ \psi_1.$$

Und nach dem vorigen Beispiel ist jede lokale Monodromie  $\psi_i$  gegeben durch einen (linkshändigen) Dehn-Twist. □

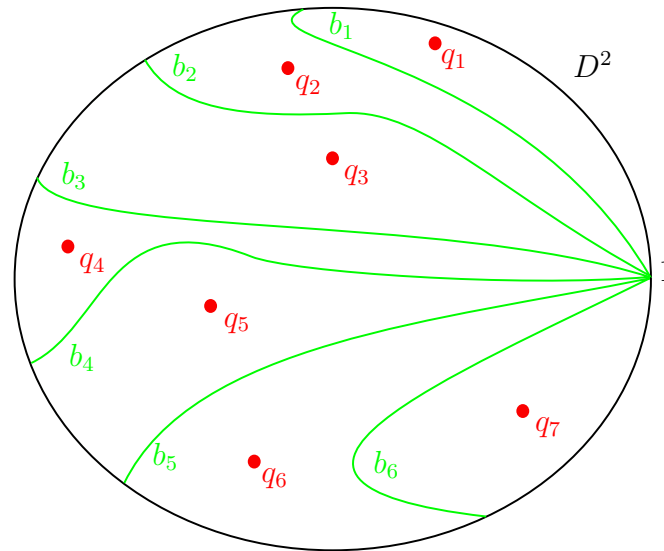


Abbildung 4.18: Eine Zerteilung von  $D^2$  durch Bögen  $b_i$  im Fall  $k = 7$

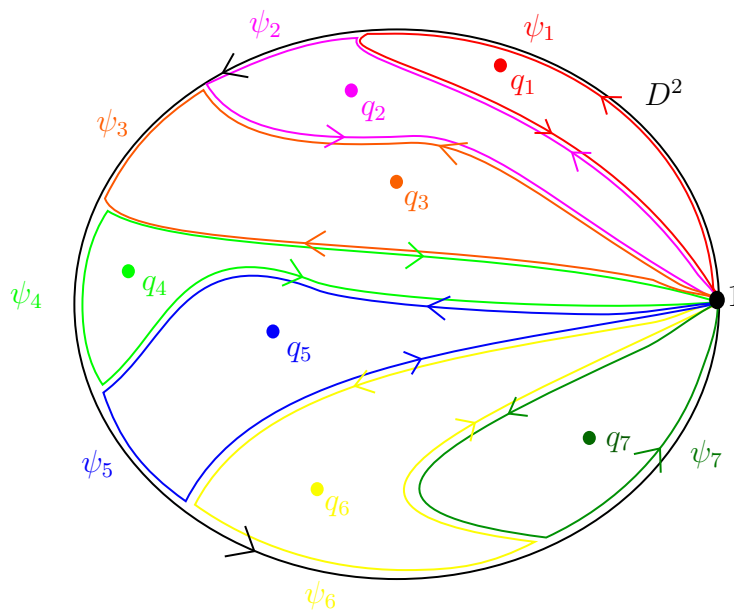


Abbildung 4.19: Berechnung der globalen Monodromie durch die lokale Monodromie

**Bemerkung 4.10**

Diese Darstellung der Monodromie hängt nicht nur von der gewählten Identifikation der Faser ab, sondern auch ganz entscheidend von der Wahl der Bögen  $b_i$  (siehe zum Beispiel Abbildung 4.20 für eine andere Wahl der Bögen).

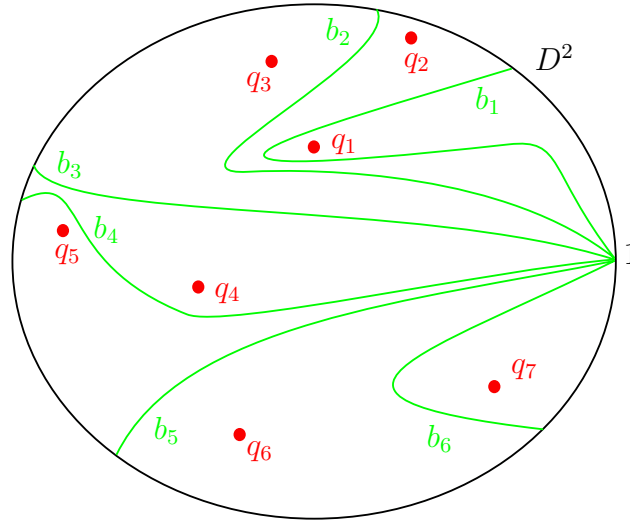


Abbildung 4.20: Eine andere Zerteilung von  $D^2$  durch Bögen  $b_i$  im Fall  $k = 7$

Man kann sich auch genau überlegen, welchen Effekt die Wahl dieser Bögen auf die Darstellung der oben gewählten Monodromie hat. Dies führt zu sogenannten Elementartransformationen, einer Menge von Bewegungen dieser Bögen und entsprechenden Änderungen der Monodromie, die äquivalente Lefschetz-Faserungen beschreiben (siehe dafür [16, Seiten 297-298]). In dieser Arbeit ist aber nur entscheidend, dass man jede Monodromie einer Lefschetz-Faserung als Komposition von Dehn-Twists schreiben kann.

**Beispiel 4.11**

(1) Betrachte die Genus-1-Lefschetz-Faserung über  $D^2$  mit nur einem kritischen Punkt aus Beispiel 4.6 (2). Die Monodromie dieser Lefschetz-Faserung ist dann nach dem vorigen Satz ein (linkshändiger) Dehn-Twist entlang des Verschwindekreises  $C$  (gegeben durch die Anklebesphäre des 2-Henkels mit Rahmung  $-1$ ). Dies kann man hier auch explizit sehen. Die Monodromie dieser Lefschetz-Faserung ist per Definition die Monodromie des berandenden Torusbündels über  $S^1$ ; deswegen ist es für diese Rechnung hilfreich, das Kirby-Diagramm aus Abbildung 4.8 als Diagramm für die berandende 3-Mannigfaltigkeit zu lesen. Bevor der 2-Henkel entlang  $C$  angeheftet wird, liefert dieses Kirby-Diagramm den 3-Torus  $T^3$  als triviales  $T^2$ -Bündel über  $S^1$  (siehe Beispiel 4.6 (1)). Der Verschwindekreis  $C$  liegt vollständig in einer Torusfaser  $T_0$ . Sei nun  $V$  ein Volltorus

mit Seele  $C$  und bezeichne mit  $\mu$  den Meridian und mit  $\lambda$  eine Longitude von  $\partial V$ . Dabei soll  $V$  so gewählt sein, dass die Longitude  $\lambda$  komplett in einer Torusfaser  $T_1$  liegt. Dabei soll die Torusfaser  $T_1$  im Bild über der Torusfaser  $T_0$  liegen. Damit repräsentiert  $\lambda$  die 0-Rahmung des Verschwindekreises  $C$ . Weiter wählt man  $V$  so, dass eine ganze Umgebung  $\lambda \times I \subset \partial V$  von  $\lambda$  in  $\partial V$  komplett in der Torusfaser  $T_1$  liegt (siehe auch Abbildung 4.21).

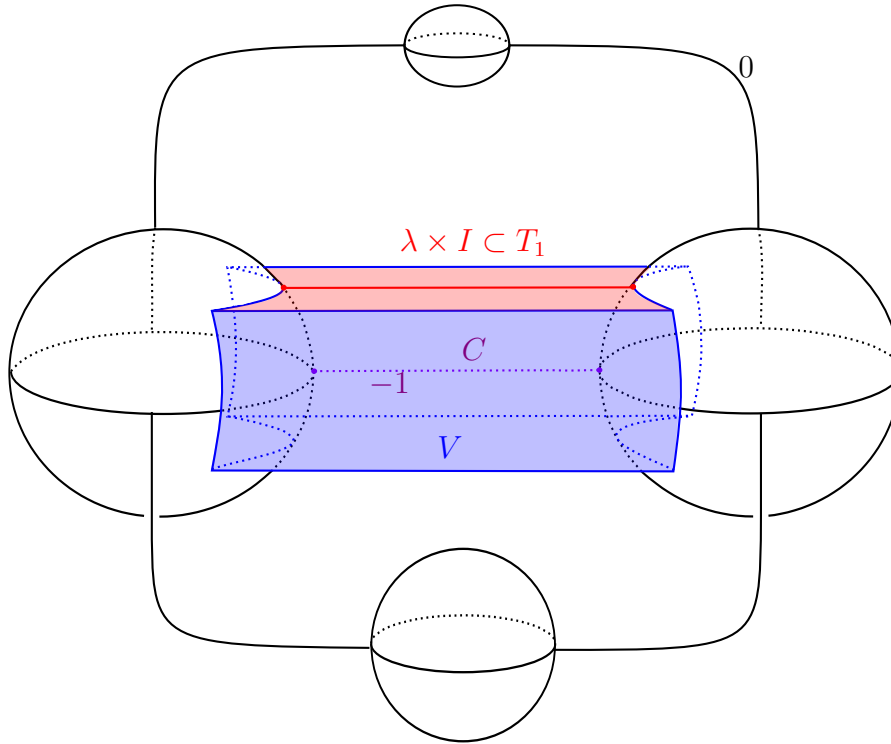


Abbildung 4.21: Wahl der Torusumgebung  $V$  des Verschwindekreises  $C$

Führt man nun die  $-1$  Chirurgie entlang  $C$  aus, so schneidet man das Innere des Volltorus  $V$  heraus und klebt einen neuen Volltorus  $S^1 \times D^2$  wieder herein (siehe auch Kapitel 5). Dabei kann man den Anklebediffeomorphismus so wählen, dass er auf  $\partial V \setminus (\lambda \times I)$  die Identität ist und innerhalb von  $\lambda \times I$  auf Homologieebene wirkt wie

$$\begin{aligned}\mu_0 &\longmapsto \mu - \lambda \\ \lambda_0 &\longmapsto \lambda,\end{aligned}$$

wobei  $\mu_0$  und  $\lambda_0$  Meridian und Longitude von  $S^1 \times D^2$  sind wie in Kapitel 5 erklärt. Die Anklebeabbildung ist also durch einen (linkshändigen) Dehn-Twist entlang  $\lambda$  gegeben und da  $\lambda$  die 0-Rahmung von  $C$  repräsentiert, ist die Monodromie die-

ser Lefschetz-Faserung durch einen Dehn-Twist entlang  $C$  gegeben. Der Rand dieser Lefschetz-Faserung ist also diffeomorph zu dem Torusbündel über  $S^1$  mit Monodromie gegeben durch  $T$ .

(2) Ist eine allgemeine Lefschetz-Faserung wie zum Beispiel die aus Beispiel 4.6 (5) gegeben, kann man ähnlich vorgehen. Man beginnt mit einer regulären Faser, die in der Skizze weit hinter den Verschwindekreisen liegt, und bewegt sich nun durch alle Chirurgen mit Rahmung  $-1$  hindurch bis nach unendlich und dann zurück in die ursprüngliche reguläre Faser. Jede dieser Chirurgen liefert dann einen (linkshändigen) Dehn-Twist entlang des entsprechenden Verschwindekreises, wie im vorigen Beispiel beschrieben. Dies liefert einen weiteren Beweis von Satz 4.9 (im Genus-1-Fall). Im folgenden Korollar wird sogar gezeigt, dass man auf diese Art und Weise jedes Torusbündel über  $S^1$  als Rand einer Genus-1-Lefschetz-Faserung über  $D^2$  erhalten kann.

**Korollar 4.12.**

*Zu jeder Matrix  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$  existiert eine Genus-1-Lefschetz-Faserung  $W$  über  $D^2$ , so dass das Torusbündel  $T_A^3$  über  $S^1$  der orientierte Rand  $\partial W$  ist.*

*Beweis.*

Sei  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$  eine beliebige Matrix. Nach Korollar 3.26 und der folgenden Bemerkung kann man  $A$  als positives Wort in  $R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  und  $T^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  schreiben. Betrachte nun erneut das Kirby-Diagramm von  $T^2 \times D^2$  aus Beispiel 4.6 (1) und identifiziere die Torusfasern mit  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  durch Wahl von Meridian  $\mu$  und Longitude  $\lambda$  wie in Abbildung 4.22.

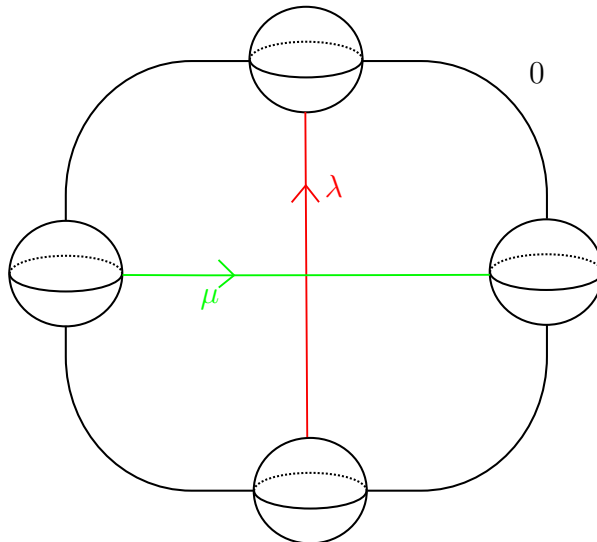


Abbildung 4.22: Identifikation der Torusfasern mit  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$

Dann ist die Monodromie der Lefschetz-Faserung aus Beispiel 4.11 (1) durch  $T \in SL_2(\mathbb{Z})$  gegeben. Genauso ist die Monodromie der Genus-1-Lefschetz-Faserung über  $D^2$  aus Abbildung 4.23 durch  $R^{-1} \in SL_2(\mathbb{Z})$  gegeben.

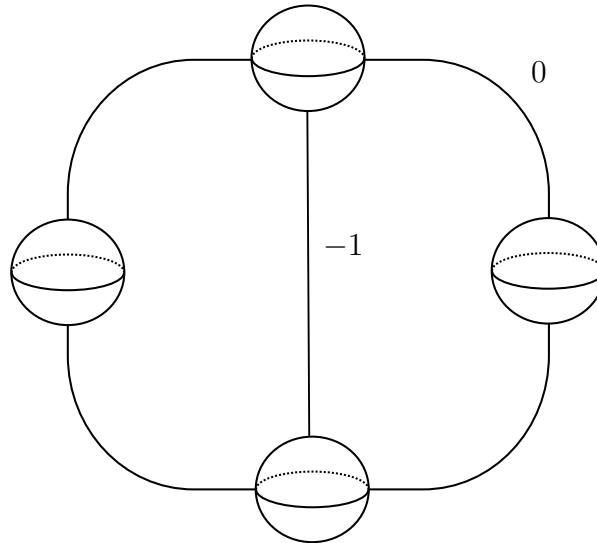


Abbildung 4.23: Eine Genus-1-Lefschetz-Faserung über  $D^2$  mit Monodromie  $R^{-1}$

Dann ist zum Beispiel die Monodromie der Spitze (siehe Beispiel 4.6 (3)) gegeben durch  $TR^{-1}$ . Andersherum kann man nun zu jeder Darstellung von  $A$  als positives Wort in  $T$  und  $R^{-1}$  so 2-Henkel mit Rahmung  $-1$  an  $T^2 \times D^2$  anheften, dass die entstehende Genus-1-Lefschetz-Faserung über  $D^2$  Monodromie  $A$  hat.  $\square$

**Beispiel 4.13**

(1) In Beispiel 4.6 (1) hatten wir schon gesehen, dass die triviale Lefschetz-Faserung  $T^2 \times D^2$  als Rand das triviale Torusbündel  $T^3$  hat. Wenn man den Beweis des vorigen Korollars genauer betrachtet, erkennt man aber, dass sofort ein Algorithmus geliefert wird, um für beliebige Torusbündel Lefschetz-Faserungen zu konstruieren.

(2) Im vorigen Beweis haben wir schon gesehen, dass die Lefschetz-Faserung aus Beispiel 4.6 (4) als Rand das Torusbündel  $T_{T^n}^3$  hat. In diesem Beispiel hatten wir auch nachgerechnet, dass dieses Torusbündel diffeomorph zu dem  $S^1$ -Bündel über  $T^2$  mit Eulerzahl  $n$  ist.

(3) Die Lefschetz-Faserung aus Beispiel 4.6 (3) mit zwei kritischen Punkten hat als Rand das Torusbündel  $T_{TR^{-1}}^3$ . Dies zeigt insbesondere, dass diese Lefschetz-Faserung nicht diffeomorph zu der Lefschetz-Faserung aus Beispiel 4.6 (4) (für  $n = 2$ ) ist. Es gibt also verschiedene Lefschetz-Faserungen mit zwei kritischen Punkten.

### 4.3 Lefschetz-Faserungen und symplektische Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt soll die Verbindung von Lefschetz-Faserungen zu symplektischen Mannigfaltigkeiten gezogen werden. Relativ schnell sieht man, dass bestimmte orientierbare 4-Mannigfaltigkeiten keine symplektischen Strukturen zulassen.

#### Beispiel 4.14

Zum Beispiel trägt  $S^4$  **keine** symplektische Struktur. Dies sieht man zum Beispiel per Widerspruch. Angenommen  $\omega$  wäre eine symplektische Struktur auf  $S^4$ , dann folgt aus  $H_{dR}^2(S^4) = \{0\}$  und weil  $\omega$  geschlossen ist, dass es eine 1-Form  $\lambda$  gibt, so dass  $d\lambda = \omega$  gilt. Weil  $\omega^2$  eine Volumenform ist, folgt mit Satz von Stokes (und wieder wegen  $d\omega = 0$ )

$$0 \neq \int_{S^4} \omega^2 = \int_{S^4} (d\lambda) \wedge \omega = \int_{S^4} d(\lambda \wedge \omega) = 0.$$

Wenn man sich dieses Beispiel genauer ansieht, erkennt man, dass dieses Argument für alle geschlossenen, orientierbaren 4-Mannigfaltigkeiten  $W$  mit  $H_{dR}^2(W) = \{0\}$  gilt und erhält so folgendes Korollar.

#### Korollar 4.15.

*Eine geschlossene, orientierbare 4-Mannigfaltigkeit  $W$  mit  $H_{dR}^2(W) = \{0\}$  lässt **keine** symplektische Struktur zu.*

Die nächste natürliche Frage wäre, ob es weitere topologische Einschränkungen an 4-Mannigfaltigkeiten für die Existenz einer symplektischen Form gibt. In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass die Frage, wann eine 4-Mannigfaltigkeit eine symplektische Struktur trägt, sehr eng damit verbunden ist, wann diese 4-Mannigfaltigkeit die Struktur einer Lefschetz-Faserung zulässt. Das erste (und für uns wichtigste Resultat) in diese Richtung ist der folgende Satz.

#### Satz 4.16 (Symplektischer Faserungssatz von Gompf-Thurston).

*Sei  $f: W \rightarrow \Sigma$  eine Lefschetz-Faserung auf einer geschlossenen Mannigfaltigkeit  $W$  oder sei  $f: W \rightarrow \Sigma$  eine Lefschetz-Faserung ohne separierende Verschwindekreise auf einer kompakten Mannigfaltigkeit  $W$  und  $[F]$  die reelle Homologieklassse einer regulären Faser. Dann besitzt  $W$  eine symplektische Struktur  $\omega$ , sodass  $\omega$  auf den regulären Fasern eine Volumenform ist genau dann, wenn  $[F] \neq 0$  in  $H_2(W; \mathbb{R})$  ist.*

*Beweisidee.* (für genauen Beweis siehe [16, Satz 10.2.18])

Die Hinrichtung ist einfach. Wenn  $W$  eine symplektische Struktur  $\omega$  trägt, die auf den regulären Fasern eine Volumenform ist, dann gilt  $[\omega]([F]) > 0$ , also gilt  $[F] \neq 0$  in  $H_2(W; \mathbb{R})$ .

Die Rückrichtung ist komplizierter. Im ersten Schritt zeigt man, dass es eine geschlossene 2-Form  $\zeta$  auf  $W$  gibt, so dass  $[\zeta]([\tilde{F}]) > 0$  für jede geschlossene Fläche  $\tilde{F}$  in einer Faser von  $f: W \rightarrow \Sigma$  gilt.

Wenn es keine separierenden Verschwindekreise gibt, dann gilt für jede geschlossene Fläche  $\tilde{F}$  in einer Faser  $F$ , dass die Homologieklassen gleich sind, das heißt  $[\tilde{F}] = [F] \neq 0$ . Also existiert ein  $a \in H_{dR}^2(W)$ , so dass  $a([\tilde{F}]) > 0$  ist. Dann kann man  $\zeta$  so wählen, dass  $[\zeta] = a$  gilt.

Wenn es jedoch separierende Verschwindekreise gibt, dann wird die singuläre Faser in mehrere Komponenten geteilt. Wenn  $W$  dann geschlossen ist, kann man mittels Poincaré-Dualität das obige  $a$  so modifizieren, dass die Aussage trotzdem erfüllt ist (siehe dafür [16, Lösung von Aufgabe 10.2.19]).

Weil man  $f$  in der Umgebung der kritischen Punkte kennt, kann man im zweiten Schritt Volumenformen  $\omega_y$  auf  $F_y := f^{-1}(y)$  konstruieren, so dass  $[\omega_y] = [\zeta|_{F_y}]$  in  $H_{dR}^2(F_y)$  gilt. Im dritten Schritt erweitert man diese 2-Formen  $\omega_y$  zu geschlossenen 2-Formen  $\eta_y$  auf Umgebungen  $W_y$  von  $F_y$  in  $W$ , indem man  $\omega_y$  entlang eines starken Deformationsretraktes  $W_y \rightarrow F_y$  zurückzieht.

Für diese 2-Formen gilt dann  $[\eta_y] = [\zeta|_{W_y}]$  in  $H_{dR}^2(W_y)$ . Also existiert eine 1-Form  $\theta_y$  mit  $d\theta_y = \eta_y - \zeta|_{W_y}$ . Da nun  $W$  kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung  $\{W_{y_i}\}_{i=1}^n = W$  von  $\{W_y\}_{y \in \Sigma} = W$ . Sei  $\{\rho_i\}$  eine zu  $\{f(W_{y_i})\}_{i=1}^n = \Sigma$  gehörige Zerlegung der Eins. Dann setze auf  $W$

$$\eta := \zeta + d\left(\sum_{i=1}^n (\rho_i \circ f)\theta_{y_i}\right).$$

Man rechnet sofort nach, dass  $\eta$  geschlossen ist und auf jeder Faser eine Volumenform liefert. Sei nun  $\omega_\Sigma$  eine Volumenform von  $\Sigma$ . Dann setze für  $\varepsilon > 0$

$$\omega_\varepsilon := \varepsilon\eta + f^*\omega_\Sigma.$$

Auch hier rechnet man sofort nach, dass  $\omega_\varepsilon$  geschlossen ist. Da man weiter  $f$  in der Umgebung der kritischen Punkte kennt, kann man zeigen, dass  $\omega_\varepsilon$  für  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein auch nicht-degeneriert ist und somit eine symplektische Form auf  $W$  liefert (siehe [16, Proposition 10.2.20]).  $\square$



**Bemerkung 4.17**

(1) Die Bedingung  $[F] \neq 0$  in  $H_2(W; \mathbb{R})$  kann man im Allgemeinen nicht weglassen. Zum Beispiel kann man (mittels der Hopf-Faserung)  $S^1 \times S^3$  als Torusbündel über  $S^2$  schreiben, wegen  $H_{dR}^2(S^1 \times S^3) = \{0\}$  trägt  $S^1 \times S^3$  aber keine symplektische Struktur (siehe Korollar 4.15).

(2) Man kann aber zeigen, dass dieses Problem nur für Genus-1-Lefschetz-Faserungen auftreten kann und ansonsten automatisch  $[F] \neq 0$  erfüllt ist (siehe dafür zum Beispiel [16, Lösung von Aufgabe 8.4.15(b)]).

(3) Für Genus-1-Lefschetz-Faserungen über  $D^2$  (auf die wir diesen Satz im nächsten Abschnitt anwenden wollen) kann man auch nachrechnen, dass  $[F] \neq 0$  gilt (siehe Beweis von Satz 4.19(1)).

Für diese Arbeit ist eigentlich nur das obige Resultat wichtig, der Vollständigkeit halber aber noch die andere Richtung.

**Satz 4.18** (Symplektischer Faserungssatz von Donaldson).

*Jede symplektische Mannigfaltigkeit  $(W, \omega)$  besitzt nach (mehrmaligem) **Aufblasen** (das heißt die verbundene Summe mit  $\overline{\mathbb{C}P^2}$  nehmen) die Struktur einer Lefschetz-Faserung.*

*Beweis.* siehe [16, Satz 10.2.25] oder [28, Satz 10.1.6] □

## 4.4 Die schwache Füllbarkeit der Torusbündel

In Korollar 4.12 wurde gezeigt, dass man zu jedem Torusbündel  $T_A^3$  eine Lefschetz-Faserung über  $D^2$  konstruieren kann, so dass das Torusbündel  $T_A^3$  der orientierte Rand dieser Lefschetz-Faserung ist. Mit dem symplektischen Faserungssatz 4.16 von Gompf-Thurston kann man nun eine symplektische Struktur auf diesen Lefschetz-Faserungen konstruieren, so dass diese symplektischen Mannigfaltigkeiten dann schwache symplektische Füllungen von  $(T_A^3, \xi_n)$  liefern.

**Korollar 4.19** (Schwache Füllbarkeit von Torusbündeln über  $S^1$ ).

(1) *Zu jeder Matrix  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$  existiert eine kompakte symplektische Mannigfaltigkeit  $(W, \omega)$ , sodass das Torusbündel  $T_A^3$  über  $S^1$  der orientierte Rand  $\partial W$  ist und  $\omega$  auf jeder Torusfaser von  $T_A^3$  eine Volumenform ist.*

(2) *Für jede Matrix  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$  und jedes  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  ist die Kontaktmannigfaltigkeit  $(T_A^3, \xi_n)$  schwach symplektisch füllbar. Die schwache symplektische Füllung ist gegeben durch die symplektische Mannigfaltigkeit  $(W, \omega)$  aus dem ersten Teil des Satzes.*

*Beweis.*

(1) Korollar 4.12 liefert eine Lefschetz-Faserung  $f: W \rightarrow D^2$ , so dass  $T_A^3$  der orientierte Rand von  $W$  ist. Um jetzt eine symplektische Struktur auf  $W$  zu bekommen, möchte man den symplektische Faserungssatz 4.16 von Gompf-Thurston benutzen. Dazu muss man zuerst die Homologie von  $W$  genauer verstehen.

Nach Korollar 4.5 entsteht  $W$  aus dem trivialen Bündel  $T^2 \times D^2$  durch Anheften von  $k$  2-Henkeln jeweils mit Rahmung  $-1$  (wobei  $k$  die Anzahl der kritischen Punkte ist).  $W$  besteht also aus einem 0-Henkel, zwei 1-Henkeln und  $k + 1$  2-Henkeln. Im Beweis von Korollar 4.12 hat man weiter gesehen, dass diese 2-Henkel so gewählt werden können, dass sie jeweils genau einmal über genau einen 1-Henkel laufen. Ein Kirby-Diagramm von  $W$  ist also von folgender Form:

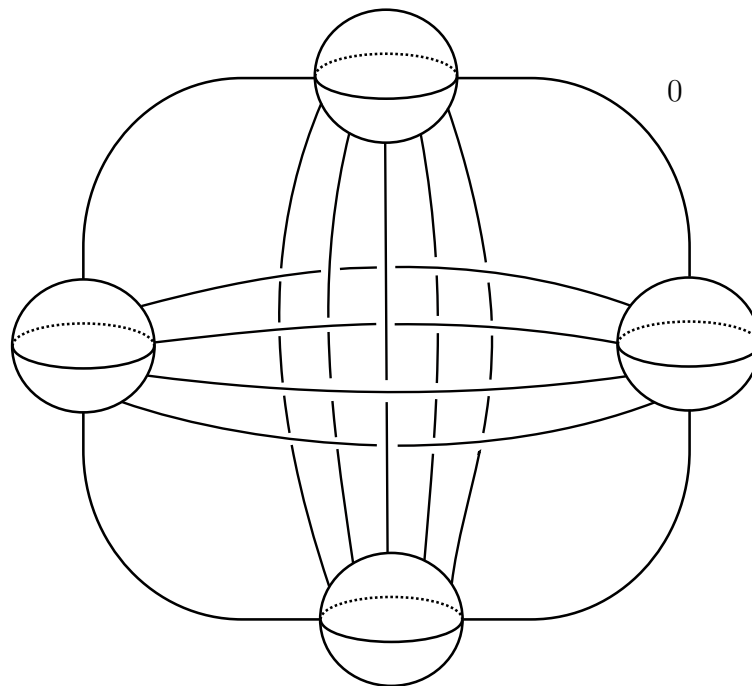


Abbildung 4.24: Eine Genus-1-Lefschetz-Faserung über  $D^2$

Hiermit kann man nun die Homologie von  $W$  berechnen (siehe auch [16, Seite 111]). Speziell ist man an der zweiten Homologiegruppe über  $\mathbb{R}$  interessiert; deswegen wird hier über  $\mathbb{R}$  gearbeitet. Die Kettengruppen werden erzeugt von den Henkeln mit entsprechendem Index (genauer von dem Kern des Henkel verklebt mit einer Scheibe von

entsprechender Dimension). Die Kettengruppen sind also

$$\begin{aligned} C_0(W) &= \mathbb{R}, \\ C_1(W) &= \mathbb{R}^2, \\ C_2(W) &= \mathbb{R}^{k+1} \text{ und} \\ C_3(W) &= 0 = C_4(W). \end{aligned}$$

(Hier sieht man übrigens auch, dass die Eulercharakteristik  $\chi(W) = k$  ist und man darüber die Anzahl der kritischen Punkte bestimmen kann.) Die dritte Randabbildung  $\partial_3: C_3(W) \rightarrow C_2(W)$  ist also die Nullabbildung, und damit ist die zweite Homologiegruppe gegeben durch

$$H_2(W) = \ker \partial_2.$$

Die zweite Randabbildung muss also genauer verstanden werden. Nach [16, Seite 111] ist diese gegeben durch

$$\begin{aligned} \partial_2: C_2(W) &\rightarrow C_1(W) \\ h_j^2 &\mapsto \sum_{i=1}^2 (B_i \bullet A_j) h_i^1, \end{aligned}$$

wobei  $B_i \bullet A_j$  die Schnittzahl der Anklebesphäre  $A_j$  des 2-Henkels  $h_j^2$  mit der Gürtelsphäre  $B_i$  des 1-Henkels  $h_i^1$  bezeichnet. Sei  $h_0^2$  der 2-Henkel, der mit Rahmung 0 angeheftet wird, und  $h_1^2, \dots, h_k^2$  die 2-Henkel, die mit Rahmung  $-1$  angeheftet werden. Dann gilt

$$\begin{aligned} h_0^2 &\mapsto \underbrace{(B_1 \bullet A_0)}_{=+1-1} h_1^1 + \underbrace{(B_2 \bullet A_0)}_{=+1-1} h_2^1 = 0 \text{ und} \\ h_j^2 &\mapsto \pm h_i^1 \text{ für ein } i \in \{1, 2\} \text{ und } j = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Also gilt

$$H_2(W) = \ker \partial_2 \supset \mathbb{R},$$

erzeugt vom 2-Henkel  $h_0^2$  oder genauer der Fläche gegeben durch den Kern dieses 2-Henkels verklebt mit einer Seifert-Fläche des Knotens, also genau der regulären Torusfaser  $T_0$ . Insbesondere ist die Homologieklassse  $[F] = [T_0]$  einer regulären Faser ungleich Null in  $H_2(W; \mathbb{R})$ . Da weiter jeder Verschwindekreis über einen 1-Henkel läuft (siehe Abbildung 4.24), ist jeder Verschwindekreis nicht-separierend, und somit liefert der symplektische Faserungssatz 4.16 von Gompf-Thurston dann eine symplektische Struktur  $\omega$

auf  $W$ , die auf jeder regulären Torusfaser eine Volumenform ist.

(2) Um nun zu zeigen, dass  $(W, \omega)$  wirklich eine schwache symplektische Füllung von  $(T_A^3, \xi_n)$  ist, geht man ähnlich wie in Beispiel 2.38 (3) vor. Sei

$$\alpha_n = \lambda(t) \left( \cos \varphi(t) dx - \sin \varphi(t) dy \right)$$

eine Kontaktform von  $\xi_n$  auf  $T_A^3$  (siehe Bemerkung 3.37 (1)). Betrachte für  $s \in [0, 1]$  die glatte Familie von 1-Formen

$$\alpha_n^s = s dt + (1 - s) \alpha_n = s dt + (1 - s) \lambda(t) \left( \cos \varphi(t) dx - \sin \varphi(t) dy \right).$$

Dann gilt:

$$\alpha_n^s \wedge d\alpha_n^s = s(1 - s) dt \wedge d\alpha_n + (1 - s)^2 \alpha_n \wedge d\alpha_n = (1 - s)^2 \alpha_n \wedge d\alpha_n$$

Für  $s \in [0, 1)$  ist  $\xi_n^s = \ker \alpha_n^s$  also eine glatte Familie von Kontaktstrukturen auf  $T_A^3$ . Mittels Gray-Stabilität (Satz 2.7) folgt, dass für  $s \in [0, 1)$  die Kontaktmannigfaltigkeiten  $(T^3, \xi_n^s)$  alle kontaktomorph zu  $(T_A^3, \xi_n^0 = \xi_n)$  sind. Um zu zeigen, dass  $(W, \omega)$  eine schwache symplektische Füllung von  $(T_A^3, \xi_n)$  ist, reicht es also wieder aus, dies für eine der Kontaktstrukturen  $\xi_n^{s_0}$  mit  $s_0 \in [0, 1)$  zu zeigen. Dazu bemerke man, dass

$$\xi_n^s \xrightarrow{s \rightarrow 1} \ker dt.$$

Da die Tangentialräume der Fasern durch  $\ker dt$  gegeben sind, auf denen die symplektische Form  $\omega$  ein Volumenform ist, folgt

$$\omega|_{\xi_n^1} = \omega|_{\ker dt} > 0.$$

Da Letzteres eine offene Bedingung ist, gilt für  $s_0 \in [0, 1)$  nahe bei 1

$$\omega|_{\xi_n^{s_0}} > 0.$$

$(W, \omega)$  ist also eine schwache symplektische Füllung von  $(T_A^3, \xi_n)$ . □

Hiermit ist der Teil über die schwache symplektische Füllbarkeit im Füllbarkeitssatz von Ding-Geiges abgeschlossen.

# 5 Kontakt-Dehn-Chirurgie und die starke Füllbarkeit

In diesem Kapitel soll die Kontakt-Dehn-Chirurgie definiert werden (wie sie in [4] eingeführt wurde), das heißt Dehn-Chirurgie an einem Legendre-Knoten in einer Kontaktmannigfaltigkeit, so dass die entstehende Mannigfaltigkeit wieder eine Kontaktstruktur trägt und diese außerhalb einer Tubenumgebung des Knotens wie die alte Kontaktstruktur aussieht. Dabei wird das Hauptwerkzeug die Theorie konvexer Flächen aus Abschnitt 2.8 sein.

Zuerst wird in Abschnitt 1 kurz das topologische Konzept einer Dehn-Chirurgie wiederholt, um dies dann im zweiten Abschnitt auf den Kontaktfall zu erweitern. Im Anschluss werden einige fundamentale Sätze über oder mit Kontakt-Dehn-Chirurgie angegeben und im nächsten Abschnitt dann einige einfache Beispiele und Anwendungen dieser Ergebnisse vorgestellt. Insbesondere werden dort auch virtuell überdrehte Kontaktstrukturen und stark füllbare Kontaktstrukturen auf Torusbündeln konstruiert. In Abschnitt 4 wird dann der Teil über die starke Füllbarkeit der Torusbündel aus dem Füllbarkeitssatz von Ding-Geiges bewiesen. Im Anschluss wird noch ein Algorithmus angegeben, um ein mögliches  $n(A)$  aus dem Füllbarkeitssatz von Ding-Geiges zu bestimmen. Weiter wird noch gezeigt, dass auf einigen Torusbündeln die Kontaktstrukturen  $\xi_1$  stark symplektisch füllbar sind. Die Grundlagen für das ganze Kapitel sind [4] und [25].

## 5.1 Topologische Dehn-Chirurgie

Zuerst werden einige Grundkonzepte der topologischen Dehn-Chirurgie für dreidimensionale Mannigfaltigkeiten wiederholt. (Für genauere Informationen darüber siehe [29, Kapitel 6] oder [30, Kapitel 9].)

Betrachte einen Knoten  $K$  in einer orientierten dreidimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$ . Sei  $\nu K$  eine Tubenumgebung von  $K$  in  $M$ . (Dann ist  $\nu K$  diffeomorph zu einem Volltorus  $S^1 \times D^2$ .) Auf dem Rand dieser Tubenumgebung gibt es nun zwei spezielle Kurven:

- Den **Meridian**  $\mu$ : Eine einfach geschlossene Kurve auf  $\partial(\nu K) (\cong S^1 \times S^1)$ , welche einen Erzeuger von  $H_1(\partial(\nu K); \mathbb{Z})$  repräsentiert, aber in  $\nu K$  null-homolog ist.
- Die **Longitude**  $\lambda$ : Eine einfach geschlossene Kurve auf  $\partial(\nu K)$ , die  $\mu$  transversal in genau einem Punkt schneidet.

Dabei sollen die beiden Kurven so orientiert sein, dass das Paar  $(\mu, \lambda)$  die positive Orientierung von  $\partial(\nu K)$  in  $M$  liefert. (Mit der Regel: Äußere Normale zuerst.) Man kann nun zeigen, dass diese Bedingungen den Meridian  $\mu$  bis auf Isotopie festlegen. Doch die Longitude  $\lambda$  ist dadurch noch **nicht** eindeutig bestimmt. Für eine gegebene Longitude  $\lambda$  sind weitere Longituden durch  $\tilde{\lambda} = \lambda + n\mu$  gegeben, wobei  $n \in \mathbb{Z}$ .

Sei nun  $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  mit  $p, q$  koprim und  $g: \partial(S^1 \times D^2) \rightarrow \partial(\nu K)$  ein Diffeomorphismus mit

$$\{*\} \times S^1 =: \mu_0 \xrightarrow{g} p\mu + q\lambda.$$

(Dabei bedeutet  $r = \infty$ , dass  $p = \pm 1$  und  $q = 0$  ist.) Dann definiere

$$M' := \left( \overline{M \setminus (\nu K)} + (S^1 \times D^2) \right) / \sim,$$

wobei  $\partial(S^1 \times D^2) \ni x \sim g(x) \in \partial(\nu K)$  und  $\overline{M \setminus (\nu K)}$  den Abschluss dieser Menge bezeichnet.

Man sagt dann,  $M'$  entsteht aus  $M$  durch **Dehn-Chirurgie** entlang des Knotens  $K$  mit **Chirurgiekoeffizient**  $r$ .

Nun kann man folgenden Satz zeigen (siehe [30, Kapitel 9.F]).

**Satz 5.1** (Dehn-Chirurgie).

*$M'$  ist eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit und bei festgelegter Longitude  $\lambda$  durch den Chirurgiekoeffizienten  $r$  (und natürlich den Isotopietyp von  $K$  und den Diffeomorphietyp von  $M$ ) bis auf Diffeomorphie eindeutig bestimmt.*

Wenn man nun einen Knoten  $K$  in  $S^3$  (oder allgemeiner in einer Mannigfaltigkeit, in welcher der Knoten null-homolog ist) betrachtet, dann kann man eine Longitude  $\lambda$  durch die Forderung  $\text{lk}(K, \lambda) = 0$  eindeutig festlegen. Dabei bezeichnet  $\text{lk}$  die Verschlingungszahl (siehe [29, Kapitel 6.15] oder [13, Kapitel 3.4.3]). Für allgemeine Mannigfaltigkeiten ist solch eine natürliche Wahl allerdings nicht gegeben.

## 5.2 Kontakt-Dehn-Chirurgie

Betrachtet man nun Knoten in Kontaktmannigfaltigkeiten, so stellen sich zwei natürliche Fragen, die wir im Folgenden beantworten wollen:

1. Gibt es natürliche Longituden auf Tubenumgebungen spezieller Knoten in Kontaktmannigfaltigkeiten?
2. Wenn wir eine Dehn-Chirurgie in einer Kontaktmannigfaltigkeit ausführen, gibt es dann eine Kontaktstruktur auf der resultierenden Mannigfaltigkeit, die außerhalb einer Tubenumgebung des Knotens mit der alten Kontaktstruktur übereinstimmt?

Für Legendre-Knoten in Kontaktmannigfaltigkeiten lässt sich die erste Frage positiv beantworten, wie im Folgenden gezeigt wird.

**Definition 5.2** (Kontaktrahmung).

Sei  $K : S^1 \rightarrow (M, \xi)$  ein Legendre-Knoten in einer Kontaktmannigfaltigkeit. Wähle eine spezielle Longitude  $\lambda$  auf dem Rand einer Tubenumgebung  $\partial(\nu K)$  durch Verschiebung von  $K$  in eine Richtung tangential zu  $\xi|_{TK}$ , aber transversal zu  $K$ . Die zugehörige Rahmung heißt **Kontaktrahmung**.

**Bemerkung 5.3**

(1) Dies ist wohldefiniert, denn wegen  $T_p K \subset \xi_p$  für alle  $p \in K$  spaltet das Normalenbündel von  $K$  in  $M$  in zwei triviale Geradenbündel

$$(TM|_K)/TK = (TM|_K)/(\xi|_K) \oplus (\xi|_K)/TK.$$

Dies liefert eine Trivialisierung des Normalenbündels, welche man als die obige Rahmung auffassen kann. (Dazu betrachte auch die lokale Abbildung 5.1. Im Globalen wird sich der parallele Knoten im Allgemeinen mehrere Male um den alten Knoten herumwinden.)

(2) Dies ist einer der wenigen Punkte, an denen benötigt wird, dass die Kontaktstruktur koorientiert ist. Natürlich geht dies so auch nur in Dimension 3.

(3) In diesem speziellen Fall entspricht eine Rahmung eines Knotens einfach der Wahl einer festen Longitude des Knotens. Man braucht also die allgemeine Definition nicht zu kennen.

(4) Analog kann man auch dieselbe Rahmung erhalten, indem man  $K$  in eine Richtung transversal zu  $\xi|_K$  verschiebt. (Dies kann man auch in Abbildung 5.1 erkennen.)

(5) Die Rahmung eines null-homologen Knotens  $K$ , die durch die Forderung  $lk(K, \lambda) = 0$  bestimmt ist, heißt **Flächenrahmung**.

(6) Natürlich unterscheidet sich die Kontaktrahmung im Allgemeinen von der Flächenrahmung. Aber man kann sie leicht ineinander umrechnen (dazu später mehr in Abschnitt 5.3).

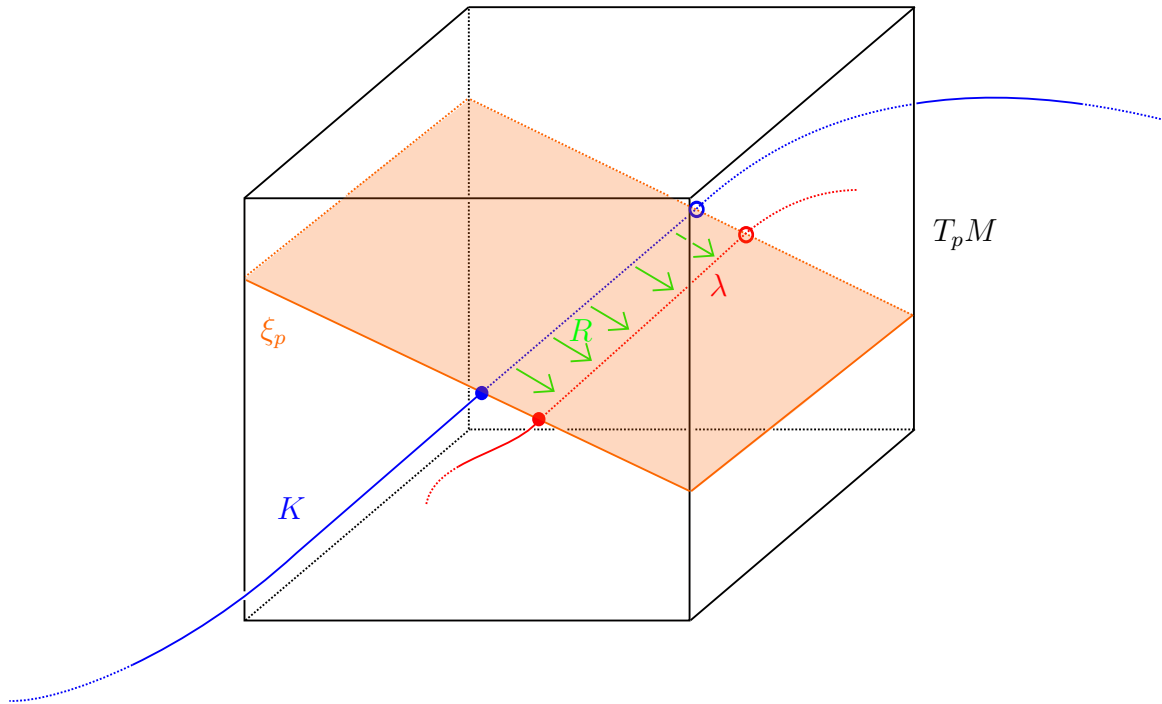


Abbildung 5.1: Ein lokales Bild der Kontaktrahmung eines Legendre-Knotens

**Beispiel 5.4**

Betrachte  $V := \{x^2 + y^2 \leq 1\} \subset (S^1 \times \mathbb{R}^2, \xi_n = \ker(\cos(n\theta) dx - \sin(n\theta) dy))$  wie in den früheren Beispielen. Dann ist  $V$  eine Tubenumgebung des Legendre-Knotens

$$S^1 \ni \theta \mapsto (\theta, 0, 0) \in (S^1 \times \mathbb{R}^2, \xi_n).$$

Der Meridian  $\mu$  ist also bis auf Isotopie eindeutig bestimmt. Die zur Kontaktrahmung gehörige Longitude  $\lambda$  erhält man, indem man den Knoten in die Richtung eines Vektorfeldes  $R$  transversal zu dem Knoten, aber tangential zu der Kontaktstruktur  $\xi_n$  verschiebt. Damit ein Vektorfeld transversal zu diesem Knoten ist, darf es keinen Anteil in  $\theta$ -Richtung haben. Also muss  $R$  von der Form  $R(\theta, x, y) = a(\theta, x, y) \partial_x + b(\theta, x, y) \partial_y$  sein. Weiter ist das Vektorfeld  $R$  genau dann tangential an die Kontaktebenen, wenn  $\alpha_n(R) = 0$  gilt. Also betrachte:

$$0 = \alpha_n(R) = a(\theta, x, y) \cos(n\theta) - b(\theta, x, y) \sin(n\theta)$$



Eine Möglichkeit das Vektorfeld zu wählen, ist also offensichtlich

$$R(\theta, x, y) = \sin(n\theta) \partial_x + \cos(n\theta) \partial_y.$$

Dieses Vektorfeld ist natürlich nicht eindeutig, aber die zugehörige Longitude ist bis auf Isotopie dieselbe. Wenn man nun den Knoten in Richtung dieses Vektorfeldes auf den Rand von  $V$  verschiebt, erhält man

$$\lambda = \left\{ (\theta, \sin(n\theta), \cos(n\theta)) : \theta \in S^1 \right\}.$$

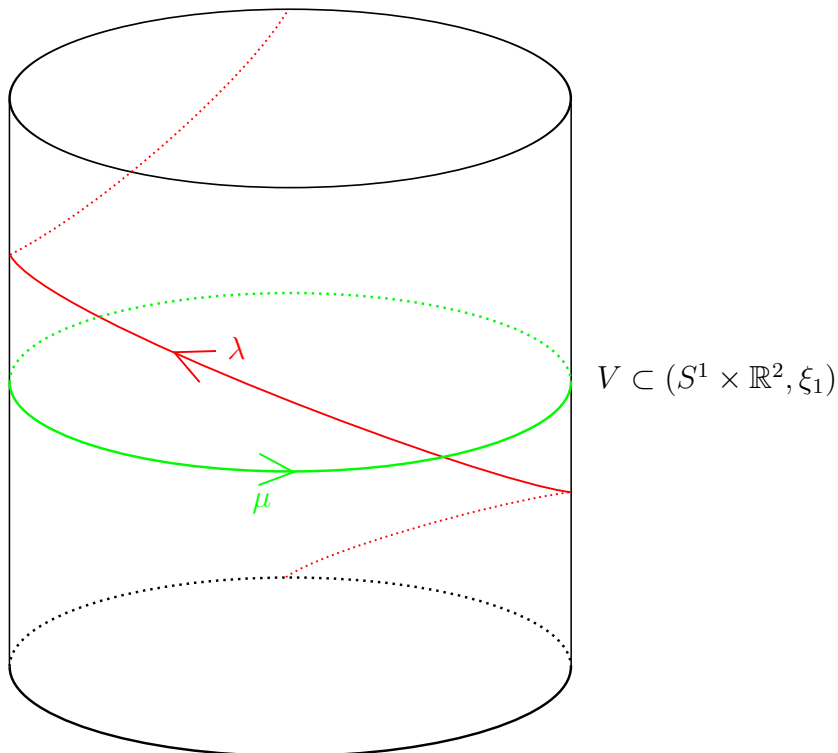


Abbildung 5.2: Kontaktrahmung des Legendre-Standardknotens im Fall  $n = 1$

Diese Longitude ist übrigens genau eine der Teilungskurven wie in Beispiel 2.55 beschrieben.

Jeder Legendre-Knoten besitzt also eine natürliche Longitude. Bezüglich dieser Longitude kann man nun eine Chirurgie definieren. Die folgende Definition wird die zweite Frage von oben auch positiv beantworten.

**Definition und Satz 5.5** (Kontakt-Dehn-Chirurgie).

Sei  $K$  ein Legendre-Knoten in einer Kontaktmannigfaltigkeit  $(M, \xi)$  und sei  $M'$  die dreidimensionale Mannigfaltigkeit, welche aus  $M$  durch Chirurgie entlang  $K$  mit Chirurgiekoeffizient  $r \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  bezüglich der Kontaktrahmung entstanden ist. Dann trägt  $M'$  eine Kontaktstruktur  $\xi'$ , so dass  $\xi|_{T(M \setminus \nu K)} = \xi'$ . (Die Kontaktstrukturen sind also außerhalb einer Tubenumgebung des Knotens gleich.)

Man sagt,  $(M', \xi')$  ist durch **Kontakt-Dehn-Chirurgie** entlang  $K$  mit Chirurgiekoeffizient  $r$  aus  $(M, \xi)$  entstanden.

Weiter gilt: Wenn  $r \neq 0$  ist, dann ist  $\xi'|_{S^1 \times D^2}$  straff (hier bezeichnet  $S^1 \times D^2$  den neu herein geklebten Volltorus), ist aber  $r = 0$ , so ist  $\xi'$  überdreht.

**Bemerkung 5.6**

(1) Die Kontaktstruktur  $\xi'$  ist im Allgemeinen **nicht** eindeutig. Später werden wir aber eine Situation betrachten, in der sie eindeutig ist.

(2) Selbst wenn  $\xi$  eine straffe Kontaktstruktur auf  $M$  und  $r \neq 0$  ist, dann ist es überhaupt nicht klar, ob die neue Kontaktstruktur  $\xi'$  auf  $M'$  auch straff ist. Eine überdrehte Scheibe könnte teilweise in der alten Mannigfaltigkeit und teilweise in dem neu herein geklebten Volltorus liegen.

*Beweis von Satz 5.5.*

Wir haben gesehen, dass die resultierende Mannigfaltigkeit nicht von der Wahl der Tubenumgebung abhängt. Die Idee ist es nun, eine Tubenumgebung des Knotens so zu wählen, dass ihr Rand eine konvexe Fläche ist. In Kapitel 2 haben wir gesehen (Satz 2.47 und Satz 2.59), dass die Kontaktstruktur in einer Umgebung der konvexen Fläche im Wesentlichen schon durch ihre Teilungsmenge bestimmt ist. Es reicht also, eine Kontaktstruktur auf  $S^1 \times D^2$  anzugeben, bezüglich derer der Rand  $\partial(S^1 \times D^2)$  eine konvexe Fläche ist, deren Teilungsmenge unter der Anklebeabbildung  $g$  auf die Teilungsmenge des konvexen Randes der Tubenumgebung abgebildet wird. Dann können wir diesen Volltorus in die Kontaktmannigfaltigkeit, aus der die Tubenumgebung des Knotens entfernt wurde, hereinkleben, und zwar so, dass die Kontaktstrukturen auf den einzelnen Komponenten zu einer globalen Kontaktstruktur auf der neuen Mannigfaltigkeit erweitern. Genauer:

Nach dem Umgebungssatz für Legendre-Knoten existiert eine Kontakteinbettung

$$f: (S^1 \times D_2, \xi_1) \hookrightarrow (M, \xi)$$

auf eine Tubenumgebung des Knotens  $K$ , wobei  $D_2$  wieder wie in Abschnitt 2.2 die

2-Scheibe mit Radius 2 bezeichnet. Wir können also unseren Legendre-Knoten  $K$  mit dem Legendre-Standardknoten

$$S^1 \ni \theta \mapsto (\theta, 0, 0) \in (S^1 \times D_2, \xi_1)$$

identifizieren. In diesem lokalen Modell lässt sich nun leichter arbeiten. In Beispiel 5.4 oben haben wir gesehen, dass  $V = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$  eine Tubenumgebung von  $K$  ist. Auf dieser wollen wir nun die Chirurgie ausführen. Seien nun  $r = \frac{p}{q}$  mit  $p, q$  koprim und

$$g: \partial(S^1 \times D^2) \longrightarrow \partial V$$

ein Diffeomorphismus mit

$$\mu_0 \longmapsto p\mu + q\lambda.$$

Nun schneiden wir die Tubenumgebung  $V$  des Legendre-Knotens  $K$  heraus und kleben einen Volltorus  $S^1 \times D^2$  mittels  $g$  wieder herein. Also:

$$M' := \left( \overline{M \setminus f(V)} + S^1 \times D^2 \right) / \sim,$$

wobei  $\partial(S^1 \times D^2) \ni x \sim f(g(x)) \in \partial(f(V))$ .

Topologisch liefert dies also nach Satz 5.1 eine wohldefinierte dreidimensionale Mannigfaltigkeit  $M'$ , die unabhängig von den getroffenen Wahlen ist. Um den Beweis zu beenden, muss noch eine entsprechende Kontaktstruktur auf  $M'$  konstruiert werden.

In Beispiel 2.55 und Beispiel 5.4 haben wir gesehen, dass  $\partial V \subset (S^1 \times D_2, \xi_1)$  eine konvexe Fläche mit  $\#\Gamma_{\partial V} = 2$  und Teilungsmenge

$$\Gamma_{\partial V} = \left\{ (\theta, \pm \sin \theta, \pm \cos \theta) : \theta \in S^1 \right\} = \left\{ \pm \lambda \right\}$$

ist. Wir benötigen nun also eine Kontaktstruktur auf  $S^1 \times D^2$ , bezüglich derer der Rand  $\partial(S^1 \times D^2)$  eine konvexe Fläche mit genau zwei Teilungskurven ist und deren Teilungskurven unter  $g$  auf die Teilungskurven von  $\partial V$  abgebildet werden.

Im Klassifikationssatz straffer Kontaktstrukturen auf Volltori (Satz 2.64) und in der folgenden Bemerkung haben wir gesehen, dass es im Falle zweier Teilungskurven für jede mögliche Steigung dieser Teilungskurven mindestens eine solche Kontaktstruktur gibt. Für Steigung 0 ist eine solche Kontaktstruktur überdreht, bei allen anderen Steigungen kann diese Kontaktstruktur straff gewählt werden.

Nun wählt man eine solche Kontaktstruktur  $\xi_g$  auf  $S^1 \times D^2$ . (Diese hängt natürlich ent-

scheidend von der Abbildung  $g$  ab.) Wenn man nun den konvexen Rand  $\partial(S^1 \times D^2)$  mit  $g$  auf  $\partial V$  abbildet, sind die Teilungskurven dieselben, also kann man mit der Giroux-Flexibilität (Satz 2.59) annehmen, dass die charakteristischen Blätterungen schon dieselben sind. (Das heißt, man isotopiert  $\partial(S^1 \times D^2)$  in einem leicht verdickten Volltorus zu einer konvexen Fläche mit der richtigen charakteristischen Blätterung. Diese neue Fläche ist dann wieder der Rand eines Volltorus.) Dann kann man mit Satz 2.47 schließen, dass die Kontaktstrukturen in einer Umgebung der Fläche (also einmal in  $S^1 \times D^2$  und einmal in  $\overline{M \setminus f(V)}$ ) gleich aussehen. Also ist

$$\xi' := \begin{cases} \xi_g & \text{auf } S^1 \times D^2 \\ \xi & \text{auf } \overline{M \setminus f(V)} \end{cases}$$

eine auf  $M'$  wohldefinierte Kontaktstruktur. Diese neue Kontaktstruktur hängt dann natürlich von den getroffenen Wahlen ab, also von der Kontakteinbettung  $f$ , dem Diffeomorphismus  $g$  und der Kontaktstruktur auf  $S^1 \times D^2$ .

Um die Aussagen über Überdrehtheit und Straffheit der neuen Kontaktstruktur zu zeigen, reicht es zu zeigen, dass man nur für Chirurgiekoeffizient  $r = 0$  eine Kontaktstruktur auf  $S^1 \times D^2$  mit Steigung 0 benötigt, denn diese ist die einzige, die überdreht gewählt werden muss.

Sei also eine Kontaktstruktur auf  $S^1 \times D^2$  gegeben, so dass  $\partial(S^1 \times D^2)$  eine konvexe Menge mit zwei Teilungskurven und Steigung null ist. Dann gilt:

$$s(\mu_0) = 0 = s(\partial(S^1 \times D^2)) = s(\Gamma_{\partial(S^1 \times D^2)})$$

Wegen  $\mu_0 \xrightarrow{g} p\mu + q\lambda$  und  $\Gamma_{\partial(S^1 \times D^2)} \xrightarrow{g} \Gamma_{\partial V} = \{\pm\lambda\}$  gilt:

$$p\mu + q\lambda = g(\mu_0) = g(\Gamma_{\partial(S^1 \times D^2)}) = \pm\lambda$$

Eine solche überdrehte Kontaktstruktur wird also wirklich nur im Fall  $p = r = 0$  benötigt. □

Eine Kontakt-Dehn-Chirurgie liefert also erneut eine Kontaktmannigfaltigkeit, deren Kontaktstruktur allerdings im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt ist. Wenn man nicht an der genauen Kontaktstruktur auf der entstehenden Mannigfaltigkeit interessiert ist, kann man hiermit schon einiges anfangen. Zum Beispiel kann man hiermit einen alternativen Beweis des Satzes von Martinet geben. (Der ursprüngliche Beweis funktioniert mit Chirurgie entlang transversalen Knoten. Das sind Knoten, die immer

transversal zu den Kontaktebenen stehen; siehe dafür [13, Satz 4.1.1].)

**Korollar 5.7** (Satz von Martinet).

*Jede dreidimensionale orientierbare geschlossene Mannigfaltigkeit besitzt eine Kontaktstruktur.*

*Beweis.*

Sei  $M$  eine solche Mannigfaltigkeit. Ohne Einschränkung können wir  $M$  als zusammenhängend voraussetzen. Nach dem Satz von Dehn-Lickorish (siehe [29, Satz 12.4]) kann man  $M$  durch Dehn-Chirurgie entlang einer Verschlingung aus  $S^3$  erhalten. Weiter trägt  $S^3$  nach Beispiel 2.33 (1) eine Kontaktstruktur. Jetzt kann man nach dem Approximationssatz für Legendre-Knoten die Verschlingung durch eine Legendre-Verschlingung approximieren. Dies ändert den Diffeomorphietyp von  $M$  nach Satz 5.1 nicht. Wie wir eben gesehen haben, trägt  $M$  dann eine Kontaktstruktur.  $\square$

Wenn man nun Kontaktmannigfaltigkeiten durch Kontakt-Dehn-Chirurgie beschreiben will, ist dies nur sinnvoll, solange die entstehende Kontaktstruktur auch eindeutig ist. Wann dies der Fall ist, wird im Folgenden beantwortet.

**Proposition 5.8** (Eindeutigkeitssatz).

*Sei  $(M', \xi')$  eine Kontaktmannigfaltigkeit, welche aus  $(M, \xi)$  durch Kontakt-Dehn-Chirurgie entlang eines Legendre-Knotens  $K$  mit Chirurgiekoeffizienten  $r = \frac{1}{n}$  (wobei  $n \in \mathbb{Z}$ , auch 0 ist erlaubt) entstanden ist. Dann ist  $(M', \xi')$  eindeutig, das heißt unabhängig von der Kontakteinbettung  $f$ , dem Diffeomorphismus  $g$  und der Kontaktstruktur auf  $S^1 \times D^2$ .  $(M', \xi')$  hängt also nur von dem Chirurgiekoeffizienten  $r = \frac{1}{n}$  (und natürlich von  $(M, \xi)$  und  $K$ ) ab.*

**Bemerkung 5.9**

Allerdings können verschiedene Legendre-Knoten verschiedene Kontaktstrukturen liefern, auch wenn sie topologisch isotop sind (weiteres dazu in Abschnitt 5.3).

*Beweisidee von Proposition 5.8.*

Zu zeigen ist, dass die neue Kontaktmannigfaltigkeit  $(M', \xi')$  (bis auf Kontaktomorphie) nicht von den Wahlen in der vorigen Konstruktion abhängt. Im Wesentlichen liegt dies daran, dass es genau eine solche straffe Kontaktstruktur auf  $S^1 \times D^2$  mit Steigung  $\frac{1}{n}$  gibt, wie sie in der obigen Konstruktion benötigt wird (siehe Klassifikationssatz 2.64). Man kann dann nachrechnen, dass verschiedene Wahlen von  $f$  und  $g$  zu kontaktomorphen Kontaktstrukturen führen. Siehe dafür zum Beispiel [4, Proposition 7] oder [25, Proposition 4.8].  $\square$

Weil man jetzt weiß, dass für diese komplett wohldefinierte  $(\frac{1}{n})$ -Kontakt-Dehn-Chirurgie die entstehende Kontaktstruktur unabhängig von der Wahl von  $f$ ,  $g$  und der Kontaktstruktur auf dem hereingeklebten Volltorus ist, kann man diese so einfach wählen, dass man einige Sätze, die im topologischen Fall klar sind, auch im Kontaktfall beweisen kann. Für die Beweise der beiden folgenden Lemmata siehe wieder [4, Propositionen 8 und 9] oder [25, Lemmata 4.10 und 4.11].

**Lemma 5.10** (Aufhebungslemma).

*Wenn  $(M', \xi')$  durch  $(\frac{1}{n})$ -Kontakt-Dehn-Chirurgie aus  $(M, \xi)$  entlang eines Legendre-Knotens  $K$  erhalten wurde, dann erhält man  $(M, \xi)$  aus  $(M', \xi')$  durch  $(-\frac{1}{n})$ -Kontakt-Dehn-Chirurgie entlang des Legendre-Knotens  $S^1 \times \{0\} \subset S^1 \times D^2 \subset (M', \xi')$  (der Seele des hereingeklebten Volltorus).*

**Lemma 5.11** (Ersetzungslemma).

*Wenn  $(M', \xi')$  durch  $(\frac{1}{n})$ -Kontakt-Dehn-Chirurgie ( $n \neq 0$ ) aus  $(M, \xi)$  entlang des Legendre-Knotens  $K$  erhalten wurde, dann kann man  $(M', \xi')$  auch durch  $|n|$ -fache  $\varepsilon$ -Kontakt-Dehn-Chirurgie aus  $(M, \xi)$  erhalten, wobei  $\varepsilon = \frac{n}{|n|} = \text{sign}(n) \in \{\pm 1\}$ . Dabei wird jede  $\varepsilon$ -Kontakt-Dehn-Chirurgie entlang der Seele des in der vorigen Chirurgie hineingeklebten Volltorus ausgeführt.*

Bezeichne nun mit  $M'$  die 3-Mannigfaltigkeit, die aus einer geschlossenen Mannigfaltigkeit  $M$  durch (topologische) **ganzzahlige** Dehn-Chirurgie entlang eines Knotens entstanden ist. Ganzzahlige Dehn-Chirurgie ist eine Dehn-Chirurgie mit ganzzahligem Chirurgiekoeffizienten. (Man kann leicht zeigen, dass diese Definition nicht von der Wahl der Rahmung abhängt.) Eine solche ganzzahlige Dehn-Chirurgie lässt sich auch etwas anders auffassen: Man betrachte die vierdimensionale Mannigfaltigkeit  $M \times [0, 1]$ . Die Mannigfaltigkeit  $M'$  kann man nun auch erhalten, indem man an den Rand  $M \times \{1\}$  einen 2-Henkel anheftet (das heißt Ankleben von  $D^2 \times D^2$  entlang  $\partial D^2 \times D^2$ ). Der obere Rand dieser 4-Mannigfaltigkeit ist dann nach Glättung des Winkels wieder eine 3-Mannigfaltigkeit. Wenn man den 2-Henkel auf die richtige Art und Weise anklebt, entspricht diese neue 3-Mannigfaltigkeit genau  $M'$  (siehe dafür [30, 9.G.4 und 9.G.5]). Ganzzahlige Dehn-Chirurgie liefert also immer einen (topologischen) Kobordismus von  $M$  nach  $M'$ . (In der Abbildung unten ist dies anders als in den Abbildungen zuvor eine Dimension niedriger schematisch dargestellt. Vergleiche auch mit dem vorigen Kapitel.) Betrachtet man nun eine allgemeine (topologische) Dehn-Chirurgie, also nicht unbedingt mit ganzzahligem Chirurgiekoeffizienten, so kann man diese Dehn-Chirurgie in (mehrere) ganzzahlige Chirurgien an eventuell anderen Knoten umwandeln (siehe dafür zum

Beispiel [6]). Allgemeine Dehn-Chirurgie liefert also auch immer einen (topologischen) Kobordismus von  $M$  nach  $M'$ ; dabei muss man dann aber im Allgemeinen mehrere 2-Henkel anheften.

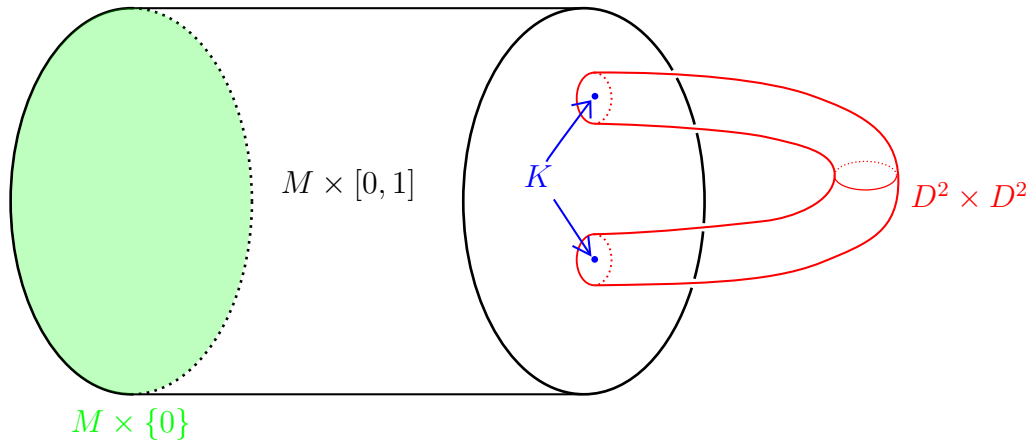


Abbildung 5.3: Ein Kobordismus, der einer Chirurgie entspricht.

Auch haben wir in Beispiel 2.30 (2) gesehen, dass man  $M \times [0, 1]$  mit einer symplektischen Struktur, der Symplektifizierung von  $(M, \xi)$ , versehen kann, falls  $M$  eine Kontaktstruktur  $\xi$  trägt. Man kann sich nun in einer lokalen Rechnung überlegen, dass man im Falle einer  $(-\frac{1}{n})$ -Kontaktchirurgie sogar die obigen 2-Henkel mit einer symplektischen Struktur versehen kann, die nach Glättung des Winkels bei  $M \times \{1\}$  mit der symplektischen Struktur der Symplektifizierung übereinstimmt. Dies liefert dann einen (starken) symplektischen Kobordismus von  $(M, \xi)$  nach  $(M', \xi')$  und impliziert insbesondere folgenden Satz (für einen Beweis siehe zum Beispiel [25, Satz 4.12], [5, Seiten 587-588] oder [33]):

**Satz 5.12** (Starke symplektische Füllbarkeit durch Kontaktchirurgie).

Sei  $(M, \xi)$  eine geschlossene Kontaktmannigfaltigkeit und  $n \in \mathbb{N}$ .

(1) Wenn  $(M', \xi')$  aus  $(M, \xi)$  durch  $(-\frac{1}{n})$ -Kontakt-Dehn-Chirurgie entlang eines Legendre-Knotens entstanden ist und  $(M, \xi)$  stark symplektisch füllbar ist, dann ist auch  $(M', \xi')$  stark symplektisch füllbar.

(2) Wenn  $(M', \xi')$  aus  $(M, \xi)$  durch  $(\frac{1}{n})$ -Kontakt-Dehn-Chirurgie entlang eines Legendre-Knotens entstanden ist und  $(M, \xi)$  **nicht** stark symplektisch füllbar ist, dann ist auch  $(M', \xi')$  **nicht** stark symplektisch füllbar.

Dieser Satz liefert nun den gewünschten Zusammenhang zwischen der starken symplektischen Füllbarkeit von Kontaktstrukturen und der Kontakt-Dehn-Chirurgie und wird im folgenden das Hauptwerkzeug sein um den Teil über die starke symplektische Füllbarkeit aus dem Füllbarkeitssatz von Ding-Geiges zu beweisen.

### 5.3 Beispiele und einfache Anwendungen der Kontakt-Dehn-Chirurgie

Mit Kontakt-Dehn-Chirurgie kann man nun natürlich sehr leicht aus gegebenen Kontaktmannigfaltigkeiten neue konstruieren. Wenn man dabei nur  $(\frac{1}{n})$ -Kontakt-Dehn-Chirurgien ausführt, ist diese entstehende Kontaktstruktur nach dem Eindeutigkeitsatz sogar bis auf Kontaktomorphie eindeutig. Meistens wird man die Kontakt-Dehn-Chirurgien entlang eines Legendre-Knotens in  $(\mathbb{R}^3, \xi_{st}) \subset (S^3, \xi_{st})$  ausführen (siehe Beispiel 2.33 (1)), da man dort Legendre-Knoten sehr leicht in ihrer Front-Projektion (siehe Beweis von Satz 2.13) darstellen kann.

Zum Beispiel kann man eine  $(-1)$ -Kontakt-Dehn-Chirurgie entlang des Legendre-Unknotens aus Abbildung 5.4 links ausführen. Welche Mannigfaltigkeit dies liefert ist nicht sofort klar (wie man dies herausfindet wird weiter unten erklärt), aber da  $(S^3, \xi_{st})$  nach Beispiel 2.38 symplektisch füllbar ist, liefert dies nach Satz 5.12 eine (eindeutige) stark symplektisch füllbare (und damit insbesondere straffe) Kontaktstruktur  $\xi'$  auf der entstehenden Mannigfaltigkeit.

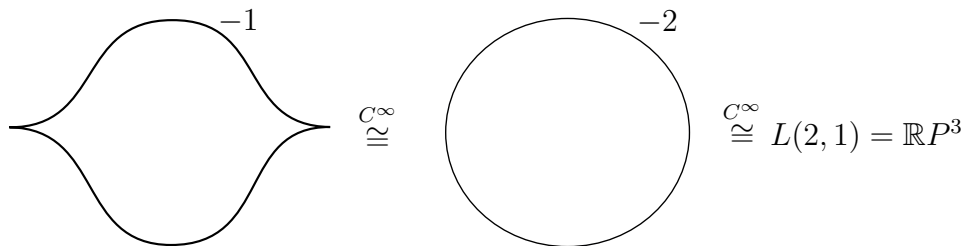


Abbildung 5.4: Eine stark füllbare Kontaktstruktur auf  $\mathbb{R}P^3$

Da hier eine Chirurgie an einem Unknoten in  $S^3$  ausgeführt wird, wird die resultierende Mannigfaltigkeit auf jeden Fall ein Linsenraum sein (siehe [16, Beispiel 5.3.2]). Um zu bestimmen, welcher Linsenraum dies genau ist, braucht man eine Möglichkeit, die Kontaktrahmung in die Flächenrahmung umzurechnen. Dazu führt man eine Invariante für Legendre-Knoten ein, die genau dies macht.

**Definition 5.13** (Thurston-Bennequin-Invariante).

Sei  $K$  ein homologisch trivialer Legendre-Knoten in einer Kontaktmannigfaltigkeit  $(M, \xi)$ . Dann ist die **Thurston-Bennequin-Invariante**  $tb(K)$  von  $K$  definiert durch  $tb(K) := lk(K, \lambda)$ , wobei  $\lambda$  einen zu  $K$  parallelen Knoten bezüglich der Kontaktrahmung bezeichnet. (Dabei sollen  $K$  und  $\lambda$  gleich orientiert sein.)



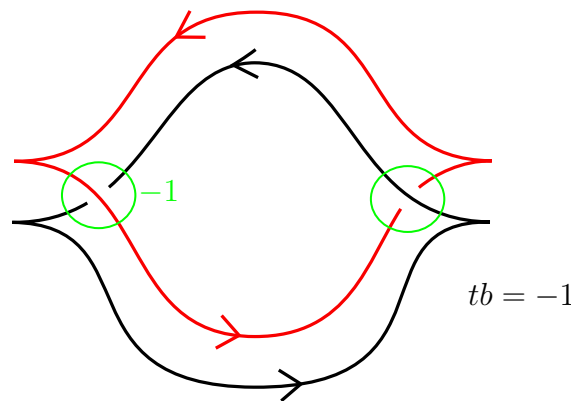
**Bemerkung 5.14**

(1) Dies ist **keine** (topologische) Isotopieinvariante. Denn wenn man  $K$  isotopiert, ändert sich die Longitude  $\lambda$ , welche zur Kontaktrahmung gehört. Weiter unten sehen wir dies noch explizit. Man kann aber zeigen, dass  $tb$  eine Invariante unter Legendre-Isotopien ist (das heißt Isotopien, die immer Legendre-Einbettungen sind) zum Beispiel, indem man die Invarianz unter den Reidemeisterbewegungen im Legendre-Fall zeigt.

(2) Da eine Longitude  $\lambda_F$ , zugehörig zur Flächenrahmung des Knotens, Verschlingungszahl 0 mit dem Knoten hat, gilt  $tb(K) = lk(\lambda_F, \lambda_K)$ , wobei  $\lambda_K$  ein Longitude zugehörig zur Kontaktrahmung ist. Die Thurston-Bennequin-Invariante gibt also genau die Anzahl der rechtshändigen Drehungen der Kontaktrahmung relativ zur Flächenrahmung an.

(3) Diese Invariante ergibt nur für homologisch triviale Knoten (also zum Beispiel alle Knoten in  $S^3$ ) Sinn, da der Knoten nur dann eine Flächenrahmung besitzt.

Um jetzt die Thurston-Bennequin-Invariante des Legendre-Unknotens aus Abbildung 5.4 zu berechnen, bemerkt man, dass das Vektorfeld  $\partial_z$  immer transversal zur Standardkontaktstruktur  $\xi_{st}$  steht. Man kann also nach Bemerkung 5.3 (4) eine zur Kontaktrahmung zugehörige Longitude erhalten, indem man den Knoten in Richtung dieses Vektorfeldes verschiebt. Die Thurston-Bennequin-Invariante erhält man dann durch Abzählen der Kreuzungspunkte wie bei der Verschlingungszahl gefordert (siehe [29, Kapitel 6.15]). Im Bild unten ist dies ausgeführt (der ursprüngliche Knoten  $K$  ist in schwarz gezeichnet, die Longitude in rot):



In diesem Fall erhält man also  $tb(K) = lk(K, \lambda) = -1$ . Die  $(-1)$ -Kontakt-Dehn-Chirurgie entlang des Legendre-Unknotens aus Abbildung 5.4 ist also topologisch äquivalent zu einer topologischen Dehn-Chirurgie entlang eines Unknotens mit Chirurgiekoeffizienten  $-2$  (das heißt bezüglich der Flächenrahmung) wie in Abbildung 5.4 dargestellt. Generell sollen Chirurgiekoeffizienten an Legendre-Knoten immer bezüglich der Kon-

taktrahmung gezählt werden und Chirurgiekoeffizienten an rein topologischen Knoten immer bezüglich der Flächenrahmung. Die topologische Dehn-Chirurgie am Unknoten mit Chirurgiekoeffizienten  $-2$  liefert nun den Linsenraum  $L(2, 1) = \mathbb{R}P^3$  (dafür siehe [16, Beispiel 5.3.2 und Aufgabe 5.3.3 (a)]). Die Kontakt-Dehn-Chirurgie aus Abbildung 5.4 liefert also die stark füllbare Kontaktmannigfaltigkeit  $(\mathbb{R}P^3, \xi')$ . (Wenn man jetzt noch die Tatsache benutzt, dass es auf  $\mathbb{R}P^3$  nur eine einzige straffe Kontaktstruktur gibt, dann weiß man, dass diese durch  $\xi'$  gegeben ist.)

Natürlich kann man auch eine Kontakt-Dehn-Chirurgie am selben Legendre-Unknoten mit einem anderen Chirurgiekoeffizienten ausführen, um so Kontaktstrukturen auf anderen Linsenräumen zu erhalten. Ein interessantes Beispiel ist in folgender Abbildung gegeben:

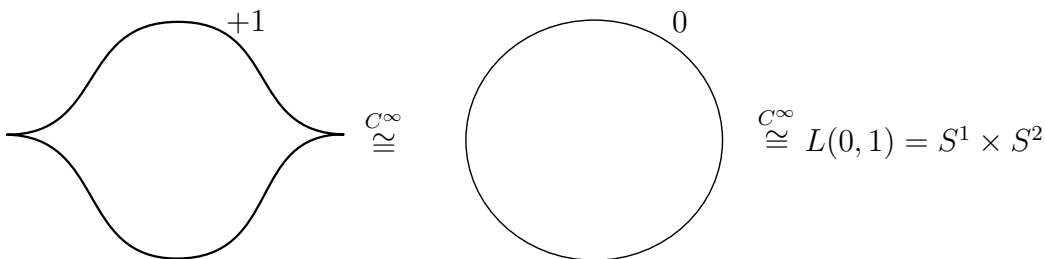


Abbildung 5.5: Eine straffe Kontaktstruktur auf  $S^1 \times S^2$

Die gleiche Rechnung wie eben zeigt, dass diese Kontakt-Dehn-Chirurgie topologisch den Linsenraum  $L(0, 1) = S^1 \times S^2$  liefert. Da man hier aber eine  $(+1)$ -Kontakt-Dehn-Chirurgie ausführt, kann man zuerst einmal keine Aussagen über die Füllbarkeit oder Straffheit der neu entstehenden Kontaktstruktur  $\xi'$  auf  $S^1 \times S^2$  machen. In [7, Lemma 4.2] wird aber explizit nachgerechnet, dass diese Kontaktstruktur füllbar und somit auch straff ist. Die Umkehrung des Satzes 5.12 gilt also nicht.

Andererseits kann man auch andere Realisierungen eines Legendre-Unknotens betrachten, wie zum Beispiel den **Legendre-Hai-Unknoten** aus Abbildung 5.6.

Die gleiche Rechnung wie eben liefert, dass dieser Legendre-Hai-Unknoten  $tb = -2$  hat. Somit liefert zum Beispiel eine  $(-1)$ -Kontakt-Dehn-Chirurgie eine stark symplektisch füllbare Kontaktstruktur auf  $L(3, 1)$ . Eine  $(+1)$ -Kontakt-Dehn-Chirurgie hingegen liefert wieder eine Kontaktstruktur auf  $S^3$ , über deren Eigenschaften man zunächst nichts aussagen kann. In [7][Lemma 4.1] wird aber gezeigt, dass diese Kontaktstruktur überdreht sein muss (und somit auch nicht füllbar sein kann).

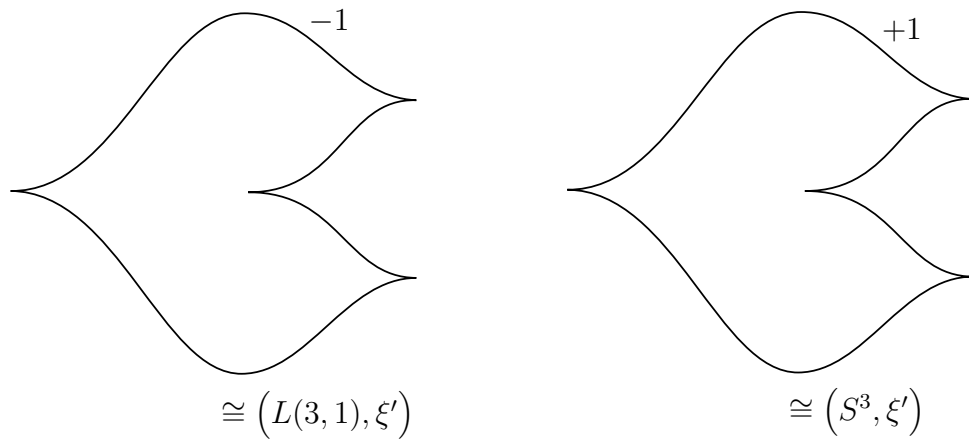


Abbildung 5.6: Kontaktstrukturen auf  $L(3, 1)$  und  $S^3$

Allgemein kann man durch Einfügen solcher Zick-Zacks die Thurston-Bennequin-Invariante eines Legendre-Knotens beliebig verkleinern. Dies nennt man auch **Stabilisierung**. In überdrehten Kontaktmannigfaltigkeiten kann man die Rahmung auch beliebig vergrößern, in straffen dagegen liegt für jeden (topologischen) Knoten eine obere Schranke vor (siehe dafür [13, Seite 318 und Satz 4.6.36]).

Durch Stabilisierung kann man nun auf jedem Linsenraum  $L(p, 1)$  mit  $p > 1$  eine stark symplektisch füllbare Kontaktstruktur konstruieren, indem man eine  $(-1)$ -Kontakt-Dehn-Chirurgie entlang eines Legendre-Unknotens mit  $p - 1$  Spitzen und Windungszahl 0 ausführt (siehe Abbildung 5.7).

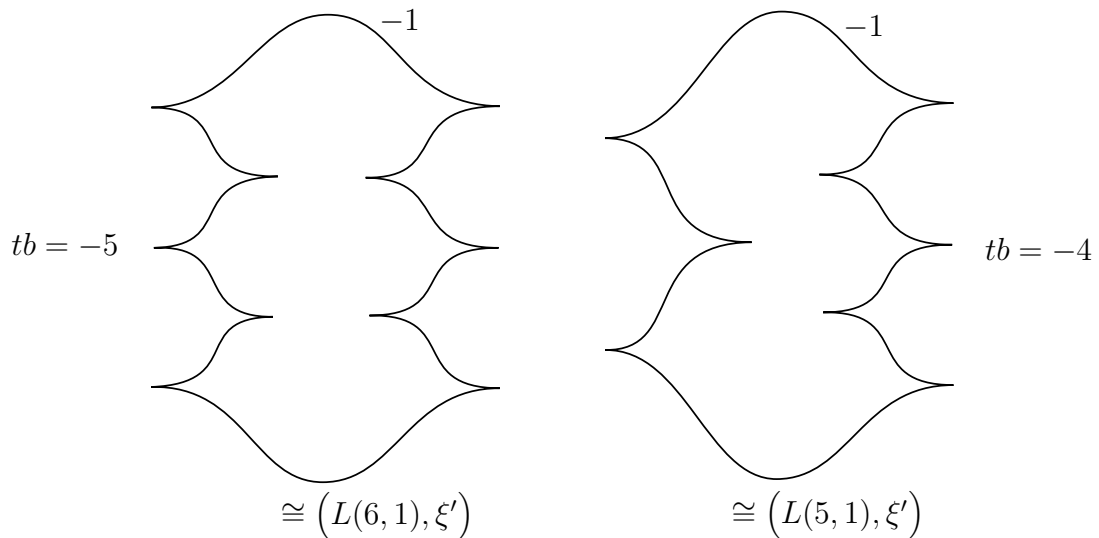


Abbildung 5.7: Stark symplektisch füllbare Kontaktstrukturen auf Linsenräumen

Andererseits kann man durch Stabilisierung auch immer Rahmung 0 vermeiden und so einen alternativen Beweis für den Satz von Martinet (siehe Korollar 5.7) angeben, bei dem nur straffe Kontaktstrukturen auf den neu herein geklebten Volltori benutzt werden (siehe auch [28, Korollar 11.2.3]).

Genauso kann man natürlich nicht-triviale Knoten betrachten, wie zum Beispiel den rechts- und den linkshändigen Kleeblattknoten. Eine Chirurgie an einem linkshändigen Kleeblattknoten in  $S^3$  mit Chirurgiekoeffizienten  $-1$  bezüglich der Flächenrahmung liefert die Poincaré-Homologiesphäre  $P$  (siehe [30, Beispiel 9.G.2]). (Eine Homologiesphäre ist eine Mannigfaltigkeit mit denselben Homologiegruppen wie die Sphäre.) Weiter liefert eine Chirurgie an dem linkshändigen Kleeblattknoten in  $S^3$  mit Chirurgiekoeffizienten  $+1$  bezüglich der Flächenrahmung eine andere Homologiesphäre, die hier mit  $H$  bezeichnet wird. Man kann zeigen, dass diese Chirurgie (topologisch) äquivalent ist (das heißt sie liefern diffeomorphe Mannigfaltigkeiten) zu einer Chirurgie am rechtshändigen Kleeblattknoten mit Chirurgiekoeffizienten  $-1$  bezüglich der Flächenrahmung (auch dafür siehe [30, Beispiel 9.H.6]). Nun wollen wir die  $(-1)$ -Chirurgie am rechtshändigen Kleeblattknoten als eine  $(\frac{1}{n})$ -Kontakt-Dehn-Chirurgie ausführen, um eine eindeutig bestimmte Kontaktstruktur auf der Homologiesphäre  $H$  zu erhalten. Eine mögliche Realisierung eines rechtshändigen Legendre-Kleeblattknotens ist in folgender Abbildung gegeben.

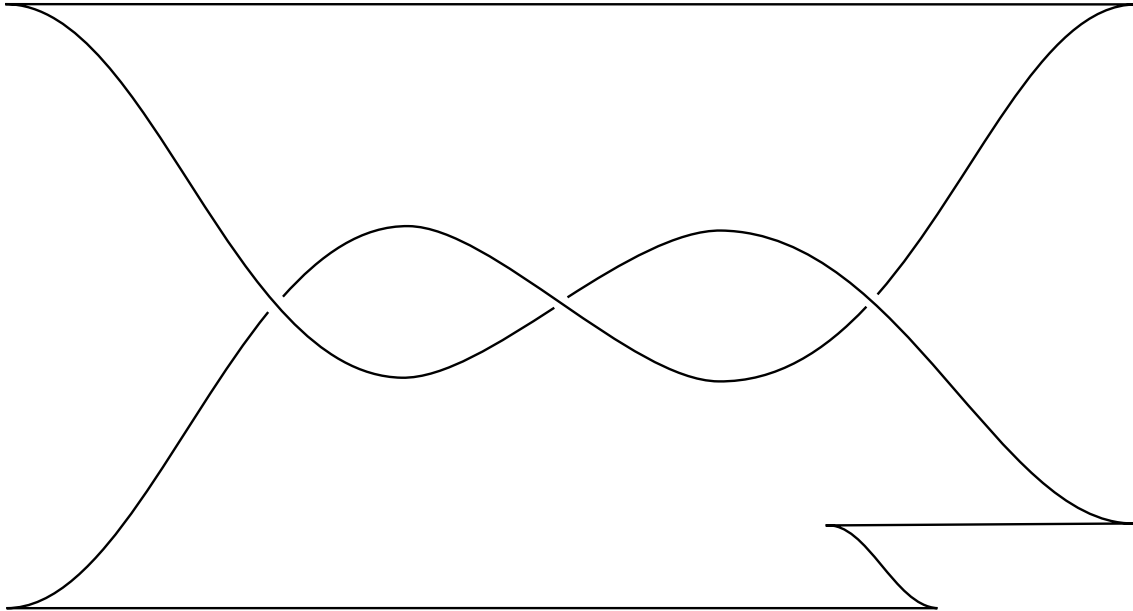


Abbildung 5.8: Ein rechtshändiger Legendre-Kleeblattknoten, der eine eindeutige Kontaktstruktur auf der Homologiesphäre  $H$  liefert.

Um jetzt die Thurston-Bennequin-Invariante des rechtshändigen Legendre-Kleeblattknotens aus obiger Abbildung zu berechnen, verschiebt man den Knoten wieder wie eben in Richtung des Vektorfeldes  $\partial_z$ . Die Thurston-Bennequin-Invariante erhält man dann wieder durch Abzählen der Kreuzungspunkte wie bei der Verschlingungszahl gefordert (siehe [29, Kapitel 6.15]). Im Bild unten ist dies ausgeführt (der ursprüngliche Knoten  $K$  ist in schwarz gezeichnet, die Longitude in rot):

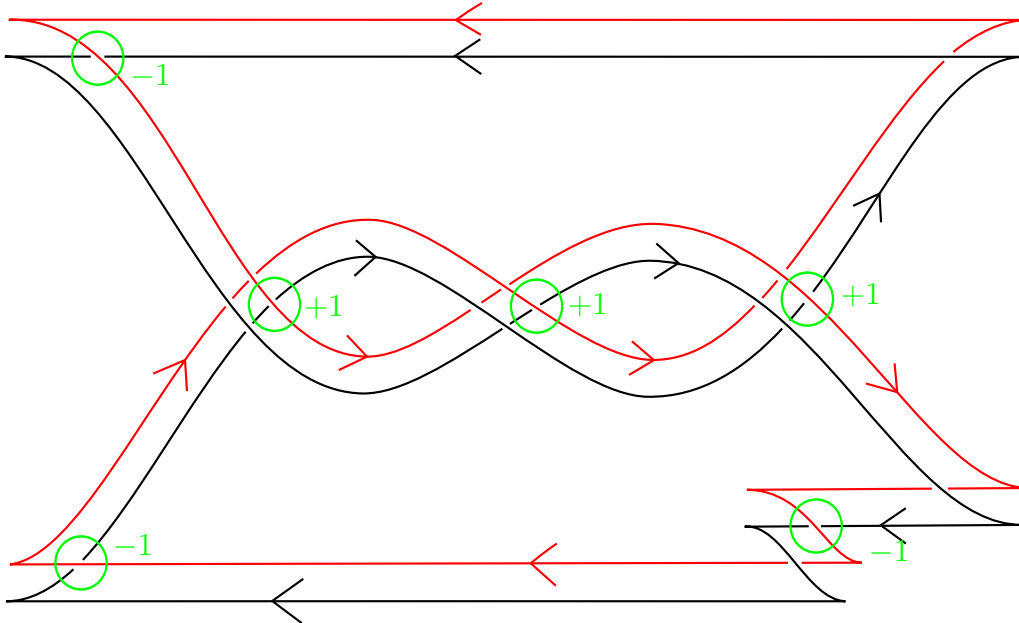


Abbildung 5.9: Berechnung der Thurston-Bennequin-Invariante

In diesem Fall erhält man also  $tb(K) = lk(K, \lambda) = 0$ . Dieses Verfahren funktioniert für alle Front-Projektionen von Legendre-Knoten in  $(\mathbb{R}^3, \xi_{st})$ . Somit erhält man folgendes Korollar:

**Korollar 5.15** (Berechnung von  $tb$ ).

Sei  $K$  ein Legendre-Knoten in  $(\mathbb{R}^3, \xi_{st})$  und  $K_F$  seine Front-Projektion. Dann gilt:

$$tb(K) = \text{Windung}(K_F) - \frac{1}{2} \# \text{Spitzen}(K_F)$$

In dem oben betrachteten Fall ist  $tb(K) = 0$ . Also ist die Flächenrahmung gleich der Kontaktrahmung, und somit führt eine  $(-1)$ -Kontakt-Dehn-Chirurgie entlang dieses rechtshändigen Legendre-Kleeblattknotens zu einer eindeutigen Kontaktstruktur  $\xi'$  auf der Homologiesphäre  $H$ . Da  $(S^3, \xi_{st})$  nach Beispiel 2.38 symplektisch füllbar ist, ist nach Satz 5.12 auch  $(H, \xi')$  symplektisch füllbar.

Der rechtshändige Legendre-Kleeblattknoten in Abbildung 5.8 wäre allerdings nicht die natürliche Wahl. Zunächst würde man folgenden Legendre-Kleeblattknoten betrachten:

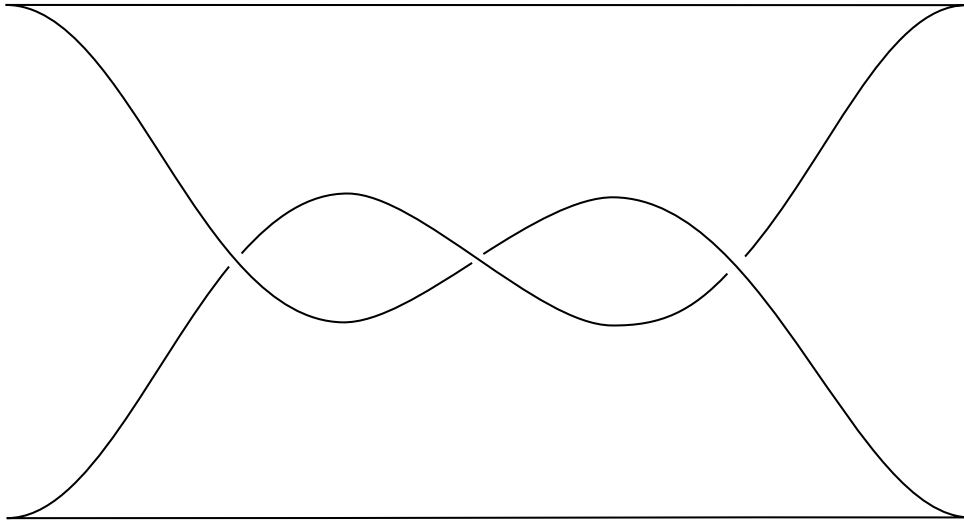


Abbildung 5.10: Ein anderes rechtshändiges Legendre-Kleeblatt

Dieses Legendre-Kleeblatt hat aber (nach Korollar 5.15)  $tb(K) = 1$ , und somit müsste man eine  $(-2)$ -Kontaktchirurgie ausführen, um die Homologiesphäre  $H$  zu erhalten. In diesem Fall kann man aber nichts über die entstandene Kontaktstruktur aussagen. Mit dieser Methode kann man natürlich auch eine Kontaktstruktur auf der Poincaré-Homologiesphäre  $P$  erhalten. Dazu betrachtet man folgenden linkshändigen Legendre-Kleeblattknoten:

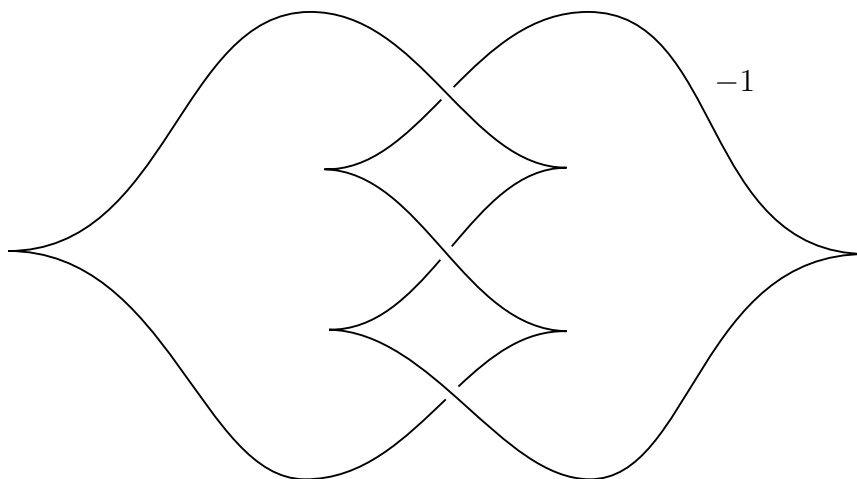


Abbildung 5.11: Ein linkshändiges Legendre-Kleeblatt

Dieser hat nach dem Korollar oben  $tb(K) = -6$ . Also erhält man keine genaueren Aussagen über die neu entstandene Kontaktstruktur. Allerdings könnte man auch hier wieder versuchen, eine äquivalente Chirurgiebeschreibung der Poincaré-Homologiesphäre mittels einer Verschlingung zu erhalten, in der alle Chirurgiekoeffizienten umgerechnet in die Kontaktrahmung einer  $\frac{1}{n}$ -Kontaktchirurgie entsprechen.

Diese Methoden lassen sich natürlich auch auf kompliziertere Probleme anwenden. Zum Beispiel wird in [5] gezeigt, dass sich jede Kontakt-Dehn-Chirurgie in eine Sequenz von  $(\pm 1)$ -Kontaktchirurgien übersetzen lässt. Damit und mit dem Satz von Dehn-Lickorish wird dann gezeigt, dass jede Kontaktmannigfaltigkeit durch  $(\pm 1)$ -Kontaktchirurgie aus  $(S^3, \xi_{st})$  erhalten werden kann (für einen einfacheren Beweis siehe auch [13, Satz 6.4.4]). In [13, Kapitel 6.5] wird damit dann noch einiges mehr bewiesen, zum Beispiel der Eliashberg-Gromov-Straffheitssatz 2.42.

Mit diesen Methoden folgt auch ein Beweis des Theorems von Lutz-Martinet, welches besagt, dass jedes koorientierte Ebenenfeld auf einer orientierbaren geschlossenen Mannigfaltigkeit homotop zu einer Kontaktstruktur ist (für diesen Beweis siehe [7]). Für weitere Anwendungen siehe auch [28].

Andererseits kann man mit Kontakt-Dehn-Chirurgie auch symplektische Mannigfaltigkeiten konstruieren. Zum Beispiel liefert die  $(-1)$ -Kontakt-Dehn-Chirurgie an dem Legendre-Kleeblatt aus Abbildung 5.8 einen symplektischen Kobordismus von der leeren Menge zu  $(H, \xi')$ , also eine symplektische Mannigfaltigkeit mit Rand  $H$  (siehe Abbildung 5.12).

Weiter gibt es nach Satz 2.43 einen symplektischen Kobordismus von einer beliebigen Kontaktmannigfaltigkeit zu der leeren Menge. Wenn man diese symplektische Mannigfaltigkeit an die vorige anklebt, erhält man sogar eine symplektische Mannigfaltigkeit ohne Rand. (Der Kobordismus von  $(H, \xi')$  zur leeren Menge ist in Abbildung 5.12 gestrichelt angedeutet.)

Genauso funktioniert dies natürlich auch für die stark symplektisch füllbaren Kontaktstrukturen auf den Linsenräumen vom Anfang dieses Abschnittes.

So kann man zum Beispiel auch stark symplektisch füllbare Kontaktstrukturen auf dem 3-Torus und einigen anderen Torusbündeln über  $S^1$  konstruieren. Die Chirurgie-Diagramme aus Kapitel 4 (zum Beispiel das von  $T^3$  gegeben durch die Chirurgie an den Borromäischen Ringen) sind dazu nicht gut geeignet, da man diese nicht so leicht als  $(-1)$ -Kontakt-Dehn-Chirurgie realisieren kann. Stattdessen liest man die Kirby-Diagramme aus Kapitel 4 als Chirurgie-Diagramme in  $S^1 \times S^2 \# S^1 \times S^2$ .

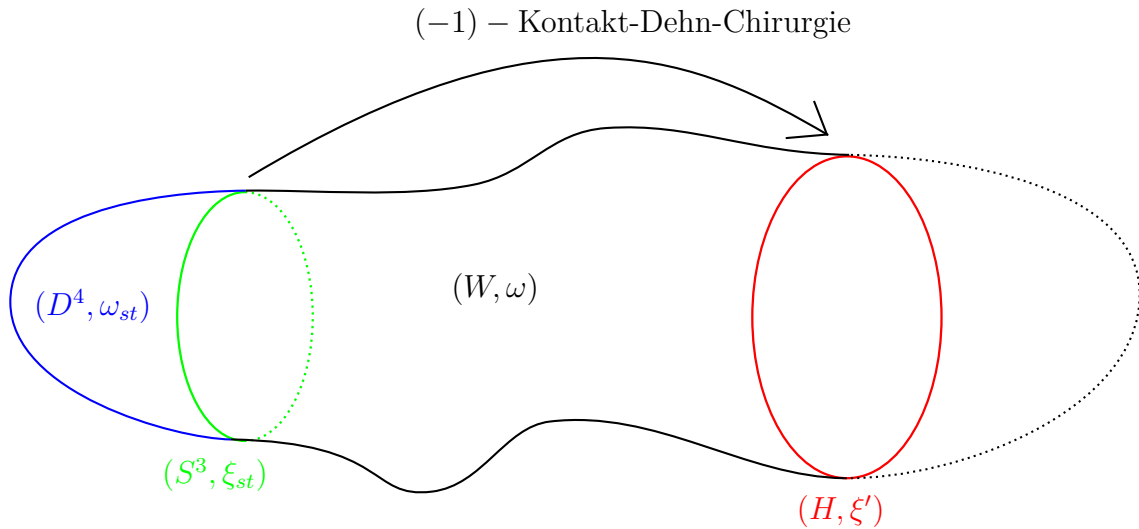


Abbildung 5.12: Füllung der Homologiesphäre  $H$

Dazu zeigt man zuerst (siehe [16, Satz 11.1.8]), dass  $\#_m S^1 \times S^2$  eine eindeutige positive, stark symplektisch füllbare und straffe Kontaktstruktur  $\xi_{st}$  trägt, welche man aus  $(S^3, \xi_{st})$  durch Entfernen von  $m$  3-Ball-Paaren und Identifikation der Ränder mittels eines Kontaktomorphismus erhält (siehe Abbildung 5.13).

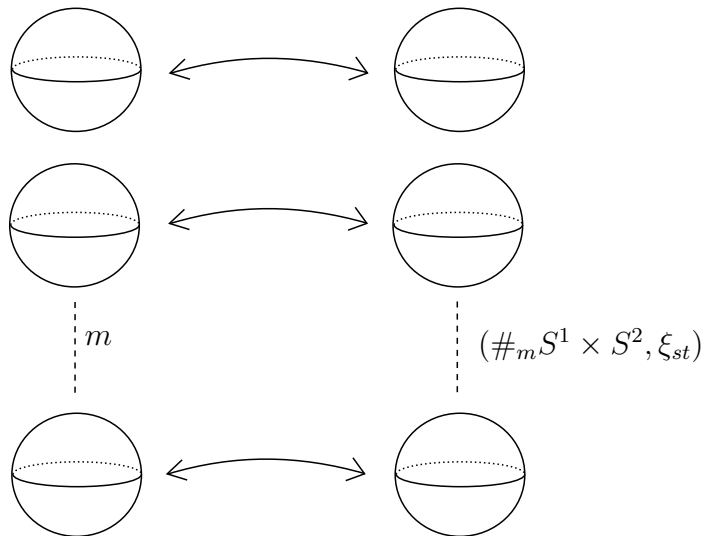


Abbildung 5.13: Die Standardkontaktstruktur  $\xi_{st}$  auf  $\#_m S^1 \times S^2$ .

Nun kann man Kontakt-Dehn-Chirurgie an Legendre-Knoten in  $(\#_m S^1 \times S^2, \xi_{st})$  ausführen, die auch über die 1-Henkel laufen. Falls der Chirurgiekoeffizient bezüglich der Kontaktrahmung  $-1$  ist, folgt mit Satz 5.12, dass die entstehende Kontaktstruktur stark



symplektisch füllbar ist (siehe auch [16, Satz 11.2.2]). Zum Beispiel liefert also das Diagramm aus Abbildung 5.14 links eine stark symplektisch füllbare Kontaktstruktur auf der entstehenden Mannigfaltigkeit.

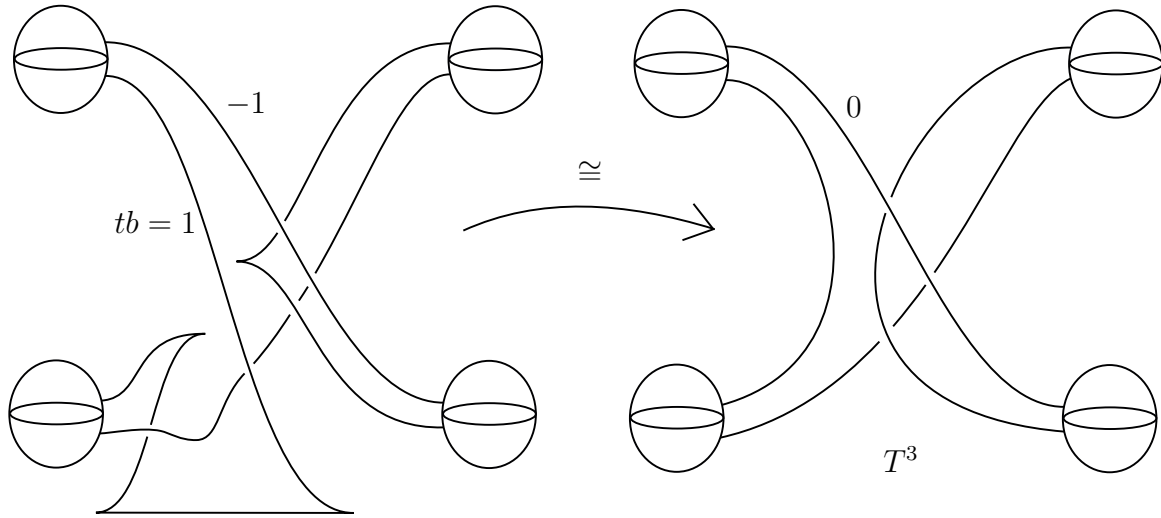


Abbildung 5.14: Die stark symplektisch füllbare Kontaktstruktur  $\xi_1$  auf  $T^3$ .

Um zu bestimmen, welche Mannigfaltigkeit dies liefert, bemerkt man zuerst, dass der Knoten homologisch trivial ist (siehe auch Abbildung 5.14 rechts). Damit ist die Thurston-Bennequin-Invariante wohldefiniert. Da  $(S^1 \times S^2 \# S^1 \times S^2, \xi_{st})$  aus  $(S^3, \xi_{st})$  nur durch Identifikation der 3-Bälle entsteht, kann man die Thurston-Bennequin-Invariante genau wie in  $(S^3, \xi_{st})$  berechnen. Da der Knoten vier Spitzen und Windungszahl 3 hat, ist die Thurston-Bennequin-Invariante gleich 1. Topologisch entspricht dies also einer Chirurgie mit Chirurgiekoeffizienten 0 (siehe Abbildung 5.14 rechts). Führt man an diesem Diagramm noch eine 1-Henkelverschiebung aus, so erhält man das Diagramm des 3-Torus aus Kapitel 4. Dies liefert also eine positive stark füllbare Kontaktstruktur auf  $T^3$ . Nach dem Füllbarkeitssatz von Eliashberg muss dies also die Kontaktstruktur  $\xi_1$  sein.

Durch Stabilisieren dieses Knotens kann man dann jede beliebige negative Rahmung erhalten, und dies liefert so für jedes  $k < 0$  eine stark füllbare Kontaktstruktur auf  $T_k^3$  (siehe Abbildung 4.12). Hier ist jedoch nicht sofort klar, welche Kontaktstruktur dies genau liefert (siehe auch Bemerkung 5.25).

Man kann mit Kontakt-Dehn-Chirurgie-Diagrammen auch virtuell überdrehte Kontaktstrukturen ausfindig machen, zum Beispiel mit folgendem Lemma (siehe [16, Satz 11.2.12]).

**Lemma 5.16.**

Wenn man in einem Kontakt-Dehn-Chirurgie-Diagramm einer Kontaktmannigfaltigkeit  $(M, \xi)$  einen Ausschnitt der Form wie in Abbildung 5.15 finden kann, wobei  $K$  zu der Verschlingung des Legendre-Knotens gehören soll und  $\gamma$  eine in  $M$  nicht-triviale Kurve ist, dann ist die universelle Kontaktüberlagerung von  $(M, \xi)$  überdreht.

Wenn also  $\xi$  straff ist (zum Beispiel als stark symplektisch füllbare Kontaktstruktur), dann ist  $\xi$  virtuell überdreht.

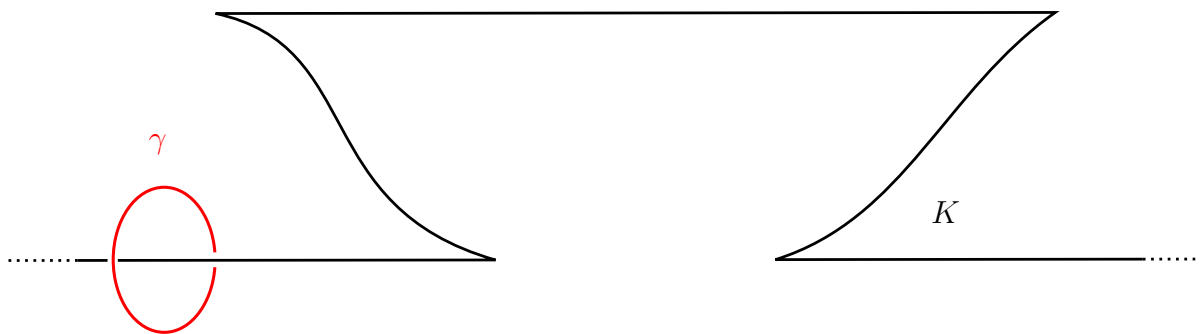


Abbildung 5.15: Eine Kontaktstruktur mit überdrehter Kontaktüberlagerung

*Beweis.*

Betrachte dazu folgende Legendre-Kurve  $C$  mit  $tb(C) = -2$ .

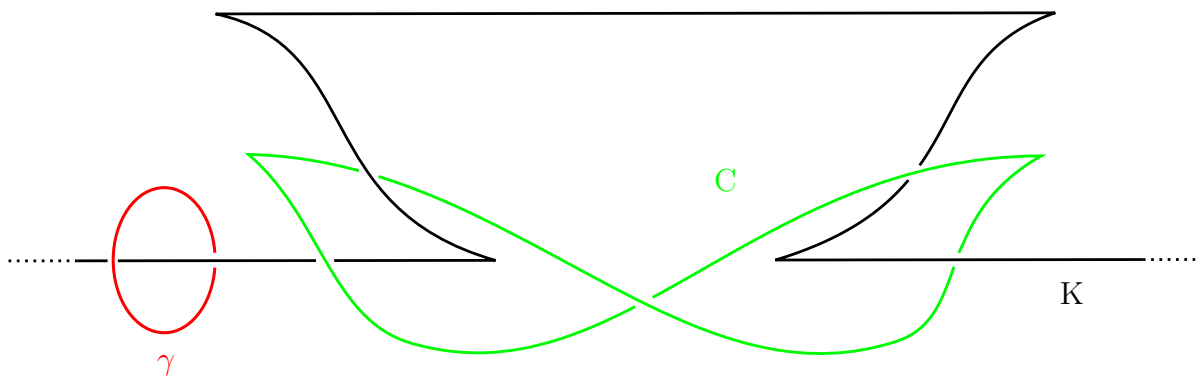


Abbildung 5.16: Der Rand  $C$  einer immersiertsen überdrehten Scheibe

Rein topologisch ist der obige Ausschnitt äquivalent zu:

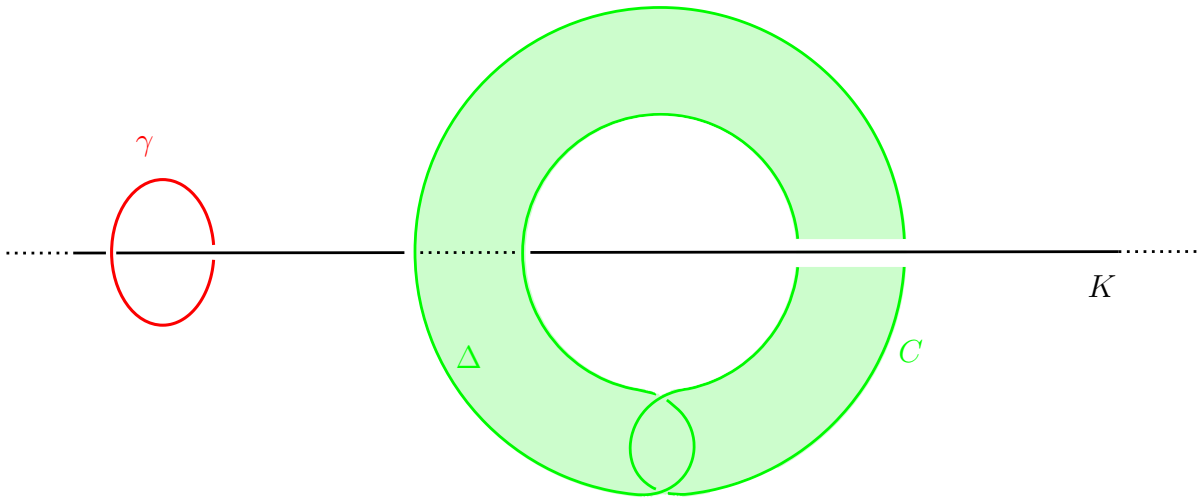


Abbildung 5.17: Eine immersierte Scheibe in  $M$ , die zu einer eingebetteten Scheibe in der universellen Überlagerung anhebt.

$C$  berandet also eine immersierte Scheibe  $\Delta$  (siehe auch Beweis von Korollar 2.25), die  $K$  nicht berührt und somit auch eine immersierte Scheibe in  $M$  liefert, die man auch wieder mit  $\Delta$  bezeichnet. Die Rahmung von  $C = \partial\Delta$  induziert von  $\Delta$  entspricht der Tafelrahmung und ist somit gegeben durch  $-2$ . Insbesondere entspricht die Kontaktrahmung also der Rahmung, die durch  $\Delta$  gegeben ist.

Da die Schleife  $\gamma$  nach Voraussetzung in  $M$  nicht-trivial ist, ist die Anhebung von  $\gamma$  auf die universelle Überlagerung  $\hat{M}$  von  $M$  ein Weg (siehe auch Beweis von Korollar 2.25). Die Anhebung  $\hat{\Delta}$  von  $\Delta$  auf die universelle Kontaktüberlagerung  $(\hat{M}, \hat{\xi})$  ist dann eine eingebettete Scheibe. Da die universelle Kontaktüberlagerung ein lokaler Kontaktomorphismus ist, ist die Flächenrahmung von  $\partial\hat{\Delta}$  immer noch gleich der Kontaktrahmung. Somit ist  $\hat{\Delta}$  eine überdrehte Scheibe in  $(\hat{M}, \hat{\xi})$ .  $\square$

Mit diesem Lemma kann man nun viele virtuell überdrehte Kontaktstrukturen auf geschlossenen Mannigfaltigkeiten konstruieren. Zum Beispiel kann man das Kontakt-Dehn-Chirurgie-Diagramm aus Abbildung 5.18 betrachten.

Wie eben rechnet man aus, dass dies eine stark symplektisch füllbare und somit straffe Kontaktstruktur auf dem Linsenraum  $L(4, 1)$  liefert. Da ein Meridian  $\gamma$  dieses Knotens in dem entstehenden Linsenraum nicht-trivial ist, ist die entstehende Kontaktstruktur nach dem vorigen Lemma virtuell überdreht.

Durch Stabilisierung dieses Knotens kann man so auf allen Linsenräumen  $L(p, 1)$  für

$p \geq 4$  virtuell überdrehte Kontaktstrukturen konstruieren.

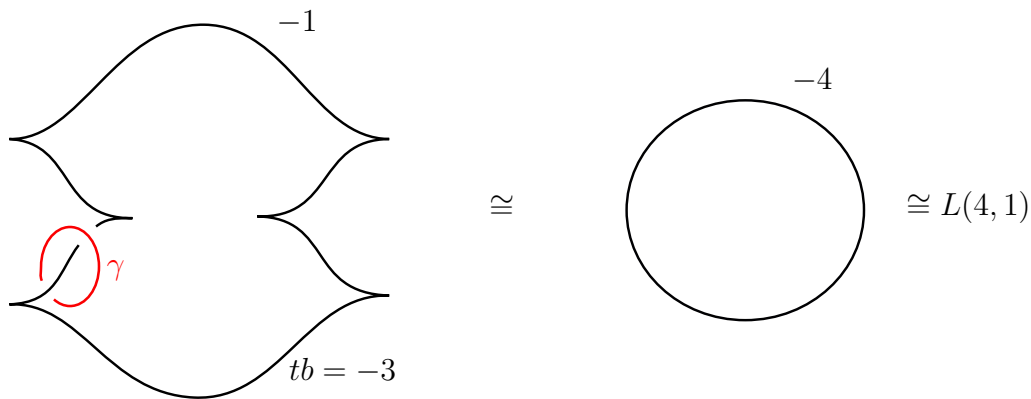


Abbildung 5.18: Eine virtuell überdrehte Kontaktstruktur auf dem Linsenraum  $L(4, 1)$

Man kann so aber auch virtuell überdrehte Kontaktstrukturen auf Torusbündeln über  $S^1$  konstruieren. Dazu betrachte das Kontakt-Dehn-Chirurgie-Diagramm aus Abbildung 5.19 links oben. (Vergleiche auch mit [28, Abbildung 12.4 und Aufgabe 12.2.8], dort ist allerdings eine Kreuzung falsch, weswegen dieses Beispiel dort nicht funktioniert.) Die beiden einfachen Legendre-Unknoten haben Thurston-Bennequin-Invariante  $-1$ , der kompliziertere Knoten  $K$  hat 12 Spitzen und Windungszahl 7, die Thurston-Bennequin-Invariante von  $K$  ist also  $+1$ . In Abbildung 5.19 wird gezeigt, dass dieses Dehn-Chirurgie-Diagramm topologisch das Torusbündel  $T^3(2) = T_{T^2}^3$  liefert.

Dabei wurde im ersten Schritt das Kontakt-Dehn-Chirurgie-Diagramm in ein topologisches Dehn-Chirurgie-Diagramm übersetzt. Im zweiten Schritt wurde ein  $(+1)$ -facher Rolfsen-Twist (siehe dafür [30, Kapitel 9.H]) an dem oberen Unknoten ausgeführt um damit die Verdrillung rechts oben aufzulösen. (Da die Rahmung des Unknotens 0 ist ändern sich die Chirurgiekoeffizienten dabei nicht.) Im dritten Schritt wird dann ein  $(+1)$ -facher Rolfsen-Twist entlang des unteren Unknotens ausgeführt. Der vierte Schritt ist eine einfache Isotopie und liefert dann eine Darstellung der Borromäischen Ringe und somit nach Abbildung 4.12 ein Diagramm von  $T^3(2)$ .

Das Kontakt-Dehn-Chirurgie-Diagramm aus Abbildung 5.19 liefert also eine Kontaktstruktur  $\xi_{virt}$  auf  $T^3(2)$ . Wenn man nun den roten Abschnitt in Abbildung 5.20 betrachtet, sieht man, dass man diesen Abschnitt durch eine einfache Legendre-Isotopie auf eine Form, wie in Lemma 5.16 gefordert, bringen kann. Nach diesem Lemma ist die universelle Kontaktüberlagerung von  $(T^3(2), \xi_{virt})$  also überdreht. (Man bemerke noch, dass die Kurve  $\gamma$  auch hier, als  $S^1$ -Faktor in dem Torusbündel, nicht-trivial ist.)

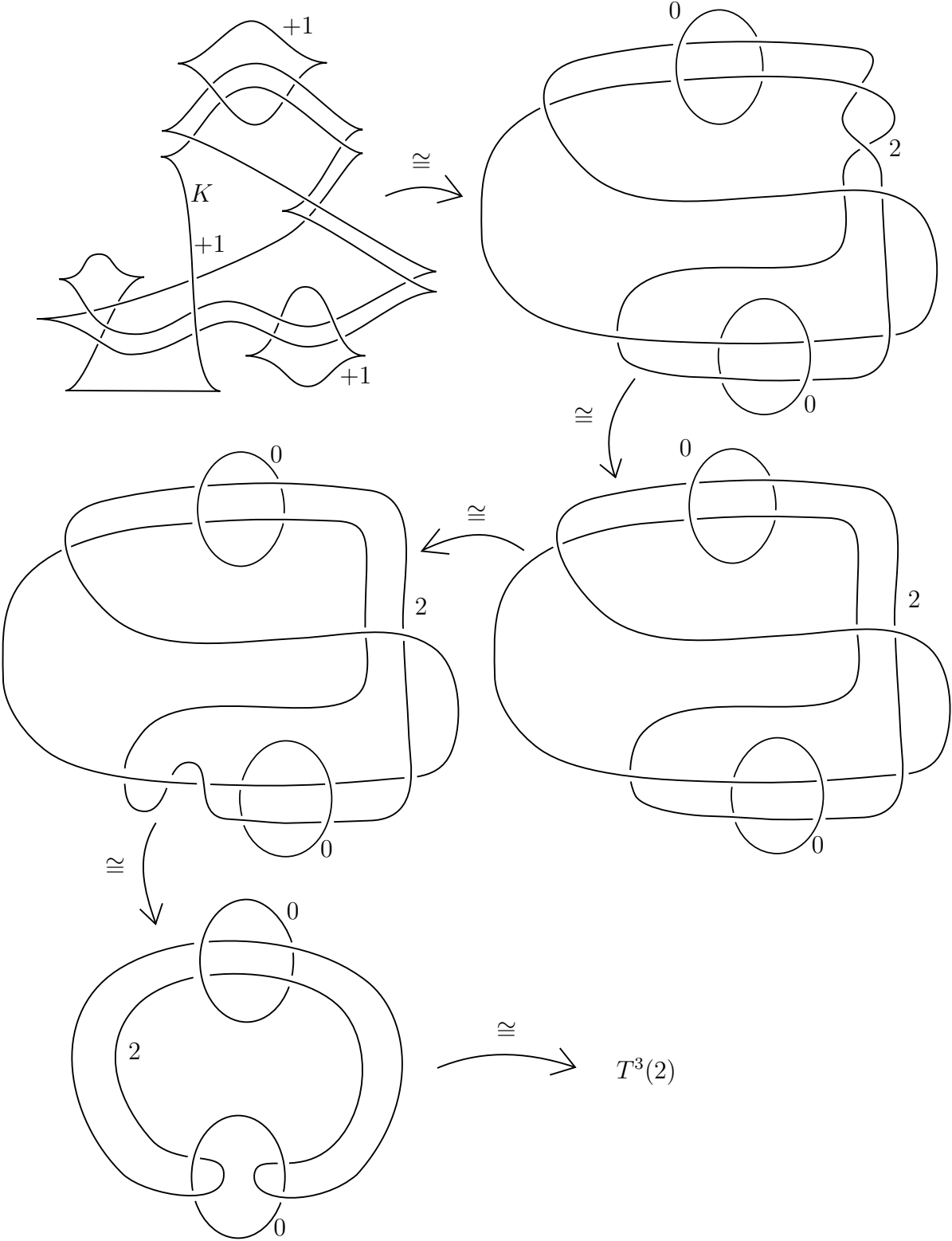


Abbildung 5.19: Eine virtuell überdrehte Kontaktstruktur auf  $T^3(2)$

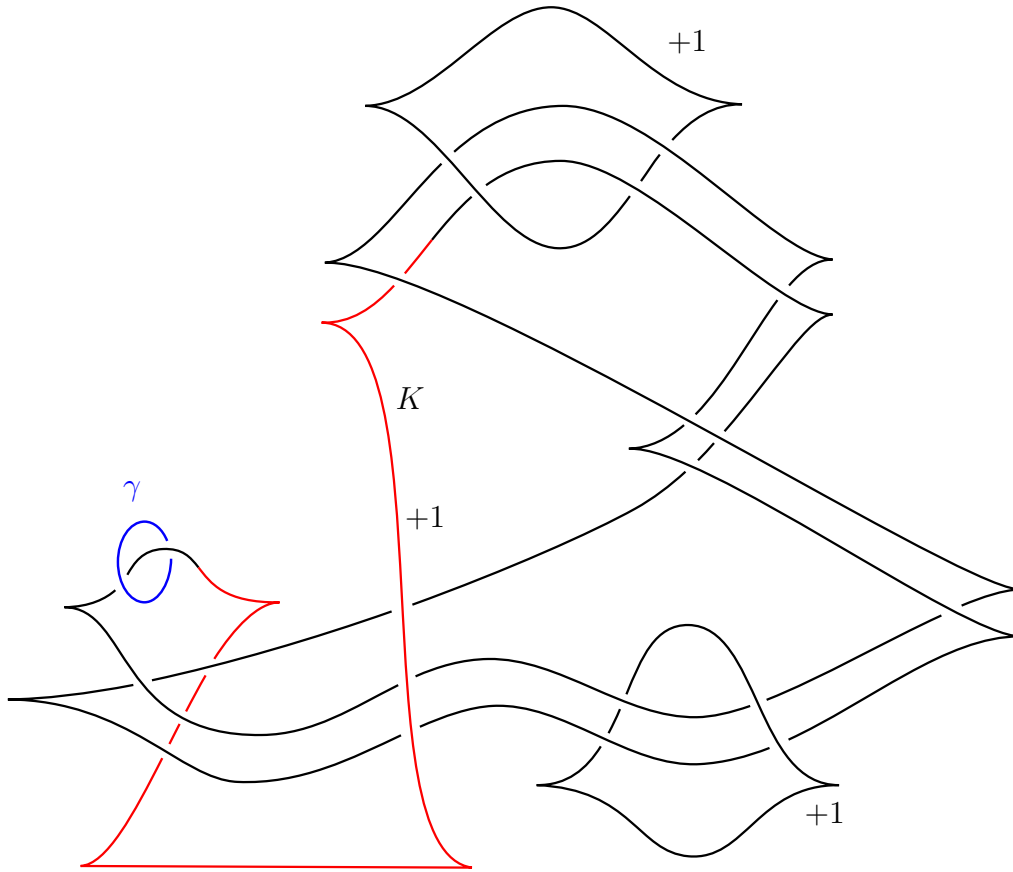


Abbildung 5.20: Eine überdrehte Scheibe in der universellen Kontaktüberlagerung von  $(T^3(2), \xi_{virt})$

Allerdings tritt diese Kontaktstruktur diesmal nicht als starke symplektische Füllung auf, weswegen man hier nicht sofort schließen kann, dass  $\xi_{virt}$  straff ist. Durch die Berechnung von speziellen Invarianten kann man aber trotzdem zeigen, dass  $\xi_{virt}$  straff ist (siehe dafür [28, Aufgabe 12.2.8 (c)]) und  $(T^3(2), \xi_{virt})$  somit wirklich eine virtuell überdrehte Kontaktmannigfaltigkeit ist.

Die Klassifikation der straffen Kontaktstrukturen auf Torusbündeln (siehe [15, Satz 1.3] und Satz 3.44) liefert dann sogar, dass es auf diesem Torusbündel nur eine einzige virtuell überdrehte Kontaktstruktur gibt, die dann also durch  $\xi_{virt}$  gegeben ist. In [26] wird durch Berechnung von Homotopie-Invarianten sogar gezeigt, dass diese Kontaktstruktur weder schwach noch stark symplektisch füllbar ist.

Ähnlich kann man auch virtuell überdrehte Kontaktstrukturen auf anderen Torusbündeln konstruieren (siehe [26]).

## 5.4 Die starke Füllbarkeit der Torusbündel und der Algorithmus

In diesem Abschnitt soll der Teil über die starke symplektische Füllbarkeit aus dem Füllbarkeitssatz von Ding-Geiges 3.46 bewiesen werden. Wie schon angekündigt benutzt man dazu Kontakt-Dehn-Chirurgie und Satz 5.12, um dieses Problem auf den Füllbarkeitssatz von Eliashberg 2.39 zurückzuführen. Der entscheidende Schritt dabei ist das folgende Lemma.

### Lemma 5.17.

Sei  $A_0 \in SL_2(\mathbb{Z})$  eine beliebige vorgegebene Matrix und sei  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  beliebig. Dann kann man für  $n_0 > 1$  aus  $(T_{A_0}^3, \xi_{n_0})$  mittels  $-\frac{1}{k}$ -Kontakt-Dehn-Chirurgie die Kontaktmannigfaltigkeit  $(T_A^3, \xi_n)$  erhalten. Dabei ist  $A = T^k A_0$  und  $n \in \{n_0, n_0 + 1, n_0 - 1\}$ .

Weiter ist der Wert  $n$  in Abhängigkeit von  $A_0$ ,  $k$  und  $n_0$  wie folgt bestimmt:

Ist  $A_0 = T^l$  für ein  $l \in \mathbb{Z}$ , so ist  $n$  durch folgende Tabelle festgelegt:

$k$	$l$	$n$
$k > 0$	$l < k$ oder $l \geq 0$	$n_0$
$k > 0$	$-k \leq l < 0$	$n_0 - 1$
$k < 0$	$l \geq -k$ oder $l < 0$	$n_0$
$k < 0$	$0 \leq l < -k$	$n_0 + 1$

Ist  $A_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}$  nicht vom Typ  $T^l$ , so nennt man  $A_0$  **kritisch**, falls  $\text{Spur}(A_0) > 2$  und  $b_0 < 0$  gilt. Im Fall  $A_0 \neq T^l$  ist  $n$  dann durch folgende Tabelle bestimmt:

	$A$ nicht-kritisch	$A$ kritisch
$A_0$ nicht-kritisch	$n = n_0$	$n = n_0 + 1$
$A_0$ kritisch	$n = n_0 - 1$	$n = n_0$

Weiter gilt dieses Lemma auch für  $n_0 = 1$ , solange  $n \neq 0$  ist.

Der Beweis dieses Lemmas ist relativ aufwändig und technisch und wird deshalb ins nächste Kapitel verschoben. In diesem Abschnitt wird dieses Lemma als bewiesen angenommen und daraus dann der zweite Teil des Füllbarkeitssatzes von Ding-Geiges 3.46 gefolgert.

**Bemerkung 5.18**

Der Legendre-Knoten, an dem die obige Kontakt-Dehn-Chirurgie ausgeführt wird, ist ein Legendre-Knoten, der in der  $\{t = 0\}$ -Ebene den  $S^1$ -Faktor einmal in  $y$ -Richtung durchläuft (siehe Beispiel 2.11 (3)). Mehr dazu im nächsten Kapitel. Für diesen Abschnitt ist überhaupt nicht wichtig, an welchem Knoten die Kontakt-Dehn-Chirurgie genau ausgeführt wird.

Aus dem obigen Lemma erhält man sofort folgendes Korollar.

**Korollar 5.19.**

*Ist  $k < 0$ , so ist  $n \in \{n_0, n_0 + 1\}$ . Der Fall  $n = n_0 - 1$  kann also für  $k < 0$  unabhängig von der Matrix  $A_0$  nicht vorkommen.*

*Beweis.*

Sei  $A_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}$ , dann gilt  $A = T^k A_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 + k a_0 & d_0 + k b_0 \end{pmatrix}$ . Wenn  $A_0$  kritisch ist, gilt  $b_0 < 0$ , und wegen  $k < 0$  folgt dann, dass

$$\text{Spur}(A) = \underbrace{\text{Spur}(A_0)}_{>2} + \underbrace{k b_0}_{>0} > 2$$

und  $b = b_0 < 0$  ist. Also ist  $A$  dann auch kritisch. Die Aussage folgt dann sofort aus Lemma 5.17. □

Hiermit kann man nun den Teil über die starke symplektische Füllbarkeit aus dem Füllbarkeitssatz von Ding-Geiges zeigen:

**Satz 5.20** (Starke symplektische Füllbarkeit von Torusbündeln über  $S^1$ ).

*Für jede Matrix  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$  existiert ein  $n(A) \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n > n(A)$  die Kontaktmannigfaltigkeit  $(T_A^3, \xi_n)$  **nicht** stark symplektisch füllbar ist.*

*Beweis.*

Nach Korollar 3.26 kann man  $A$  schreiben als  $A = A_m \cdot \dots \cdot A_1$  mit  $A_i \in \{T^{-k_i}, R^{k_i}\}$  und  $k_i > 0$ . Die Idee ist nun, mit der Kontaktmannigfaltigkeit  $(T^3, \xi_n)$  für  $n \geq 2$  zu beginnen, welche nach dem Füllbarkeitssatz von Eliashberg 2.39 nicht stark symplektisch füllbar ist, und eine Sequenz von  $+\frac{1}{k_i}$ -Kontakt-Dehn-Chirurgien auszuführen, bis man  $(T_A^3, \xi_{n+n(A)-1})$  erhält. Nach Satz 5.12 ist diese Kontaktmannigfaltigkeit dann nicht stark symplektisch füllbar.

Dazu geht man wie folgt vor: Ohne Einschränkung kann man annehmen, dass  $A_1 = T^{-k_1}$  gilt (ansonsten setzt man  $R^{k_1}$  an die Stelle von  $A_m$  und erhält so eine zu  $A$  ähnliche



Matrix). Nun führt man Kontakt-Dehn-Chirurgien wie in folgendem Diagramm (für  $n = 2$ ) schematisch dargestellt aus:

$$\begin{array}{c}
 \overbrace{(T^3, \xi_2)}^{\text{nicht füllbar}} \xrightarrow{+\frac{1}{k_1}} (T_{T^{-k_1}}^3, \xi_3) \\
 \cong (T_{S T^{-k_1} S^{-1}}^3, \xi_3) \\
 \xrightarrow{+\frac{1}{k_2}} (T_{T^{-k_2} S T^{-k_1} S^{-1}}^3, \xi_{3+n_2}) \\
 \cong (T_{R^{k_2} T^{-k_1}}^3, \xi_{3+n_2}) \\
 \xrightarrow{+\frac{1}{k_3}} (T_{T^{-k_3} R^{k_2} T^{-k_1}}^3, \xi_{3+n_3}) \\
 \dots \dots \dots \\
 \xrightarrow{+\frac{1}{k_m}} \underbrace{(T_A^3, \xi_{n+n(A)-1})}_{\text{nicht füllbar}}
 \end{array}$$

Hierbei bezeichnen die Pfeile die Kontakt-Dehn-Chirurgien mit entsprechendem Chirurgiekoeffizienten,  $\cong$  bedeutet kontaktomorph und  $n_i$  ist eine ganze Zahl aus  $\{0, 1, \dots, i\}$ . Genauer führt man zuerst an  $(T^3, \xi_n)$  eine  $+\frac{1}{k_1}$ -Kontakt-Dehn-Chirurgie aus und erhält nach Lemma 5.17 die Kontaktmannigfaltigkeit  $(T_{T^{-k_1}}^3, \xi_{n+1})$ . Nach Lemma 3.42 ist diese kontaktomorph zu  $(T_{S T^{-k_1} S^{-1}}^3, \xi_{n+1})$ . Im zweiten Schritt führt man nun an letzterer Kontaktmannigfaltigkeit eine  $+\frac{1}{k_2}$ -Kontakt-Dehn-Chirurgie aus und erhält nach Korollar 5.19 die Kontaktmannigfaltigkeit  $(T_{T^{-k_2} S T^{-k_1} S^{-1}}^3, \xi_{n+1+n_2})$ , die wiederum nach Lemma 3.42 kontaktomorph zu  $(T_{S^{-1} T^{-k_2} S}^3, \xi_{n+1+n_2})$  ist. Wegen  $S^{-1} T^{-k_2} S = R^{k_2}$  ist diese Kontaktmannigfaltigkeit gleich  $(T_{R^{k_2} T^{-k_1}}^3, \xi_{n+1+n_2}) = (T_{A_2 A_1}^3, \xi_{n+1+n_2})$ , wobei  $n_2 \in \{0, 1\}$  ist und bei gegebenen Werten der  $k_i$  über Lemma 5.17 exakt bestimmt werden kann. Als nächstes führt man wieder wie im ersten Schritt eine  $+\frac{1}{k_3}$ -Kontakt-Dehn-Chirurgie aus, um  $(T_{A_3 A_2 A_1}^3, \xi_{n+1+n_3})$  mit  $n_3 \in \{0, 1, 2\}$  zu erhalten. Dieses Verfahren führt man solange fort, bis man bei  $(T_A^3, \xi_{n+n(A)-1})$  angelangt ist.  $\square$

**Bemerkung 5.21**

- (1) Im obigen Beweis sieht man, dass mit dieser Methode immer  $n(A) \geq 2$  folgt. Man kann nun vermuten, dass hier sogar die Gleichheit für alle Matrizen  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$  gilt. Mit einer etwas anderen Version von Lemma 5.17 könnte man vielleicht sogar zeigen, dass  $(T_A^3, \xi_n)$  für  $n > 1$  und beliebiges  $A$  nicht stark symplektisch füllbar ist.
- (2) Der obige Beweis liefert zusammen mit dem Algorithmus aus Bemerkung 3.27 einen Algorithmus, um bei gegebener Matrix  $A$  ein mögliches  $n(A)$  zu bestimmen. Wann dieses  $n(A)$  minimal ist, bleibt jedoch eine offene Frage. Dazu im Folgenden einige Beispiele.

**Beispiel 5.22**

(1) Im Beweis oben hat man schon gesehen, dass für  $k \leq 0$  die Kontaktmannigfaltigkeit  $(T_+^3(k), \xi_n)$  für  $n \geq 3$  nicht stark symplektisch füllbar ist.

(2) Weiter gilt, dass  $(T_{-S}^3, \xi_n)$  für  $n \geq 3$  nicht stark symplektisch füllbar ist. Um dies zu sehen, schreibt man  $-S = T^{-1}RT^{-1}$  und führt dann den Algorithmus aus obigem Beweis aus, das heißt man führt folgende Kontakt-Dehn-Chirurgien und folgende Ähnlichkeitstransformationen aus:

$$\begin{aligned} \overbrace{(T^3, \xi_2)}^{\text{nicht füllbar}} &\xrightarrow{+1} (T_{T^{-1}}^3, \xi_3) \\ &\cong (T_{ST^{-1}S^{-1}}^3, \xi_3) \\ &\xrightarrow{+1} (T_{T^{-1}ST^{-1}S^{-1}}^3, \xi_3) \\ &\cong (T_{R^1T^{-1}}^3, \xi_3) \\ &\xrightarrow{+1} \underbrace{(T_{T^{-1}R^1T^{-1}}^3, \xi_3)}_{\text{nicht füllbar}} \end{aligned}$$

Um die Giroux-Torsionen der entsprechenden Kontaktstrukturen zu erhalten, berechnet man an jeder Kontakt-Dehn-Chirurgie die Matrizen und benutzt dann Lemma 5.17. Vollkommen analog geht dies dann natürlich auch für alle  $n \geq 2$ .

(3) Genauso schreibt man  $-\text{Id} = (RT^{-1})^3$  und kann dann folgende Sequenz ausführen:

$$\begin{aligned} \overbrace{(T_{-S}^3, \xi_3)}^{\text{nicht füllbar}} &\cong (T_{ST^{-1}RT^{-1}S^{-1}}^3, \xi_3) \\ &\xrightarrow{+1} (T_{T^{-1}ST^{-1}RT^{-1}S^{-1}}^3, \xi_3) \\ &\cong (T_{(RT^{-1})^2}^3, \xi_3) \\ &\xrightarrow{+1} (T_{T^{-1}(RT^{-1})^2}^3, \xi_3) \\ &\cong (T_{ST^{-1}(RT^{-1})^2S^{-1}}^3, \xi_3) \\ &\xrightarrow{+1} (T_{T^{-1}ST^{-1}(RT^{-1})^2S^{-1}}^3, \xi_3) \\ &\cong \underbrace{(T_{-\text{Id}}^3, \xi_3)}_{\text{nicht füllbar}} \end{aligned}$$

$(T_{-\text{Id}}^3, \xi_n)$  ist also für  $n \geq 3$  auch nicht stark symplektisch füllbar. Ähnlich zeigt man dies auch für  $(T_S^3, \xi_n)$ .

(4) Man kann aber auch kompliziertere Matrizen betrachten, wie zum Beispiel die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Um obigen Algorithmus anzuwenden, benötigt man zuerst eine Darstellung von  $A$  als Produkt von  $T^{-1}$  und  $R$ . Dazu kann man zum Beispiel den Algorithmus aus

dem Beweis von Satz 3.18 benutzen und erhält  $A = R^5SR^{-1}$ . Mit  $R^{-1} = (T^{-1}R)^5T^{-1}$ ,  $S = -T^{-1}RT^{-1}$  und  $(T^{-1}R)^3 = -\text{Id}$  folgt

$$A = R^5T^{-1}RT^{-2}(RT^{-1})^2.$$

Man kann an der Matrix aber auch direkt erkennen, dass  $R^{-6}A = -T^{-1}$  gilt und man somit die deutlich einfachere Darstellung

$$A = -R^6T^{-1} = (T^{-1}R)^3R^6T^{-1}$$

erhält. Eine weitere Darstellung ist

$$A = R^7T^{-2}RT^{-3}.$$

Hier sieht man also insbesondere auch, dass eine solche Darstellung in keinster Weise eindeutig ist. Nun führt man zum Beispiel folgende Sequenz (zugehörig zu der zweiten Darstellung von  $A$ ) aus:

$$\begin{aligned} \overbrace{(T_{-\text{Id}}^3, \xi_3)}^{\text{nicht füllbar}} &\xrightarrow{+1} (T_{-T^{-1}}^3, \xi_3) \\ &\cong (T_{-ST^{-1}S^{-1}}^3, \xi_3) \\ &\xrightarrow{+\frac{1}{6}} (T_{-T^{-6}ST^{-1}S^{-1}}^3, \xi_4) \\ &\cong \underbrace{(T_A^3, \xi_4)}_{\text{nicht füllbar}} \end{aligned}$$

Wenn man in dieser Sequenz die Giroux-Torsionen berechnet, sieht man mit Lemma 5.17, dass bei der letzten Kontakt-Dehn-Chirurgie die Giroux-Torsion um eins größer wird. Hier erhält man also zuerst einmal nur, dass  $(T_A^3, \xi_n)$  für  $n \geq 4$  nicht stark symplektisch füllbar ist.

Nutzt man die Darstellung  $A = R^7T^{-2}RT^{-3}$ , erhält man dasselbe Ergebnis. Führt man jedoch die Sequenz zugehörig zu der Darstellung  $A = R^5T^{-1}RT^{-2}(RT^{-1})^2$  aus, rechnet man wie oben explizit nach, dass die Giroux-Torsion nur im ersten Schritt um eins wächst. Somit erhält man dann, dass  $(T_A^3, \xi_n)$  sogar für  $n \geq 3$  nicht stark symplektisch füllbar ist. Ob man zu jedem beliebigen  $A$  eine Darstellung von  $A$  finden kann, so dass der obige Algorithmus dieses Resultat für  $n \geq 3$  liefert, ist nicht sofort klar.

Andererseits kann man aber mit Lemma 5.17 auch positive Aussagen über die starke symplektische Füllbarkeit solcher Kontaktstrukturen treffen.

**Beispiel 5.23**

(1) Für  $k > 0$  ist  $(T_+^3(K), \xi_1)$  stark symplektisch füllbar. Um dies zu sehen, führt man eine  $(-\frac{1}{k})$ -Kontakt-Dehn-Chirurgie an  $(T^3, \xi_1)$  aus, um mit Lemma 5.17 die Kontakt-mannigfaltigkeit  $(T_+^3(k), \xi_1)$  zu erhalten. Da  $(T^3, \xi_1)$  stark symplektisch füllbar ist, folgt aus Satz 5.12, dass auch  $(T_+^3(k), \xi_1)$  stark symplektisch füllbar ist. Dies stellt man wieder schematisch in einem Diagramm dar:

$$\underbrace{(T^3, \xi_1)}_{\text{füllbar}} \xrightarrow{-\frac{1}{k}} \underbrace{(T_+^3(k), \xi_1)}_{\text{füllbar}}$$

(2) Ähnlich kann man dies für viele andere Torusbündel machen. Zum Beispiel kann man folgende Sequenz betrachten:

$$\begin{aligned} \underbrace{(T^3, \xi_1)}_{\text{füllbar}} &\xrightarrow{-1} (T_T^3, \xi_1) \\ &\cong (T_{STS^{-1}}^3, \xi_1) \\ &\xrightarrow{-1} (T_{TSTS^{-1}}^3, \xi_1) \\ &\cong (T_{R^{-1}T}^3, \xi_1) \\ &\xrightarrow{-1} (T_{TR^{-1}T}^3, \xi_1) \\ &= \underbrace{(T_S^3, \xi_1)}_{\text{füllbar}} \end{aligned}$$

Also ist auch  $(T_S^3, \xi_1)$  stark symplektisch füllbar.

(3) So kann man auch zeigen, dass  $(T_+^3(-1), \xi_1)$  stark symplektisch füllbar ist. Dazu schreibt man  $T^{-1} = (R^{-1}T)^5R^{-1}$  und betrachtet die dazu ähnliche Matrix  $R^{-2}T(R^{-1}T)^4$ . Wenn man die dazu gehörige Sequenz von Kontakt-Dehn-Chirurgien ausführt, an jeder Chirurgie die entsprechenden Matrizen explizit berechnet und dann Lemma 5.17 benutzt, folgt, dass  $(T_+^3(-1), \xi_1)$  aus  $(T^3, \xi_1)$  durch eine Sequenz von  $(-1)$ -Kontakt-Dehn-Chirurgien entsteht und somit stark symplektisch füllbar ist.

Versucht man aber für ein allgemeines  $k < 0$  (zum Beispiel per Induktion) zu zeigen, dass  $(T_+^3(k), \xi_1)$  stark symplektisch füllbar ist, so kommt man im Allgemeinen an eine Stelle, an der Lemma 5.17 nicht mehr anwendbar ist (da man im Allgemeinen für  $n = 1$  nicht immer  $\varphi(0) = 0$  wählen kann, siehe auch Beweis von Satz 3.39 (1)), und erhält

dann keine Aussage über die starke symplektische Füllbarkeit von  $\xi_1$ . In diesem Fall kann man die symplektische Füllung aber explizit angeben. Dies wird im Beweis der nächsten Proposition gemacht.

**Proposition 5.24.**

Für jedes  $k \in \mathbb{Z}$  ist  $(T_+^3(k), \xi_1)$  stark symplektisch füllbar.

*Beweis.* (siehe auch [4, Proposition 13])

Für  $k > 0$  folgt dies aus dem obigen Beispiel. Für  $k < 0$  kann man eine starke symplektische Füllung wie folgt konstruieren: Stelle  $\xi_1$  durch die Kontaktform

$$\beta := dy - kt dx$$

wie in Beispiel 3.38 (3) dar. Nach Satz 3.32 fasert  $T_+^3(k)$  (durch Projektion auf die  $xt$ -Ebene) als  $S^1$ -Bündel über  $T^2$ . Betrachte nun das zugehörige komplexe Geradenbündel, das heißt

$$W := \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}/\sim$$

mit kartesischen Koordinaten  $x$  und  $t$  auf den beiden  $\mathbb{R}$ -Faktoren, Polarkoordinaten  $(r, y) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  auf  $\mathbb{C}$  und Identifikation

$$\begin{aligned} (x, r, y, t) &\sim (x + 1, r, y, t), \\ (x, r, y, t) &\sim (x, r, kx + y, t + 1). \end{aligned}$$

Damit gilt dann  $T_+^3(k) = \{r = 1\} \subset W$ . Erweitere nun  $\beta$  über  $W$  durch die Forderung  $\beta(\partial_r) = 0$ . Damit gilt dann auf  $W$

$$\begin{aligned} \beta &= dy - kt dx, \\ d\beta &= k dx \wedge dt. \end{aligned}$$

Setze nun

$$\begin{aligned} \omega &:= d((r^2 + 1)\beta) \\ &= (r^2 + 1) d\beta + 2r dr \wedge \beta \\ &= (r^2 + 1)k dx \wedge dt + 2r dr \wedge dy + 2krt dr \wedge dx. \end{aligned}$$

Weiter rechnet man nach, dass

$$\omega^2 = 4(r^2 + 1)k \, dx \wedge (r \, dr \wedge dy) \wedge dt$$

eine Volumenform auf  $W$  ist. Da  $\omega$  weiter geschlossen ist, liefert  $\omega$  eine symplektische Struktur auf  $W$ . Betrachte jetzt das Vektorfeld

$$Y := \frac{r^2 + 1}{2r} \partial_r.$$

Man berechnet

$$\begin{aligned} \iota_Y \omega &= (r^2 + 1) \, dy - (r^2 + 1)kt \, dx = (r^2 + 1) \beta, \\ \mathfrak{L}_Y \omega &= d(\iota_Y \omega) = \omega. \end{aligned}$$

$Y$  ist also ein Liouville-Vektorfeld für  $\omega$  und induziert somit eine Kontaktstruktur auf jeder Hyperfläche transversal zu  $Y$ , also insbesondere auf  $T_+^3(k)$ . Diese Kontaktstruktur ist gegeben durch

$$\ker(r^2 + 1) \beta = \ker \beta = \xi_1.$$

Somit ist  $(\{(x, r, y, t) \in W \mid r \leq 1\}, \omega)$  also eine starke symplektische Füllung von  $(T_+^3(k), \xi_1)$ .  $\square$

**Bemerkung 5.25**

Dies lässt vermuten, dass für jedes  $A \in SL_2(\mathbb{R})$  die Kontaktmannigfaltigkeit  $(T_A^3, \xi_1)$  stark symplektisch füllbar ist. Wenn man Lemma 5.17 etwas abändern kann, so kann man dies vielleicht mit Kontakt-Dehn-Chirurgie zeigen (siehe auch Bemerkung 5.21 (1)).

## 6 Veränderung der Monodromie durch Dehn-Chirurgie

In diesem Kapitel soll Lemma 5.17 bewiesen werden, womit dann der Beweis des Füllbarkeitssatzes von Ding-Geiges abgeschlossen wäre. Das heißt, man möchte die Änderung der Monodromie eines Torusbündels über  $S^1$  um einen Dehn-Twist in eine Dehn-Chirurgie übersetzen. Dabei ist die Idee eine ähnliche wie im Beweis von Dehn-Lickorish (siehe [29, Satz 12.4]). Man schneidet einen Volltorus aus dem Torusbündel  $T_A^3$  heraus. Die resultierende Mannigfaltigkeit kann man nun entlang einer Torusfaser, die das entstandene Loch trifft, aufschneiden und so wieder zusammenkleben, dass dies genau einem rechtshändigen Dehn-Twist entspricht. Die entsprechende Monodromie ändert sich also genau um einen Dehn-Twist. Anschließend klebt man den entfernten Volltorus auf nun eine andere Art wieder herein, um erneut ein Torusbündel zu erhalten; dies entspricht genau einer Dehn-Chirurgie. In Beispiel 4.11 und Satz 4.12 hatten wir dies rein topologisch schon gesehen.

In Abschnitt 1 wird der obige Homöomorphismus sogar explizit konstruiert. Im zweiten Abschnitt wird dieser Homöomorphismus dann ohne größeren Aufwand zu einer glatten Abbildung abgeändert.

Wenn man dies auf Kontaktmannigfaltigkeiten erweitern will, dann muss man zuerst die entsprechenden Kontaktstrukturen konstruieren, welche so gewählt sind, dass die Knoten zu Legendre-Knoten mit Tubenumgebungen mit konvexem Rand werden und welche die richtige Giroux-Torsion besitzen. Diese Kontaktstrukturen werden im dritten Abschnitt konstruiert.

Im vierten Abschnitt wird der Diffeomorphismus aus Abschnitt 2, dann zu einem Kontaktomorphismus abgeändert und anschließend nachgerechnet, dass dieses Verfahren einer Kontakt-Dehn-Chirurgie mit Chirurgiekoeffizienten  $-1/k$  entspricht.

## 6.1 Der topologische Fall

Zuerst beschäftigen wir uns, um ein Gefühl zu bekommen, mit dem rein topologischen Fall. Im ersten Schritt zeigt man, dass zwei beliebige Torusbündel homöomorph werden, wenn man in jedem eine Torusfaser entfernt. Im Beweis von 3.5 wurde dies implizit schon gezeigt; hier wird sogar ein expliziter Homöomorphismus angegeben, da man diesen später noch benötigen wird.

### Lemma 6.1.

Seien  $T_{A_0}^3$  und  $T_A^3$  zwei beliebige Torusbündel und  $\nu_0(T_0) \subset T_{A_0}^3$  sowie  $\nu(T_0) \subset T_A^3$  offene Umgebungen der Torusfasern  $T_0 := \{t = 0\}$ . Dann ist  $T_{A_0}^3 \setminus \nu_0(T_0)$  homöomorph zu  $T_A^3 \setminus \nu(T_0)$ .

*Beweis.*

Die Umgebungen der Torusfaser  $T_0$  sind homöomorph zu  $T^2 \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  für ein  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein. Um nun einen Homöomorphismus  $F: T_{A_0}^3 \setminus \nu_0(T_0) \rightarrow T_A^3 \setminus \nu(T_0)$  zu definieren, reicht es, diesen Homöomorphismus auf einem Fundamentalbereich zu definieren, also zum Beispiel durch

$$\begin{aligned} F_- : T^2 \times [-1 + \varepsilon, -\varepsilon] &\longrightarrow T^2 \times [-1 + \varepsilon, -\varepsilon] \\ (x, y, t) &\longmapsto (x, y, t). \end{aligned}$$

Durch Komposition mit den Decktransformationen (siehe Beweis von Lemma 3.35) induziert  $F_-$  die Abbildung  $F$  (siehe Abbildung 6.1). Zum Beispiel gilt dann

$$\begin{aligned} F_+ := f_3^A \circ F_- \circ (f_3^{A_0})^{-1} : T^2 \times [\varepsilon, 1 - \varepsilon] &\longrightarrow T^2 \times [\varepsilon, 1 - \varepsilon] \\ (x, y, t) &\longmapsto (A^{-1}A_0(x, y), t), \end{aligned}$$

wobei  $f_3^{A_0}$  die Decktransformation von  $T_{A_0}^3$  ist, gegeben durch

$$(x, y, t) \longmapsto (A_0(x, y), t + 1);$$

genauso für  $f_3^A$  (siehe auch Beweis von Lemma 3.35). □



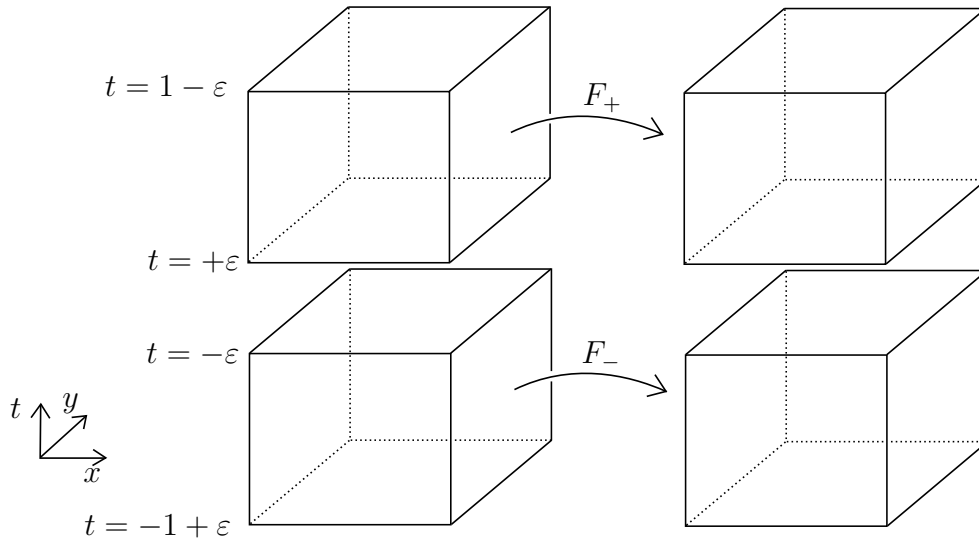


Abbildung 6.1: Der Homöomorphismus  $F$  zwischen den Komplementen einer Torusfaser in zwei verschiedenen Torusbündeln

Als nächstes werden die entsprechenden Torusbündel und die darin enthaltenen Volltori beschrieben, die später herausgeschnitten werden.

Sei  $A_0 \in SL_2(\mathbb{Z})$  eine beliebige Matrix und setze  $A := T^k A_0 \in SL_2(\mathbb{Z})$  für  $k \neq 0$ . Betrachte nun folgende Knoten in den zugehörigen Torusbündeln  $T_{A_0}^3$  und  $T_A^3$  (siehe Abbildung 6.2):

$$[0, 1] \ni s \mapsto K_0(s) := \{(x, y, t) \in T_{A_0}^3 \mid x = 0, y = s, t = 0\} \subset T_{A_0}^3$$

$$[0, 1] \ni s \mapsto K(s) := \{(x, y, t) \in T_A^3 \mid x = 0, y = s, t = 0\} \subset T_A^3$$

Die zugehörigen Tubenumgebungen werden so gewählt:

$$\nu(K_0) := \{(x, y, t) \in T_{A_0}^3 \mid -\delta \leq x \leq \delta, -\varepsilon \leq t \leq \varepsilon\} \subset T_{A_0}^3$$

$$\nu(K) := \{(x, y, t) \in T_A^3 \mid -\delta \leq x \leq \delta, -\varepsilon \leq t \leq \varepsilon\} \subset T_A^3$$

Dabei werden  $\varepsilon > 0$  und  $\delta > 0$  hinreichend klein gewählt (siehe Abbildung 6.2). Der Rand der Tubenumgebung  $\nu(K_0)$  wird mit  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  durch Wahl von Longitude und Meridian

$$\mu_0 := \{(x, 0, t) \in \partial\nu_0 K_0\}$$

$$\lambda_0 := \{(\delta, y, 0) \in \partial\nu_0 K_0\}$$

identifiziert, wobei  $\lambda_0$  in positiver  $y$ -Richtung orientiert und  $\mu_0$  positiv in der  $xt$ -Ebene orientiert sein soll (siehe Abbildung 6.2). Analog für  $\nu(K)$ . Man bemerke, dass die Tubenumgebungen dieser Knoten genau in den Umgebungen der Torusfasern aus Lemma 6.1 liegen.

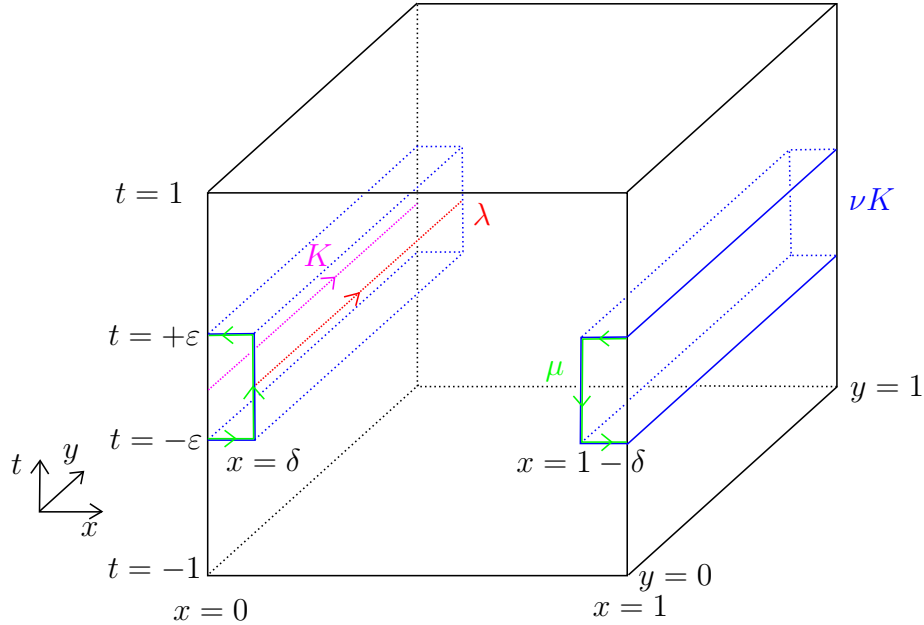


Abbildung 6.2: Die Tubenumgebung  $\nu(K)$  des Knotens  $K$  in  $T_A^3$

$T_{A_0}^3 \setminus \nu(K_0)$  und  $T_A^3 \setminus \nu(K)$  sollen dann wie folgt beschrieben werden:

$$T_{A_0}^3 \setminus \nu(K_0) = \left( T^2 \times [-1 + \varepsilon, -\varepsilon] \cup V \cup T^2 \times [\varepsilon, 1 - \varepsilon] \right) / \sim,$$

wobei  $V := [\delta, 1 - \delta] \times S^1 \times [-\varepsilon, \varepsilon]$  auch wieder ein Volltorus ist und die Identifikation durch

$$T^2 \times [-1 + \varepsilon, -\varepsilon] \ni (x, y, t) \sim (A_0(x, y), t + 1) \in T^2 \times [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$$

gegeben ist (siehe auch Abbildung 6.3, in der die  $y$ -Richtung nicht gezeichnet wurde) und vollkommen analog für  $T_A^3 \setminus \nu(K)$ .

Im nächsten Schritt wird nun gezeigt, dass der Homöomorphismus aus Lemma 6.1 über den Volltorus  $V$  erweitert.

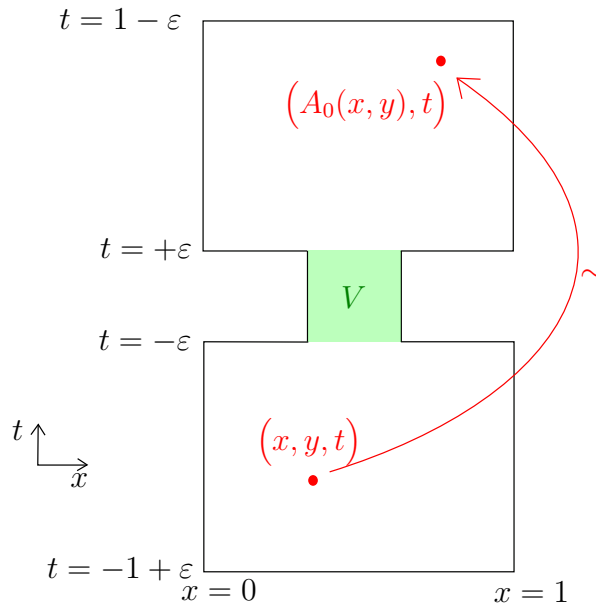


Abbildung 6.3: Das Modell von  $T_{A_0}^3 \setminus \nu(K_0)$

**Lemma 6.2.**

Der Homöomorphismus  $F: T_{A_0}^3 \setminus \nu_0(T_0) \rightarrow T_A^3 \setminus \nu(T_0)$  aus Lemma 6.1 erweitert zu einem Homöomorphismus  $T_{A_0}^3 \setminus \nu(K_0) \rightarrow T_A^3 \setminus \nu(K)$ , der auch wieder mit  $F$  bezeichnet wird.

*Beweis.*

Man betrachtet die Abbildung (siehe auch Abbildung 6.4)

$$\begin{array}{ccc}
 T^2 \times [-1 + \epsilon, -\epsilon] \cup V \cup T^2 \times [\epsilon, 1 - \epsilon] & \longrightarrow & T^2 \times [-1 + \epsilon, -\epsilon] \cup V \cup T^2 \times [\epsilon, 1 - \epsilon] \\
 (x, y, t) & \xrightarrow{F_+} & (x, kx + y, t) \quad \text{für } t \in [\epsilon, 1 - \epsilon] \\
 (x, y, t) & \xrightarrow{F_V} & F_V(x, y, t) \quad \text{für } t \in [-\epsilon, \epsilon] \\
 (x, y, t) & \xrightarrow{F_-} & (x, y, t) \quad \text{für } t \in [-1 + \epsilon, -\epsilon]
 \end{array}$$

Dabei soll  $F_V$  ein Homöomorphismus von  $V$  sein, der auf  $\{t = -\epsilon\}$  mit  $F_-$  und auf  $\{t = \epsilon\}$  mit  $F_+$  übereinstimmt. Für  $F_V$  kann man zum Beispiel einfach die lineare Interpolation zwischen  $F_-$  und  $F_+$  wählen, also

$$F_V(x, y, t) := \left( x, \frac{\epsilon - t}{2\epsilon}y + \frac{\epsilon + t}{2\epsilon}(kx + y), t \right) = \left( x, y + \frac{\epsilon + t}{2\epsilon}kx, t \right).$$

Bildet man nun den Quotienten, so induziert dies einen Homöomorphismus, denn auf  $V$  wird gar nicht identifiziert und die Abbildungen  $F_-$  und  $F_+$  stimmen auf dem Quotientenraum überein (siehe Beweis von Lemma 6.1).  $\square$

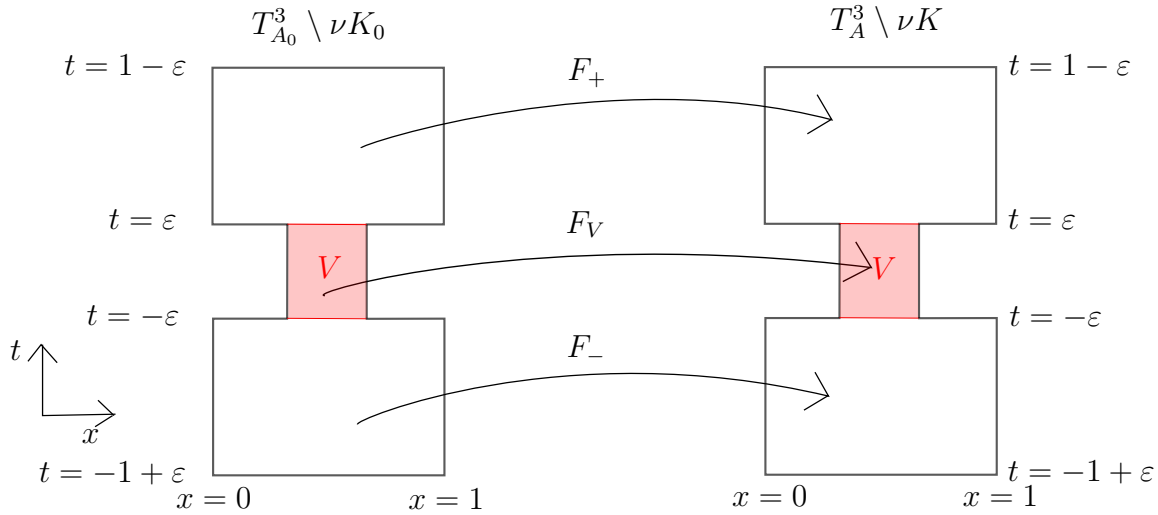


Abbildung 6.4: Die Erweiterung von  $F$  über den Volltorus  $V$ .

Hiermit folgt nun sofort das versprochene Resultat dieses Abschnitts:

**Proposition 6.3.**

$T_A^3$  entsteht durch topologische Dehn-Chirurgie entlang des Knotens  $K_0$  aus  $T_{A_0}^3$ .

*Beweis.*

Nach dem vorigen Lemma ist  $T_{A_0}^3 \setminus \nu(K_0)$  homöomorph zu  $T_A^3 \setminus \nu(K)$ . Das Hereinkleben dieser Volltori mittels eines Homöomorphismus entspricht dann per Definition einer Dehn-Chirurgie. □

**Bemerkung 6.4**

Der Knoten  $K_0$  ist in  $T_{A_0}^3$  nicht null-homolog, weswegen er keine ausgezeichnete Rahmung hat. Somit ergibt es hier keinen Sinn, von einem Chirurgiekoeffizienten zu sprechen. Führt man aber später (in Abschnitt 6.4) Kontaktstrukturen ein, für die  $K_0$  ein Legendre-Knoten wird, so lässt sich  $K_0$  kanonisch mit der Kontaktrahmung versehen und man kann von einem Chirurgiekoeffizienten sprechen.

## 6.2 Der glatte Fall

In diesem Abschnitt soll die obige Konstruktion in der Kategorie der glatten Mannigfaltigkeiten durchgeführt werden. Dazu versieht man die Mannigfaltigkeiten  $\nu(K_0)$ ,  $\nu(K)$ ,  $V$ ,  $T_{A_0}^3 \setminus \nu(K_0)$  und  $T_A^3 \setminus \nu(K)$  nach Glättung des Winkels mit glatten Strukturen. Benutzt man nun das Resultat, dass jede 3-Mannigfaltigkeit eine eindeutige glatte Struktur

besitzt und dass zwei homöomorphe 3-Mannigfaltigkeiten auch immer diffeomorph sind, folgt das obige Resultat auch in der Kategorie glatter Mannigfaltigkeiten. Wenn man dies aber später auf Kontaktmannigfaltigkeiten ausweiten möchte, ist es hilfreich, diese glatten Abbildungen explizit anzugeben. Dazu bemerkt man zuerst, dass der Homöomorphismus  $F: T_{A_0}^3 \setminus \nu_0(T_0) \longrightarrow T_A^3 \setminus \nu(T_0)$  aus Lemma 6.1 sogar ein Diffeomorphismus ist. Ähnlich wie im vorigen Abschnitt, kann man diese Abbildung explizit zu einem Diffeomorphismus über  $V$  erweitern.

**Lemma 6.5.**

Der Diffeomorphismus  $F: T_{A_0}^3 \setminus \nu_0(T_0) \longrightarrow T_A^3 \setminus \nu(T_0)$  aus Lemma 6.1 erweitert zu einem Diffeomorphismus  $T_{A_0}^3 \setminus \nu(K_0) \longrightarrow T_A^3 \setminus \nu(K)$ , der auch wieder mit  $F$  bezeichnet wird.

*Beweis.*

Man betrachtet die Abbildung (siehe auch Abbildung 6.4)

$$\begin{array}{ccc}
 T^2 \times [-1 + \varepsilon, -\varepsilon] \cup V \cup T^2 \times [\varepsilon, 1 - \varepsilon] & \longrightarrow & T^2 \times [-1 + \varepsilon, -\varepsilon] \cup V \cup T^2 \times [\varepsilon, 1 - \varepsilon] \\
 (x, y, t) & \xrightarrow{F_+} & (x, kx + y, t) \quad \text{für } t \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon] \\
 (x, y, t) & \xrightarrow{F_V} & (x, y + \psi(t)kx, t) \quad \text{für } t \in [-\varepsilon, \varepsilon] \\
 (x, y, t) & \xrightarrow{F_-} & (x, y, t) \quad \text{für } t \in [-1 + \varepsilon, -\varepsilon]
 \end{array}$$

Dabei ist  $\psi: [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$  eine monoton wachsende und glatte Funktion (siehe Abbildung 6.5) mit:

- $\psi(t) \equiv 0$  nahe  $t = -\varepsilon$
- $\psi(t) \equiv 1$  nahe  $t = \varepsilon$
- $\psi(0) = 0$  (Diese Bedingung ist jetzt überflüssig, wird aber später noch benötigt.)

Damit wird  $F_V$  zu einem Diffeomorphismus von  $V$ , der in einer ganzen Umgebung von  $\{t = -\varepsilon\}$  und  $\{t = \varepsilon\}$  mit  $F_-$  beziehungsweise  $F_+$  übereinstimmt. Genau wie im Beweis von Lemma 6.2 induziert dies dann einen Diffeomorphismus  $F$  auf dem Quotientenraum. □

Genau wie im vorigen Abschnitt folgt dann die Aussage über die Dehn-Chirurgie.

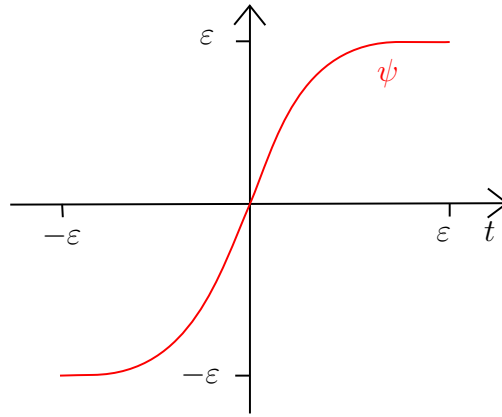


Abbildung 6.5: Die Funktion  $\psi: [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ .

### 6.3 Konstruktion der Kontaktstrukturen mit entsprechender Giroux-Torsion

In den nächsten beiden Abschnitten soll dieses Resultat für Kontaktmannigfaltigkeiten bewiesen werden. Dazu müssen zuerst die entsprechenden Kontaktstrukturen konstruiert werden. Dazu betrachtet man monoton wachsende Funktionen  $\varphi_0, \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\varphi_0(0) = 0 = \varphi(0)$  und

$$\begin{aligned} A_0 \Delta_{\varphi_0(t)} &= \Delta_{\varphi_0(t+1)}, \\ A \Delta_{\varphi(t)} &= \Delta_{\varphi(t+1)} \end{aligned}$$

(siehe auch Beweis von Satz 3.39). Da  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  ein Eigenvektor von  $T^k$  zum Eigenwert 1 ist (siehe auch Beispiel 3.38 (3)), gilt

$$A \Delta_{\varphi_0(-1)} = T^k A_0 \Delta_{\varphi_0(-1)} = T^k \Delta_{\varphi_0(0)} = \Delta_{\varphi_0(0)} = \Delta_{\varphi(0)} = A \Delta_{\varphi(-1)}.$$

Weil nun  $A$  eine Bijektion ist, unterscheiden sich  $\varphi(-1)$  und  $\varphi_0(-1)$  nur durch Addition eines ganzzahligen Vielfachen von  $2\pi$ . Bei vorgegebenem  $\varphi_0$  wählt man nun die Funktion  $\varphi$  wie oben, so dass  $\varphi(-1) = \varphi_0(-1)$  gilt. (Ist die Giroux-Torsion  $n_0$  von  $\varphi_0$  gleich 1, so kann es sein, dass man ein solches  $\varphi$  gar nicht wählen kann (siehe Beweis von Satz 3.39 (1)). In diesem Fall liefert das folgende Lemma natürlich keine Aussage.)

**Lemma 6.6.**

Seien  $\varphi_0, \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  wie oben,  $n_0$  die Giroux-Torsion von  $\varphi_0$  und  $n$  die Giroux-Torsion von  $\varphi$ . Dann hängt  $n$  von  $A_0, k$  und  $n_0$  genau wie in Lemma 5.17 ab. Im Fall  $A_0 = T^l$  für ein  $l \in \mathbb{Z}$  gilt also:

$k$	$l$	$n$
$k > 0$	$l < k$ oder $l \geq 0$	$n_0$
$k > 0$	$-k \leq l < 0$	$n_0 - 1$
$k < 0$	$l \geq -k$ oder $l < 0$	$n_0$
$k < 0$	$0 \leq l < -k$	$n_0 + 1$

Im Fall  $A_0 \neq T^l$  ist  $n$  durch folgende Tabelle bestimmt:

	$A$ nicht-kritisch	$A$ kritisch
$A_0$ nicht-kritisch	$n = n_0$	$n = n_0 + 1$
$A_0$ kritisch	$n = n_0 - 1$	$n = n_0$

*Beweis.*

Betrachte zuerst den Fall, dass  $A_0 = T^l$  ist für ein  $l \in \mathbb{Z}$ .

Wenn  $l = 0$  ist, dann ist  $T^l$  die Einheitsmatrix und es gilt

$$\Delta_{\varphi_0(t)} = T^0 \Delta_{\varphi_0(t)} = \Delta_{\varphi_0(t+1)}.$$

Also ist  $\varphi_0(t+1) - \varphi_0(t)$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$ . Die Giroux-Torsion  $n_0$  war gegeben durch

$$2\pi(n_0 - 1) < \sup_{t \in \mathbb{R}} \{ \varphi_0(t+1) - \varphi_0(t) \} \leq 2\pi n_0,$$

also gilt

$$\varphi_0(t+1) - \varphi_0(t) = 2\pi n_0.$$

Wegen  $\varphi_0(0) = 0$  folgt  $\varphi_0(-1) = -2\pi n_0$ .

Ist  $l > 0$ , so wirkt  $T^l$  wie in Abbildung 6.6 dargestellt. Da  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  ein Eigenvektor von  $T^l$  zum Eigenwert 1 ist und wegen  $\varphi_0(0) = 0$ , gilt:

$$\Delta_{\varphi_0(t)} = \Delta_{\varphi_0(0)} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ für alle } t \in \mathbb{Z}.$$

An Abbildung 6.6 erkennt man dann, dass

$$\varphi_0(t+1) - \varphi_0(t) = 2\pi N - X_t$$

gilt, wobei  $N \in \mathbb{Z}$  eine ganze Zahl ist und  $X_t \in [0, \pi)$  eine Funktion, die genau dann 0 ist, wenn  $t \in \mathbb{Z}$  ist. Also folgt

$$2\pi(N - 1) < \varphi_0(t + 1) - \varphi_0(t) \leq 2\pi N.$$

Die ganze Zahl  $N$  ist also genau die Giroux-Torsion  $n_0$ . Wegen  $\varphi_0(0) = 0$  folgt wieder  $\varphi_0(-1) = -2\pi n_0$ .

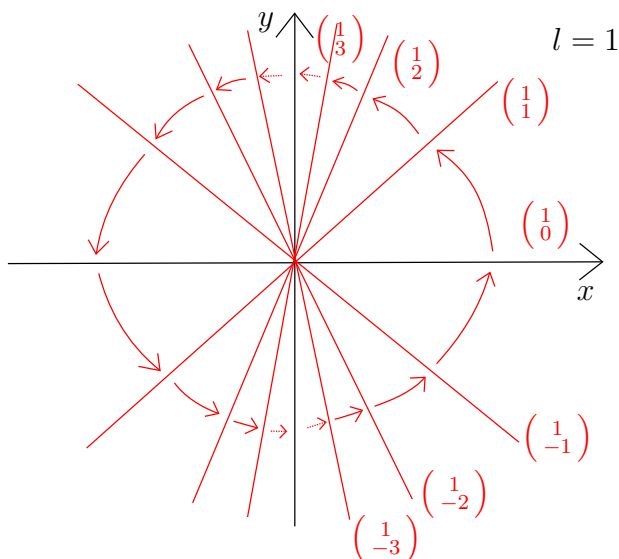


Abbildung 6.6: Die Wirkung der Matrix  $T^l$  für  $l = 1$

Ist  $l < 0$ , so wirkt  $T^l$  wie in Abbildung 6.7 dargestellt und wie eben gilt

$$\varphi_0(t + 1) - \varphi_0(t) = 2\pi N + X_t,$$

wobei  $N \in \mathbb{Z}$  eine ganze Zahl ist und  $X_t \in [0, \pi)$  eine Funktion, die genau dann 0 ist, wenn  $t \in \mathbb{Z}$  ist. Also folgt

$$2\pi N \leq \varphi_0(t + 1) - \varphi_0(t) \leq 2\pi N + \pi.$$

Es gilt also  $N = n_0 - 1$ . Wie oben folgt dann  $\varphi_0(-1) = -2\pi(n_0 - 1)$ .

Zusammenfassend gilt also

$$\varphi_0(-1) = \begin{cases} -2\pi n_0 & \text{für } l \geq 0 \\ -2\pi(n_0 - 1) & \text{für } l < 0. \end{cases}$$



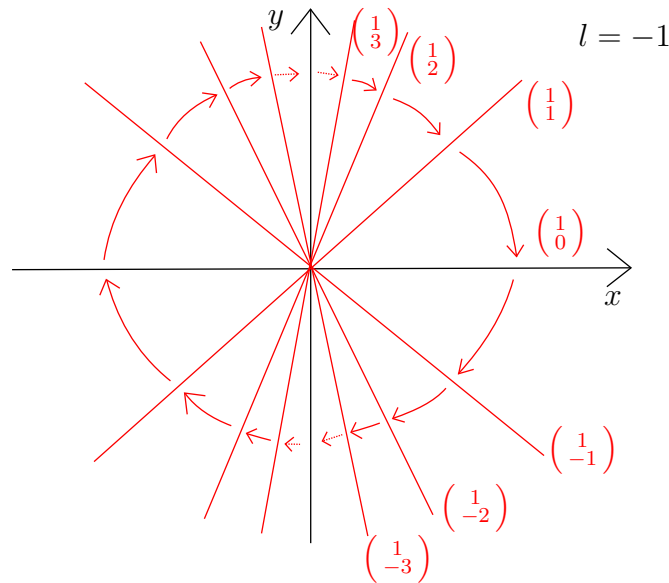


Abbildung 6.7: Die Wirkung der Matrix  $T^l$  für  $l = -1$

Vollkommen analog erhält man für  $\varphi$  und  $A = T^{k+l}$

$$\varphi(-1) = \begin{cases} -2\pi n & \text{für } k + l \geq 0 \\ -2\pi(n - 1) & \text{für } k + l < 0. \end{cases}$$

Wegen  $\varphi_0(-1) = \varphi(-1)$  kann man nun vergleichen und erhält:

$$n = \begin{cases} n_0 & \text{für } k + l \geq 0 \text{ und } l \geq 0 \\ n_0 & \text{für } k + l < 0 \text{ und } l < 0 \\ n_0 + 1 & \text{für } k + l < 0 \text{ und } l \geq 0 \\ n_0 - 1 & \text{für } k + l \geq 0 \text{ und } l < 0, \end{cases}$$

woraus in diesem Fall sofort die Behauptung folgt.

Wenn  $A_0$  nicht vom Typ  $T^l$  ist, dann ist  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  kein Eigenvektor von  $A_0$  mit positivem Eigenwert. Die Giroux-Torsion  $n_0$  von  $\varphi_0$  ist dann dadurch bestimmt, in welchem Intervall der Länge  $2\pi$  der Wert  $\varphi_0(1) - \varphi_0(0) = \varphi_0(1)$  liegt und ob  $A_0$  kritisch oder nicht-kritisch ist (siehe Beweis von Satz 3.39 (1)). Da  $A$  dann auch nicht vom Typ  $T^l$  ist, gilt dasselbe auch für die Giroux-Torsion  $n$  von  $\varphi$ . Wenn man nun  $\varphi_0$  mit Giroux-Torsion  $n_0$  vorgegeben hat, kann man wie folgt eine Funktion  $\varphi$  wie oben explizit konstruieren und dann

den Wert  $\varphi(1)$  bestimmen. Setze dazu

$$\varphi(t) = \varphi_0(t) \text{ auf } t \in [-1 + \varepsilon, -\varepsilon]$$

für ein  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein. Sei weiter  $\hat{h}: \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  definiert durch  $T^k \Delta_\varphi = \Delta_{\hat{h}(\varphi)}$  und sei  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Anhebung von  $\hat{h}$  mit  $h(0) = 0$ . Man rechnet leicht nach, dass  $h$  explizit durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$h(\varphi) = \begin{cases} \operatorname{arccot}(\cot(\varphi) + k) & \text{für } \varphi \in (\pi l, \pi(l+1)) \\ \pi l & \text{für } \varphi = \pi l. \end{cases}$$

Dann setzt man

$$\varphi(t) = h \circ \varphi_0(t) \text{ auf } t \in [\delta_\varepsilon, 1 - \delta'_\varepsilon]$$

für  $\delta_\varepsilon, \delta'_\varepsilon > 0$  so gewählt, dass folgende Gleichung für  $t \in [-1 + \varepsilon, -\varepsilon]$  Sinn ergibt:

$$A\Delta_{\varphi(t)} = T^k A_0 \Delta_{\varphi_0(t)} = T^k \Delta_{\varphi_0(t+1)} = \Delta_{h \circ \varphi_0(t+1)} = \Delta_{\varphi(t+1)}$$

Dieses  $\varphi$ , bis jetzt nur zwischen Umgebungen von  $-1$  und  $0$  und zwischen Umgebungen von  $0$  und  $1$  definiert, erfüllt also die geforderte Eigenschaft (siehe den roten Teil in Abbildung 6.8). Wähle nun  $\varphi$  auf  $[-\varepsilon, \delta_\varepsilon]$  streng monoton wachsend mit  $\varphi(0) = 0$ , so dass  $\varphi$  auf  $[-1 + \varepsilon, 1 - \delta'_\varepsilon]$  glatt ist (siehe den grünen Teil in Abbildung 6.8). Die Forderung  $A\Delta_{\varphi(t)} = \Delta_{\varphi(t+1)}$  legt  $\varphi$  dann auf ganz  $\mathbb{R}$  fest. Man bemerke, dass wegen  $\varphi(0) = 0$  dann auch  $\varphi(-1) = \varphi_0(-1)$  gelten muss (siehe auch den lila Teil in Abbildung 6.8).

Lässt man nun  $\varepsilon$  gegen  $0$  konvergieren, so konvergieren auch  $\delta_\varepsilon$  und  $\delta'_\varepsilon$  gegen  $0$  und  $\varphi(1)$  konvergiert gegen  $h \circ \varphi_0(1)$ . Da aber nun  $h$  eine streng monoton wachsende Funktion ist und  $h(\varphi) = \varphi$  genau dann, wenn  $\varphi \in \pi\mathbb{Z}$ , folgt, dass  $\varphi(1)$  im selben Intervall der Länge  $2\pi$  wie  $\varphi_0(1)$  liegt, also:

$$\begin{aligned} 2\pi(N-1) &< \varphi_0(1) \leq 2\pi N, \\ 2\pi(N-1) &< \varphi(1) \leq 2\pi N. \end{aligned}$$

Ist nun  $A_0$  nicht-kritisch, dann ist die Giroux-Torsion  $n_0$  von  $\varphi_0$  gegeben durch  $N$ . Wenn  $A_0$  jedoch kritisch ist, dann ist die Giroux Torsion  $n_0$  gleich  $N+1$  (siehe Beweis von Satz 3.39 (1)). Analog gilt dies auch für  $A$ . Durch Vergleich folgt dann die Behauptung.  $\square$

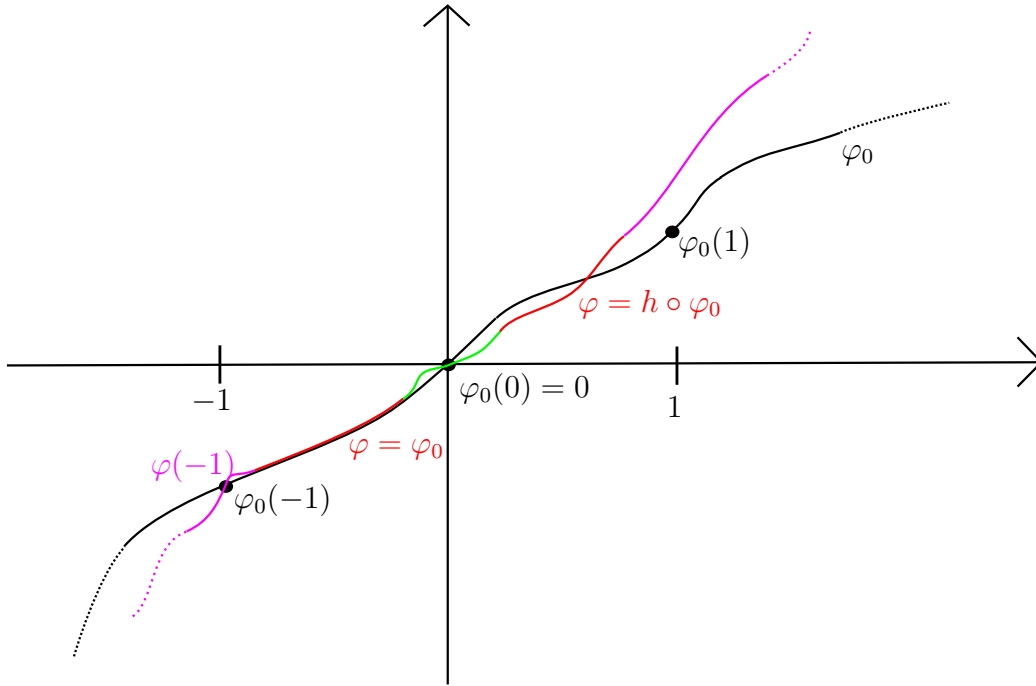


Abbildung 6.8: Die Konstruktion von  $\varphi$  aus  $\varphi_0$ .

**Bemerkung 6.7**

Der Beweis dieses Lemma funktioniert so ähnlich auch für negative  $n$ . Damit erhält man ein zu Lemma 5.17 analoges Resultat für negative Kontaktstrukturen. Wenn man also den Füllbarkeitssatz von Eliashberg auch auf negative Kontaktstrukturen ausweiten kann, so erhält man auch ein Resultat analog zum Füllbarkeitssatz von Ding-Geiges für negative Kontaktstrukturen (siehe auch Bemerkung 2.40).

**6.4 Der Kontaktfall**

Die Funktionen  $\varphi_0$  und  $\varphi$  aus Lemma 6.6 liefern Kontaktstrukturen  $\xi_{\varphi_0}$  auf  $T_{A_0}^3$  und  $\xi_\varphi$  auf  $T_A^3$  (siehe Proposition 3.36). Wegen  $\varphi_0(0) = 0$  gilt

$$\alpha_{\varphi_0}(K'_0(s)) = \alpha_{\varphi_0}(\partial_y) = \sin \varphi_0(0) = 0,$$

und damit wird  $K_0$  zu einem Legendre-Knoten in  $(T_{A_0}^3, \xi_{\varphi_0})$ . Vollkommen analog ist auch  $K$  ein Legendre-Knoten in  $(T_A^3, \xi_\varphi)$ . In diesem Abschnitt soll nun gezeigt werden, dass eine Kontakt-Dehn-Chirurgie entlang des Legendre-Knotens  $K_0 \subset (T_{A_0}^3, \xi_{\varphi_0})$  die Kontaktmannigfaltigkeit  $(T_A^3, \xi_\varphi)$  liefert. Dazu werden zuerst die Diffeomorphismen aus

Abschnitten 1 und 2 in Kontaktomorphismen übersetzt. Dabei schreibt man wieder  $\xi_{\varphi_0}$  bzw.  $\xi_\varphi$  für diese Kontaktstrukturen eingeschränkt auf Teilmengen von  $T_{A_0}^3$  bzw.  $T_A^3$ .

**Lemma 6.8.**

$(T_{A_0}^3 \setminus \nu_0(T_0), \xi_{\varphi_0})$  ist kontaktomorph zu  $(T_A^3 \setminus \nu(T_0), \xi_\varphi)$ , wobei  $\nu_0(T_0)$  und  $\nu(T_0)$  Tubenumgebungen der Torusfasern  $\{t = 0\}$  wie in Lemma 6.1 sind.

*Beweis.*

Weil  $\varphi_0, \varphi$  streng monoton wachsend sind und weil weiter  $\varphi_0(0) = \varphi(0) = 0$  und  $\varphi_0(-1) = \varphi(-1)$  gilt, sind  $\varphi_0, \varphi$  Diffeomorphismen von  $[-1, 0]$  nach  $[\varphi(-1), 0]$ . Also existiert eine glatte Funktion  $f: [-1, 0] \rightarrow [-1, 0]$  mit  $\varphi_0 = \varphi \circ f$  auf  $[-1, 0]$  (siehe auch Beweis von Satz 3.39 (2)). Dann gilt

$$0 < \varphi_0' = \underbrace{\varphi' \circ f}_{>0} \cdot f';$$

also ist  $f$  auch streng monoton wachsend. Weil  $\varphi$  streng monoton ist und wegen  $\varphi(0) = 0$ , folgt aus

$$0 = \varphi_0(0) = \varphi(f(0)),$$

dass  $f(0) = 0$  gilt. Genauso folgt auch  $f(-1) = -1$ . Nun fährt man ähnlich wie im Beweis von Lemma 6.1 fort. Betrachte den Diffeomorphismus

$$\begin{aligned} F_- : T^2 \times [-1 + \varepsilon, -\varepsilon] &\longrightarrow T^2 \times [f(-1 + \varepsilon), f(-\varepsilon)] \\ (x, y, t) &\longmapsto (x, y, f(t)). \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} F_-^*(\lambda_\varphi(t)\alpha_\varphi) &= F_-^*(\lambda_\varphi(t) \cos \varphi(t) dx - \lambda_\varphi(t) \sin \varphi(t) dy) \\ &= \tilde{\lambda}(t) (\cos \varphi_0(t) dx - \sin \varphi_0(t) dy) \\ &= \tilde{\lambda}(t) \alpha_{\varphi_0} \end{aligned}$$

(dabei ist  $\lambda_\varphi(t)$  wieder eine Funktion, so dass  $\lambda_\varphi(t) \alpha_\varphi$  eine Kontaktform auf dem Torusbündel ist und  $\tilde{\lambda}(t)$  ist eine nirgends-verschwindende Funktion) induziert  $F_-$  ähnlich wie im Beweis von Lemma 6.1 einen Kontaktomorphismus

$$F : (T_{A_0}^3 \setminus \nu_0(T_0), \xi_{\varphi_0}) \longrightarrow (T_A^3 \setminus \nu(T_0), \xi_\varphi).$$

Auch genau wie im Beweis von Lemma 6.1 erhält man diese Abbildung auf einem anderen Fundamentalbereich durch Komposition von  $F_-$  mit den Decktransformationen. Zum Beispiel gilt dann

$$F_+ = f_3^A \circ F_- \circ (f_3^{A_0})^{-1}: T^2 \times [\varepsilon, 1 - \varepsilon] \longrightarrow T^2 \times [1 + f(-1 + \varepsilon), f(-\varepsilon) + 1]$$

$$(x, y, t) \longmapsto \left( \underbrace{x, kx + y}_{=A^{-1}A_0(x,y)}, f(t - 1) + 1 \right).$$

□

Dieser Kontaktomorphismus soll nun ähnlich wie im glatten Fall über den Volltorus  $V$  erweitert werden. Wenn man die Kontaktform  $\alpha_\varphi$  mit dem Diffeomorphismus aus Abschnitt 2 zurückzieht, erhält man eine Kontaktform auf  $T_{A_0}^3$ , der man nicht ansieht, welche Kontaktstruktur sie liefert. Deswegen interpoliert man zuerst in der  $t$ -Koordinate glatt zwischen  $f(t)$  und  $f(t - 1) + 1$ . Dann ändert man die  $x$ -Koordinate leicht ab, so dass die charakteristische Blätterung von  $F(\partial V)$  bezüglich  $\xi_\varphi$  eine einfache Form hat. Als nächstes berechnet man die charakteristischen Blätterungen auf  $\partial V \subset T_{A_0}^3$  bezüglich  $\xi_{\varphi_0}$  und der zurückgezogenen Kontaktstruktur  $\ker(F^*\alpha_\varphi)$  und sieht, dass diese gleich sind. Mit der Theorie der charakteristischen Blätterungen und der konvexen Flächen liefert, dies dann den geforderten Kontaktomorphismus.

Dabei wird das Modell von  $T_A^3 \setminus \nu(K)$ , wie auch schon im vorigen Lemma, etwas verändert. Die  $t$ -Werte werden an die Funktion  $f$  angepasst und der Torus  $F(V)$  wird leicht abgeändert (siehe Abbildung 6.9).

**Lemma 6.9.**

Der Kontaktomorphismus  $F: (T_{A_0}^3 \setminus \nu(T_0), \xi_{\varphi_0}) \longrightarrow (T_A^3 \setminus \nu(T_0), \xi_\varphi)$  aus Lemma 6.8 erweitert zu einem Kontaktomorphismus  $(T_{A_0}^3 \setminus \nu(K_0), \xi_{\varphi_0}) \longrightarrow (T_A^3 \setminus \nu(K), \xi_\varphi)$ , der auch wieder mit  $F$  bezeichnet wird.

*Beweis.*

Dazu betrachtet man folgende Abbildung (siehe auch Abbildung 6.9):

$$T^2 \times [-1 + \varepsilon, -\varepsilon] \cup V \cup T^2 \times [\varepsilon, 1 - \varepsilon] \longrightarrow T^2 \times [f(-1 + \varepsilon), f(-\varepsilon) + 1]$$

$$\begin{array}{ll} (x, y, t) & \xrightarrow{F_+} (x, kx + y, f(t - 1) + 1) \text{ für } t \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon] \\ (x, y, t) & \xrightarrow{F_V} (h(x, t), y + \psi(t)kx, \chi(t)) \text{ für } t \in [-\varepsilon, \varepsilon] \\ (x, y, t) & \xrightarrow{F_-} (x, y, f(t)) \text{ für } t \in [-1 + \varepsilon, -\varepsilon] \end{array}$$

Dabei ist  $\chi: [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$  eine monoton wachsende Funktion mit

- $\chi(t) \equiv f(t)$  nahe  $t = -\varepsilon$ ,
- $\chi(t) \equiv f(t - 1) + 1$  nahe  $t = \varepsilon$ ,
- $\chi(0) = 0$

und  $\psi: [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$  eine ebenfalls monoton wachsende Funktion mit:

- $\psi(t) \equiv 0$  nahe  $t = -\varepsilon$ ,
- $\psi(t) \equiv 1$  nahe  $t = \varepsilon$ ,
- $\psi(0) = 0$ ,
- $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \psi'(t) \tan(\varphi \circ \chi(t)) dt = 0$ .

(Dabei kann man die vierte Bedingung so wählen, weil  $\tan(\varphi \circ \chi)$  streng monoton wachsend mit  $\tan(\varphi \circ \chi(0)) = 0$  ist und weil  $\psi' \equiv 0$  an den Rändern  $t = \pm\varepsilon$  gilt.) Außerdem ist  $h$  gegeben durch

$$h(x, t) := x + kx \int_{-\varepsilon}^t \psi'(t) \tan(\varphi \circ \chi(t)) dt.$$

Wegen  $\psi'(t) \equiv 0$  nahe  $t = \pm\varepsilon$  und wegen  $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \psi'(t) \tan(\varphi \circ \chi(t)) dt = 0$  gilt  $h(x, t) \equiv x$  nahe  $\{t = \pm\varepsilon\}$ . Also stimmt  $F_V$  nahe  $\{t = \pm\varepsilon\}$  mit  $F_{\pm}$  überein und somit liefert  $F$  einen Diffeomorphismus

$$T_{A_0}^3 \setminus \nu_0(K_0) \longrightarrow T_A^3 \setminus \nu(K),$$

der auch wieder mit  $F$  bezeichnet wird. (Dazu bemerke man, dass für  $\varepsilon, \delta > 0$  hinreichend klein, der Torus  $F(V)$  beliebig nahe an  $V$  liegt.)

Weiter ist dieser Diffeomorphismus außerhalb von  $\{t \in [-\varepsilon, \varepsilon]\}$  und in einer kleinen Umgebung von  $\{t = \pm\varepsilon\}$  sogar ein Kontaktomorphismus bezüglich der Kontaktstrukturen  $\xi_{\varphi_0}$  und  $\xi_{\varphi}$ . Auf  $V$  ist  $F$  allerdings **kein** Kontaktomorphismus. Um dies zu ändern, berechnet man nun wie angekündigt die charakteristischen Blätterungen auf  $\partial V$  bezüglich der Kontaktstrukturen  $\xi_{\varphi_0}$  und  $\ker(F^*\alpha_{\varphi})$ . Auf  $\{t = \pm\varepsilon\}$  ist  $F$  ein Kontaktomorphismus, also stimmen die charakteristischen Blätterungen auf  $\partial V \cap \{t = \pm\varepsilon\}$  überein. Es reicht also diese Blätterungen auf

$$B := \partial V \setminus \{t = \pm\varepsilon\} = \{x = \delta, 1 - \delta; t \in [-\varepsilon, \varepsilon]\}$$

zu berechnen (siehe Abbildung 6.9).

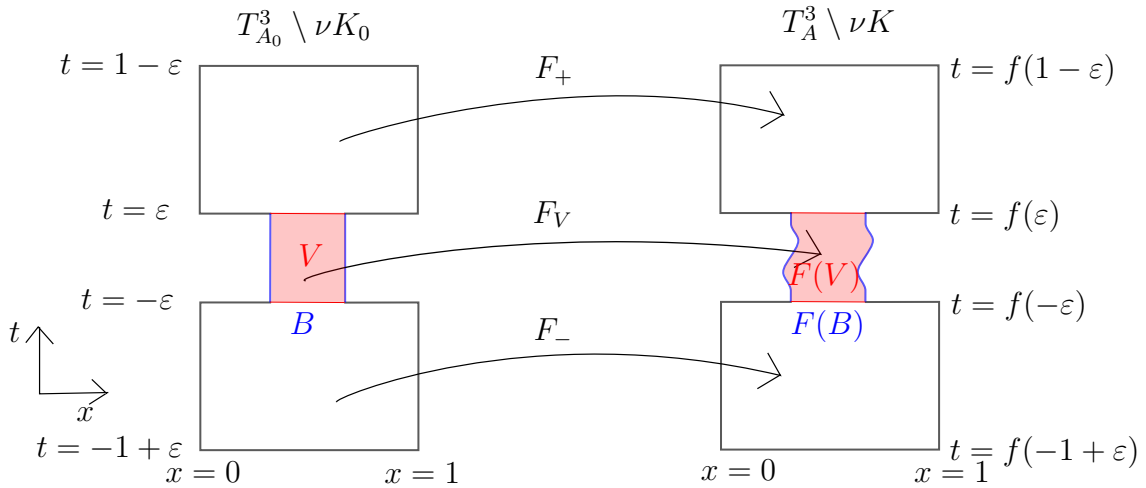


Abbildung 6.9: Der an die Kontaktstrukturen angepasste Diffeomorphismus  $F$

Dazu betrachtet man die Volumenform  $\Omega := dy \wedge dt$  auf  $B$ . Die charakteristische Blätterung von  $B$  bezüglich  $\xi_{\varphi_0}$  ist dann durch das Vektorfeld  $X_0$  gegeben, welches durch die Gleichung

$$\iota_{X_0} \Omega = \alpha_{\varphi_0}|_{TB} = -\sin \varphi_0(t) dy$$

bestimmt ist. Einsetzen liefert

$$X_0 = \sin \varphi_0(t) \partial_t.$$

Die charakteristische Blätterung von  $B$  bezüglich  $\ker(F^* \alpha_\varphi)$  ist durch das Vektorfeld  $X$  gegeben, welches durch die Gleichung

$$\iota_X \Omega = F^* \alpha_\varphi|_{TB}$$

bestimmt ist. Man berechnet also:

$$\begin{aligned} F^* \alpha_\varphi|_{TB} &= F_V^* (\cos \varphi(t) dx - \sin \varphi(t) dy)|_{TB} \\ &= \cos (\varphi \circ \chi(t)) dh(x, t) - \sin (\varphi \circ \chi(t)) d(\psi(t) kx + y)|_{TB} \\ &= \cos (\varphi \circ \chi(t)) \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} dt - \sin (\varphi \circ \chi(t)) (\psi'(t) kx dt + dy) \\ &= \cos (\varphi \circ \chi(t)) kx \psi'(t) \tan (\varphi \circ \chi(t)) dt - \sin (\varphi \circ \chi(t)) \psi'(t) kx dt \\ &\quad - \sin (\varphi \circ \chi(t)) dy \\ &= -\sin (\varphi \circ \chi(t)) dy \end{aligned}$$

Genauso wie eben folgt also

$$X = \sin(\varphi \circ \chi(t)) \partial_t.$$

Da die beiden Funktionen  $\sin \varphi_0(t)$  und  $\sin(\varphi \circ \chi(t))$  nur in  $t = 0$  verschwinden und dort beide positive Ableitung haben, sind die beiden Blätterungen gleich. Also ist  $F$  ein Diffeomorphismus mit

$$F(\partial V_{\xi_{\varphi_0}}) = F(\partial V)_{\xi_{\varphi}}.$$

Nach Satz 2.47 gibt es also Umgebungen  $U(\partial V)$  von  $\partial V$  und  $U(F(\partial V))$  von  $F(\partial V)$  und einen Kontaktomorphismus

$$F: \left( U(\partial V), \xi_{\varphi_0} \right) \longrightarrow \left( U(F(\partial V)), \xi_{\varphi} \right),$$

der auf  $\partial V$  mit  $F$  übereinstimmt. Weiter kann man diesen Kontaktomorphismus so wählen, dass er in einer ganzen Umgebung von  $\{t = \pm \varepsilon\}$  mit  $F$  übereinstimmt (siehe [13, Beweis von Satz 2.5.23]), und er somit einen Kontaktomorphismus

$$F: \left( U(\partial V) \cup T_{A_0}^3 \setminus \nu T_0, \xi_{\varphi_0} \right) \longrightarrow \left( U(F(\partial V)) \cup T_A^3 \setminus \nu T_0, \xi_{\varphi} \right),$$

liefert, der auch wieder mit  $F$  bezeichnet wird (siehe Abbildung 6.10).

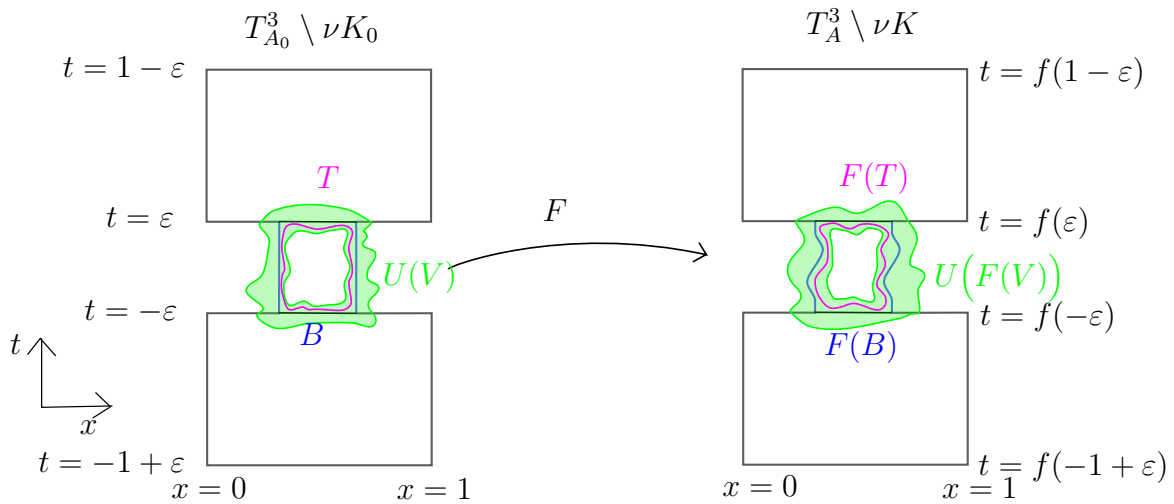


Abbildung 6.10: Der obige Kontaktomorphismus  $F$ .

Um diesen Kontaktomorphismus letztendlich zu einem Kontaktomorphismus über  $V$  zu erweitern benötigt man folgendes Lemma.



**Lemma 6.10.**

In jeder Umgebung von  $\partial V$  in  $(T_{A_0}^3 \setminus V, \xi_{\varphi_0})$  existiert ein zu  $\partial V$  isotoper konvexer Torus  $T$  mit  $\#\Gamma_T = 2$  und  $s(T) = \infty$ .

Der Beweis dieses Lemmas funktioniert vollkommen analog wie der Beweis von Lemma 6.11 weiter unten (siehe auch [4, Lemma 18]) und wird hier als bewiesen angenommen. Mit diesem Lemma erhält man also in  $U(\partial V)$  einen zu  $\partial V$  isotopen konvexen Torus  $T$  mit 2 Teilungskurven und Steigung  $\infty$ . Nach dem Klassifikationssatz für straffe Kontaktstrukturen auf Volltori (Satz 2.64) erhält man also eine eindeutige straffe Kontaktstruktur auf dem Volltorus  $V$  (siehe auch Abbildung 6.10). Bildet man den Torus  $T$  mit  $F$  nach  $T_A^3$  ab, so funktioniert dasselbe Argument für  $F(T)$ . Somit erweitert der Kontaktomorphismus oben zu einem Kontaktomorphismus

$$(T_{A_0}^3 \setminus \nu(K_0), \xi_{\varphi_0}) \longrightarrow (T_A^3 \setminus \nu(K), \xi_{\varphi}).$$

Damit ist der Beweis von Lemma 6.9 abgeschlossen. □

Wir haben also jetzt einen Kontaktomorphismus zwischen den Komplementen der Tubenumgebungen konstruiert. Allerdings kann man diesmal **nicht** sofort folgern, dass dann  $(T_A^3, \xi_{\varphi})$  durch Kontakt-Dehn-Chirurgie aus  $(T_{A_0}^3, \xi_{\varphi_0})$  entsteht, da die Ränder der Volltori  $\partial\nu(K_0)$  und  $\partial\nu(K)$  keine konvexen Flächen sind. Wie man dieses Problem umgeht, zeigt das folgende Lemma analog zu Lemma 6.10.

**Lemma 6.11.**

In jeder Umgebung von  $\partial\nu(K_0)$  in  $(T_{A_0}^3 \setminus \nu(K_0), \xi_{\varphi_0})$  existiert ein zu  $\partial\nu(K_0)$  isotoper konvexer Torus  $T$  mit  $\#\Gamma_T = 2$  und  $s(T) = \infty$ .

*Beweis.*

Sei  $\gamma$  eine einfach geschlossene und nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve in der Ebene  $\{y = 0\} \subset T_{A_0}^3 \setminus \nu(K_0)$  nahe an  $\partial\nu(K_0)$ , so dass:

- $\gamma$  nur in den beiden Punkten mit  $t = 0$  tangential an  $\partial_t$  ist,
- $\gamma$  nur in den beiden Punkten mit  $x = 0$  tangential an  $\partial_x$  ist und
- $\gamma$  in der  $xt$ -Ebene im Uhrzeigersinn orientiert ist.

(Siehe auch Abbildung 6.11, hier ist die  $xt$ -Ebene in  $\{y = 0\}$  gezeichnet.)

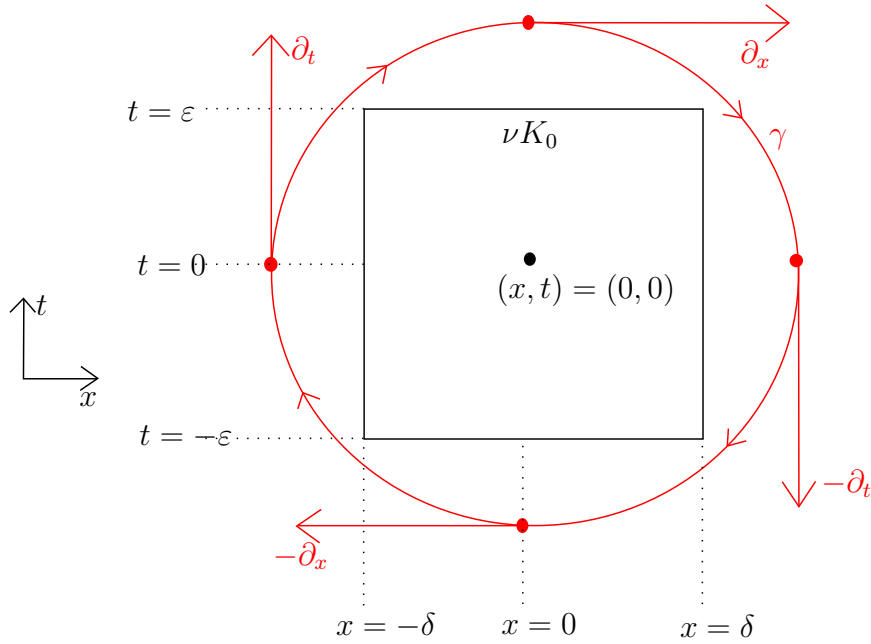


Abbildung 6.11: Die Kurve  $\gamma$

Definiere den Torus  $T$  nun durch

$$T := \{(x, y, t) \in T_{A_0}^3 \setminus \nu(K_0) \mid (x, t) \in \text{Im}(\gamma)\}.$$

(Man erhält  $T$  also, indem man  $\gamma$  komplett durch die  $S^1$ -Richtung, gegeben durch die  $y$ -Koordinate, bewegt.) Der Torus  $T$  ist isotop zu  $\partial\nu(K_0)$ . Die Identifikation von  $T$  mit  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  wird also von der Identifikation von  $\partial\nu(K_0)$  mit  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  übertragen. Um nun zu zeigen, dass  $T$  eine konvexe Fläche ist, berechnet man zuerst die charakteristische Blätterung  $T_\xi$  und zeigt, dass diese von zwei disjunkten Kreisen mit Steigung unendlich geteilt wird. Mit Satz 2.58 folgt dann, dass  $T$  eine konvexe Fläche ist.

Um nun die charakteristische Blätterung  $T_\xi$  zu bestimmen, berechnet man den Schnitt der Kontaktebenen  $\xi$  mit dem Tangentialraum  $TT$  (siehe Abschnitt 2.7). Die Kontaktstruktur  $\xi_{\varphi_0} = \ker(\cos \varphi_0(t) dx - \sin \varphi_0(t) dy)$  wird aufgespannt von den Vektorfeldern  $\partial_t$  und  $\sin \varphi_0(t) \partial_x + \cos \varphi_0(t) \partial_y$ . Schreibt man nun  $\gamma' = A(x, t) \partial_x + B(x, t) \partial_t$ , dann gilt  $A(x, t) = 0$  genau dann, wenn  $\gamma$  tangential an  $\partial_t$  ist, und dies ist genau dann der Fall, wenn  $t = 0$  gilt. (Ähnlich für  $B(x, t)$  und  $t$ .) Da  $\gamma$  nach der Bogenlänge parametrisiert ist, gilt weiter  $A^2 + B^2 = |\gamma'| \equiv 1$ . Der Tangentialraum von  $T$  wird dann aufgespannt von  $\partial_y$  und  $\gamma' = A(x, t) \partial_x + B(x, t) \partial_t$ . Diese beiden Vektorräume stimmen also genau in den beiden Kreisen  $\{t = 0\} \cap T$  überein. Ansonsten ist der Schnitt immer eindimensional und die charakteristische Blätterung ist gegeben durch die Äquivalenzklasse des

Vektorfeldes

$$X := A(x, t) \cos \varphi_0(t) \partial_y + A(x, t) \sin \varphi_0(t) \partial_x + B(x, t) \sin \varphi_0(t) \partial_t.$$

Um jetzt die Teilungsmenge dieser Blätterung zu berechnen, benötigt man zuerst eine Volumenform von  $T$ . Eine solche Volumenform ist gegeben durch  $\Omega = dy \wedge \gamma^*$ , wobei  $\gamma^*$  die duale 1-Form zum Vektorfeld  $\gamma'$  ist, das heißt  $\gamma^*(\partial_y) = 0$  und  $\gamma^*(\gamma') = 1$ . Koeffizientenvergleich liefert  $\gamma^* = A dx + B dt$  und somit

$$\Omega = dy \wedge \gamma^* = dy \wedge (A dx + B dt).$$

Berechne nun in  $T_{A_0}^3$ :

$$\begin{aligned} d(\iota_X \Omega) &= d\left(A \cos \varphi_0(t)(A dx + B dt) - \underbrace{(A^2 + B^2)}_{=1} \sin \varphi_0(t) dy\right) \\ &= \left[ \frac{\partial}{\partial x} (AB \cos \varphi_0(t)) - \frac{\partial}{\partial t} (A^2 \cos \varphi_0(t)) \right] dx \wedge dt - \varphi_0'(t) \cos \varphi_0(t) dt \wedge dy \end{aligned}$$

Um nun  $\mathcal{L}_X \Omega$  auf der Fläche  $T$  zu erhalten, berechnet man zuerst die duale 1-Form  $n^*$  zum äußeren Einheitsnormalenfeld  $n$  von  $T$ , also die 1-Form  $n^*$  mit  $n^*(\partial_y) = 0$ ,  $n^*(\gamma') = 0$  und  $n^*(n) = 1$ . Koeffizientenvergleich liefert dann  $n^* = B dx - A dt$ . Dann berechnet man

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \Omega &= n^* \wedge d(\iota_X \Omega) \\ &= B(x, t) \underbrace{\varphi_0'(t) \cos \varphi_0(t)}_{>0, \text{ da } t \in [-\varepsilon, \varepsilon]} dx \wedge dy \wedge dt. \end{aligned}$$

Dies wird genau dann 0, wenn  $B(x, t) = 0$ , also genau dann, wenn  $x = 0$  gilt. Die Kandidaten für die Teilungsmenge sind also die beiden disjunkten Kreise  $\{x = 0\} \cap T$ . (Diese beiden Kreise repräsentieren jeweils eine Longitude und haben somit Steigung unendlich.) In Abbildung 6.11 sieht man

$$T_{\pm} = \{\pm \operatorname{div}_{\Omega}(X) > 0\} = \{\pm B(x, t) > 0\} = \{\mp x > 0\} \subset T.$$

Entlang  $\{x = 0\}$  gilt nun  $B(x, t) = 0$  und  $A(x, t) \sin \varphi_0(t) > 0$ , also zeigt  $X$  entlang  $\{x = 0\}$  aus  $T_+$  heraus. Damit wird die charakteristische Blätterung  $T_{\xi}$  von der Menge  $\Gamma_T = \{x = 0\} \cap T$  geteilt, und somit ist  $T$  nach Satz 2.58 eine konvexe Fläche mit Teilungsmenge  $\Gamma_T$ .  $\square$

Der Beweis von Lemma 6.10 funktioniert analog. Schränkt man nun den Kontaktomorphismus  $F$  aus Lemma 6.9 auf das Komplement des von  $T$  berandeten Volltorus ein, erhält man sofort:

**Korollar 6.12.**  $(T_A^3, \xi_\varphi)$  entsteht durch Kontakt-Dehn-Chirurgie entlang des Legendre-Knotens  $K_0$  aus  $(T_{A_0}^3, \xi_{\varphi_0})$ .

Um den Beweis von Lemma 5.17 abzuschließen, muss nur noch der Chirurgiekoeffizient dieser Kontaktchirurgie berechnet werden.

**Lemma 6.13.**

*Der Chirurgiekoeffizient dieser Kontakt-Dehn-Chirurgie ist  $-1/k$ .*

*Beweis.*

Der Kontaktomorphismus  $F$  ist relativ explizit gegeben. Um den Chirurgiekoeffizienten zu bestimmen, muss man nur überprüfen, auf was der Meridian  $\mu_0$  und die Longitude  $\lambda_0$  von  $T$  auf Homologieniveau abgebildet werden. Da man dies nur auf Homologieniveau braucht, kann man statt den Tori  $T$  und  $F(T)$  die dazu isotopen Tori  $\partial\nu K_0$  und  $\partial\nu K$  betrachten. Da weiter der Kontaktomorphismus aus Lemma 6.9 homotop zu dem Homöomorphismus aus Lemma 6.2 ist, reicht es, Letzteren zu betrachten. Der Meridian und die Longitude von  $\partial\nu K_0$  waren gegeben durch

$$\begin{aligned}\mu_0 &= \{(x, 0, t) \in \partial\nu K_0\}, \\ \lambda_0 &= \{(\delta, y, 0) \in \partial\nu K_0\},\end{aligned}$$

wobei  $\lambda_0$  in positiver  $y$ -Richtung orientiert und  $\mu_0$  positiv in der  $xt$ -Ebene orientiert sein soll (siehe Abbildung 6.12). Vollkommen analog sind Meridian  $\mu$  und Longitude  $\lambda$  von  $\partial\nu K$  gegeben. Der Homöomorphismus  $F$  war auf  $\partial\nu K_0$  gegeben durch

$$(x, y, t) \xrightarrow{F} \left(x, \frac{\varepsilon - t}{2\varepsilon} y + \frac{\varepsilon + t}{2\varepsilon} (kx + y), t\right).$$

Man setzt nun also  $\mu_0$  und  $\lambda_0$  oben in die Abbildung ein und rechnet dann nach, dass  $F$  auf Homologieebene wie folgt wirkt (siehe Abbildung 6.12):

$$\begin{aligned}\mu_0 &\xrightarrow{F} \mu + k\lambda \\ \lambda_0 &\xrightarrow{F} \lambda\end{aligned}$$

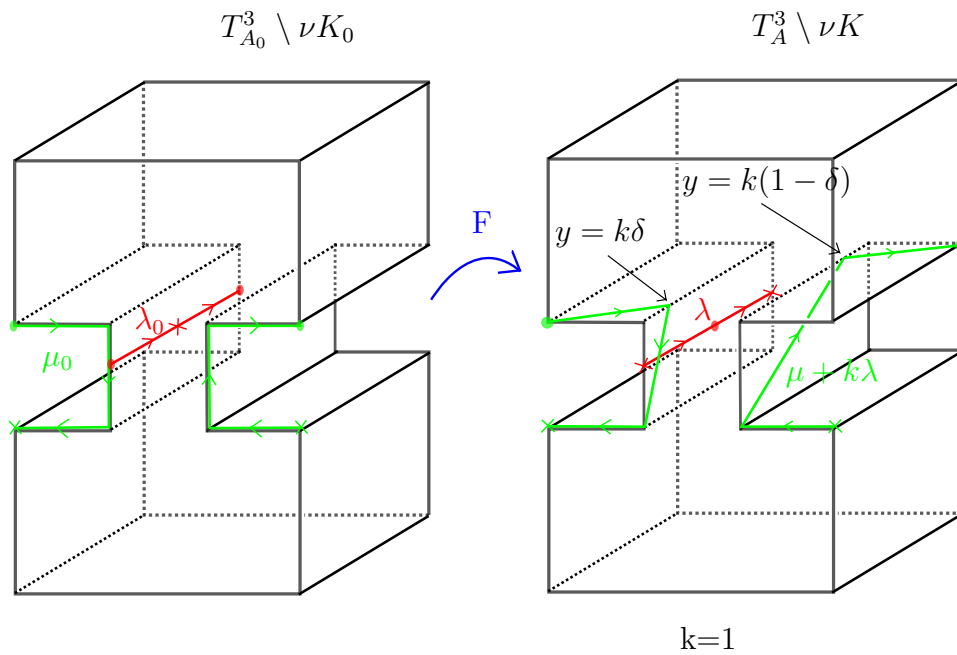


Abbildung 6.12: Die Wirkung von  $F$  auf Homologieebene (für  $k = 1$ )

Also gilt:

$$\mu_0 - k\lambda_0 \xrightarrow{F} \mu + k\lambda - k\lambda = \mu$$

Klebt man nun einen Volltorus in  $(T_{A_0}^3 \setminus \nu(K_0), \xi_{\varphi_0})$  herein, um  $(T_A^3, \xi_{\varphi})$  zu erhalten, wird die Kurve  $\mu_0 - k\lambda_0$  in der neuen Mannigfaltigkeit homologisch trivial. Der Chirurgiekoeffizient ist also durch  $-1/k$  gegeben.  $\square$

Hiermit ist der Beweis von Lemma 5.17 abgeschlossen und somit auch der Beweis des Füllbarkeitssatzes von Ding-Geiges 3.46.

# Literaturverzeichnis

- [1] V.I. ARNOLD, S.M. GUSEIN-ZADE AND A.N. VARCHENKO, *Singularities of Differentiable Maps: Vol. 2: Monodromy and asymptotic integrals*, Monographs in Mathematics Vol. **83** (Birkhäuser, 1988).
- [2] V. COLIN, Recollement de variétés de contact tendues, *Bull. Soc. Math. France* **127** (1999), no 1, 43-69.
- [3] K. CONRAD,  $SL_2(\mathbb{Z})$ , Übersichtsartikel erhältlich auf:  
<http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/>
- [4] F. DING AND H. GEIGES, Symplectic fillability of tight contact structures on torus bundles, *Alg. and Geom. Topol.* **1** (2001), 153-172.
- [5] F. DING AND H. GEIGES, A Legendrian surgery presentation of contact 3-manifolds, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **136** (2004), 583-598.
- [6] F. DING AND H. GEIGES, Handle moves in contact surgery diagrams, *J. Topol.* **2** (2009), 105-122.
- [7] F. DING, H. GEIGES AND A. I. STIPSICZ, Surgery diagrams for contact 3-manifolds, *Turkish J. Math.* **28** (2004), 41-74.
- [8] Y. ELIASHBERG, New invariants of open symplectic and contact manifolds, *J. Amer. Math. Soc.* **4** (1991), 513-520.
- [9] Y. ELIASHBERG, Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet's work, *Ann. Inst. Fourier* **42** (1992), 165-192.
- [10] Y. ELIASHBERG, Unique holomorphically fillable contact structure on the 3-torus, *Internat. Math. Res. Notices* **2** (1996), 77-82.
- [11] J. ETNYRE AND K. HONDA, On the non-existence of thight contact structures, *Ann. of Math.* **153** (2001), 749-766.

- [12] D. GAY, Explicit concave fillings of contact three-manifolds, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **133** (2002), 431-441.
- [13] H. GEIGES, *An Introduction to Contact Topology*, Cambridge Stud. Adv. Math. **109** (Cambridge University Press, 2008).
- [14] E. GIROUX, Une infinité de structures de contact tendues sur une infinité de variétés, *Invent. Math.* **135** (1999), 789-802.
- [15] E. GIROUX, Structures de contact en dimension trois et bifurcations des feuilletages de surfaces, *Invent. Math.* **141** (2000), 615-689.
- [16] R. E. GOMPF AND A. I. STIPSICZ, *4-Manifolds and Kirby Calculus*, Grad. Stud. Math. **20** (American Mathematical Society, Providence, RI, 1999).
- [17] M. GROMOV, Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds, *Invent. Math.* **82** (1985), 307-347.
- [18] J. HEMPEL, Residual finiteness for 3-manifolds, in: S. M. Gersten and J. R. Stallings (eds.), *Combinatorial Group Theory and Topology* (Alta, Utah, 1984), 379-396, *Ann. of Math. Stud.* **111**, (Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1987).
- [19] A. HATCHER, *Notes on basic 3-manifold topology*, Buch in Vorbereitung, erhältlich auf: <http://www.math.cornell.edu/hatcher/>
- [20] D. HUSEMÖLLER, *Fibre Bundles*, Graduate Texts in Mathematics **20** ( New York: Springer-Verlag, 1994).
- [21] H. HOFER AND E. ZEHNDER, *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*, Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher (Birkhäuser, 1994).
- [22] K. HONDA, On the classification of tight contact structures I, *Geom. Topol.* **4** (2000), 309-368.
- [23] K. HONDA, On the classification of tight contact structures II, *J. Differential Geom.* **55** (2000), 83-143.
- [24] Y. KANDA, The classification of tight contact structures on the 3-torus, *Comm. Anal. Geom.* **5** (1997), 413-438.
- [25] M. KEGEL, Kontakt-Dehn-Chirurgie entlang Legendre-Knoten, Bachelorarbeit, Universität zu Köln (2011).

- [26] P. LISCA AND A. I. STIPSICZ, Tight, not semi-fillable contact circle bundles, *Math. Ann.* **328** (2004), 285-298.
- [27] S. MAKAR-LIMANOV, Tight contact structures on solid tori, *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** (1998), 1013-1044.
- [28] B. OZBAGCI AND A. I. STIPSICZ, *Surgery on Contact 3-Manifolds and Stein Surfaces*, Bolyai Soc. Math. Stud. **13**, Springer-Verlag, Berlin (2004).
- [29] V. V. PRASOLOV AND A. B. SOSSINSKY, *Knots, Links, Braids and 3-Manifolds*, Transl. math. Monogr. **154**, American Mathematical Society, Providence (1997).
- [30] D. ROLFSEN, *Knots and Links*, Mathematics Lecture Series **7**, Publish or Perish, Berkeley (1976).
- [31] W. B. THURSTON, *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Princeton mathematical series **35**, Princeton University Press (1997).
- [32] J. WEEKS, *The Shape of Space*, Marcel Dekker (2002).
- [33] A. WEINSTEIN, Contact surgery and symplectic handlebodies, *Hokkaido Math. J.* **20** (1991), 241-251.