# Optimierung eines hydro-thermischen Kraftwerkssystems unter Ungewißheit*

*Dr. rer. nat. N. Gröwe-Kuska, Dipl.-Math. M.P. Nowak VDI,*
*Univ.-Prof. Dr. sc. nat. W. Römisch und Dipl.-Math. I. Wegner*

Humboldt–Universität Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, 10099 Berlin

**Zusammenfassung.** In der vorliegenden Arbeit beschreiben wir ein stochastisches Modell für den kostenoptimalen Einsatz eines hydro-thermischen Kraftwerkssystems unter Daten-Ungewißheit sowie dessen numerische Lösung mittels einer neuen Methodik zur Generierung von Daten-Szenarien und einer stochastischen Variante der Lagrange Relaxation.

## 1 Einleitung und Modellierung

Wir betrachten ein Kraftwerkssystem, das aus thermischen Kraftwerken (Kohlekraftwerke, Gasturbinen) und Pumpspeicherwerken besteht, und beschreiben ein Modell des optimalen Einsatzes des Kraftwerksparks und von Strombezügen für einen Planungszeitraum unter der Berücksichtigung zufallsbehafteter Lastverläufe, Zuflüsse und Preise für Brennstoffe und Strombezüge. Die optimalen Entscheidungen in einem Planungszeitraum (z.B. für den nächsten Tag) hängen in der Regel von zukünftigen und zufallsbehafteten Daten in einem größeren Zeitraum (z.B. Woche, Jahr) ab, den wir im folgenden Optimierungszeitraum nennen. Nachfolgend gehen wir auf ein stochastisches Modell für den optimalen Betrieb eines solchen Kraftwerkssystem ein, entwickeln ein Lösungsverfahren und validieren dies am Beispiel des hydro-thermischen Kraftwerkssystems der VEAG bei zufallsbehafteter elektrischer Last.
Wir bezeichnen mit $T$ die Anzahl der (nicht notwendigerweise äquidistanten) Zeitintervalle, in die der Optimierungszeitraum zerlegt wurde und mit $h^t$ die Dauer des Intervalls $t$ in Stunden. Strombezüge werden wir als spezielle thermische Blöcke modellieren. Wir bezeichnen mit $I$ bzw. $J$ die Anzahl der thermischen Kraftwerksblöcke bzw. der Pumpspeicherwerke (PSW).
Für hydro-thermische Kraftwerkssysteme mit Strombezügen stellen im Zeitintervall $t$ die zu deckende Last, die meist von der Last abhängende Reserveleistung der thermischen Blöcke, Zuflüsse in den PSW sowie Preise für Brennstoffe und Strombezüge Parameter der Einsatzplanung dar, die zufälligen Einflüssen unterliegen. Die Ungewißheit über die Werte der zufälligen Parameter nimmt im Laufe des Optimierungszeitraumes zu. Wir setzen daher von nun an voraus, daß für die ersten $T_1$ Zeitintervalle (d.h. für $t = 1, \ldots, T_1$) die zufälligen Parameter so gut vorhersagbar sind, daß diese Werte als determiniert betrachtet werden können. Es ist dann sinnvoll, einen optimalen Einsatzplan der Erzeugereinheiten für den Planungszeitraum $t = 1, \ldots, T_1$ so zu bestimmen, daß die Summe der Erzeugungskosten für $t = 1, \ldots, T_1$ und die erwarteten Erzeugungskosten in den nachfolgenden Zeitintervallen $t = T_1 + 1, \ldots, T$ minimiert werden.
Um Variationen der zufälligen Parameter und deren Häufigkeit quantifizieren zu können, benutzen wir eine Menge von $S$ *Szenarien* mit zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $\pi_1, \ldots, \pi_S$ mit $\sum_{s=1}^{S} \pi_s = 1$. Die Gesamtheit der Szenarien bildet mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten eine Approximation für den Datenprozeß.
Ein Szenario ist eine Trajektorie oder Realisierung des stochstischen Datenprozesses. Somit stellt Szenario $s$ einen Vektor von T Tupeln dar. Tupel $t$ kann einen Wert für die Last $\boldsymbol{d}^{s,t}$, die Reser-

* Dieses Forschungsprojekt wurde im Rahmen des Schwerpunktprogramms "Echtzeit-Optimierung großer Systeme" der Deutschen Forschungsgemeinschaft gefördert.

veleistung $\boldsymbol{r}^{s,t}$, den Zufluß $\boldsymbol{\gamma}_j^{s,t}$ im PSW $j$ $(j = 1, \ldots, J)$ und den Brennstoff- bzw. Bezugspreis $\boldsymbol{B}_i^{s,t}$ des thermischen Blocks $i$ $(i = 1, \ldots, I)$ für das Zeitintervall $t$ enthalten. Die Werte aller $S$ Szenarien müssen bis einschließlich zum Zeitintervall $T_1$ übereinstimmen. Ist man z.B. nur daran interessiert, die Ungewißheit über die Last und die Preise von Bezugsverträgen zu modellieren, so enthält jedes Tupel einen Lastwert und einen Satz von Bezugspreisen. Durch Verwendung multipler Szenarien kann man verschiedene Bezugspreise gleichen Lastwerten oder verschiedenen Lastwerten dieselben Bezugspreise zuordnen. Somit ist man in der Lage, Abhängigkeiten zwischen den zufälligen Parametern in den Szenarien auszudrücken.
Jedem Szenario ist ein Satz von Optimierungsvariablen zugeordnet, der die Entscheidungen über das An- bzw. Abfahren von thermischen Blöcken und die Veränderung des Erzeugungsregimes des Kraftwerkssystems für jedes Zeitintervall $t$ beschreibt. Die dem Szenario $s$ zugehörigen **Optimierungsvariablen** sind für jedes Zeitintervall $t$ $(t = 1, \ldots, T)$ der Schaltzustand $\boldsymbol{u}_i^{s,t} \in \{0, 1\}$ des thermischen Blockes $i$ $(i = 1, \ldots, I)$, der Leistungswert $\boldsymbol{p}_i^{s,t}$ des thermischen Blockes $i$ $(i = 1, \ldots, I)$ und die Turbinen- bzw. Pumpleistung $\boldsymbol{v}_j^{s,t}, \boldsymbol{w}_j^{s,t}$ des Pumpspeicherwerkes $j$ $(j = 1, \ldots, J)$.
Als **Nebenbedingungen** müssen die dem Szenario $s$ zugeordneten Optimierungsvariablen in jedem Zeitintervall $t$ die Forderung nach Deckung der Last $\boldsymbol{d}^{s,t}$ und der Reserveleistung $\boldsymbol{r}^{s,t}$ sowie die Kapazitätsgrenzen der Erzeugereinheiten einhalten. Die im Zeitintervall $t$ zu treffenden Entscheidungen müssen dabei unabhängig von den Entscheidungen und Werten der zufälligen Parameter sein, die in der Zukunft liegenden Zeitintervallen $t + 1, \ldots, T$ zugeordnet sind. Diese natürliche Forderung an die Optimierungsvariablen wird in der Literatur *Nichtantizipativität der Entscheidungen* genannt.
Die Nichtantizipativitätsbedingungen an die Optimierungsvariablen kann man aus den Werten der Szenarien ableiten: Die Szenarien $s_1$ und $s_2$ heißen *nicht unterscheidbar zum Zeitpunkt* $\tau$, wenn sie dieselbe Information über die Realisierungen der zufälligen Parameter für den Zeitraum $t = 1, \ldots, \tau$ liefern. D.h., die den Szenarien zugehörigen Werte für Last, Reserveleistung, Zuflüsse sowie für Brennstoff- und Bezugspreise stimmen bis zum Zeitintervall $\tau$ überein. Wegen der Nichtantizipativität der Entscheidungen müssen dann die den beiden Szenarien zugeordneten Werte der Optimierungsvariablen bis zum Zeitintervall $\tau$ übereinstimmen:

$$\boldsymbol{u}_i^{s_1,t} = \boldsymbol{u}_i^{s_2,t}, \boldsymbol{p}_i^{s_1,t} = \boldsymbol{p}_i^{s_2,t}, \boldsymbol{v}_j^{s_1,t} = \boldsymbol{v}_j^{s_2,t}, \boldsymbol{w}_j^{s_1,t} = \boldsymbol{w}_j^{s_2,t} \quad \text{für alle } t = 1, \ldots, \tau. \tag{1.1}$$

Diese Gleichungen werden im stochastischen Modell als Nebenbedingungen berücksichtigt.
Der thermische Block $i$ hat im Zeitintervall $t$ die Anfahrkostenfunktion $A_i^t$ und für Szenario $s$ die Brennstoffkostenfunktion $\boldsymbol{B}_i^{s,t}$. Für Bezugsverträge fallen keine Anfahrkosten an.
Das Optimierungsproblem zur Bestimmung eines kostenoptimalen Einsatzplanes des hydrothermischen Kraftwerkssystems im Planungszeitraum $t = 1, \ldots, T_1$ unter Berücksichtigung zufallsbehafteter Lastverläufe, Zuflüsse und Preise für Brennstoffe und Strombezüge im Optimierungszeitraum $t = 1, \ldots, T$ lautet dann: Minimiere die **Zielfunktion**

$$\sum_{s=1}^{S} \pi^s \left( \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{I} h^t \boldsymbol{B}_i^{s,t}(\boldsymbol{p}_i^{s,t}, \boldsymbol{u}_i^{s,t}) + \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{I} A_i^t(\boldsymbol{u}_i^s) \right) \tag{1.2}$$

bei Einhaltung der folgenden **Nebenbedingungen** für jedes Szenario $s$:

- Deckung der Last $\boldsymbol{d}^{s,t}$ sowie der Reserveleistung $\boldsymbol{r}^{s,t}$ der thermischen Blöcke in jedem Zeitintervall $t$:

  $$\sum_{i=1}^{I} \boldsymbol{p}_i^{s,t} + \sum_{j=1}^{J} (\boldsymbol{v}_j^{s,t} - \boldsymbol{w}_j^{s,t}) \geq \boldsymbol{d}^{s,t} \ , \ \sum_{i=1}^{I} (\boldsymbol{u}_i^{s,t} \ p_{it}^{max} - \boldsymbol{p}_i^{s,t}) \geq \boldsymbol{r}^{s,t}, \ \ t = 1, \ldots, T.$$

  Die Größe $p_{it}^{max}$ bezeichnet die maximale Leistungsgrenze von Block $i$ im Zeitintervall $t$.

- Schranken für die Optimierungsvariablen entsprechend den Leistungsgrenzen der thermischen Blöcke sowie der Turbinen und Pumpen in den PSW.

- Einhalten der Mindeststillstandszeit von $\tau_i$ Stunden nach einer Abschaltung des thermischen Blocks $i$ vom Netz sowie der Mindestlaufzeit von $\beta_i$ Stunden ab dem letzten Anfahrvorgang:

$$\begin{array}{rcll} \boldsymbol{u}_i^{s,t-1} - \boldsymbol{u}_i^{s,t} & \leq & 1 - \boldsymbol{u}_i^{s,\tau}, & \tau = t+1, \ldots, \min\{t + \tau_i - 1, T\}, \;\; t = 1, \ldots, T, \\ \boldsymbol{u}_i^{s,t} - \boldsymbol{u}_i^{s,t-1} & \leq & \boldsymbol{u}_i^{s,\tau}, & \tau = t+1, \ldots, \min\{t + \beta_i - 1, T\}, \;\; t = 1, \ldots, T. \end{array}$$

  Bezugsverträge werden als thermische Blöcke mit Mindeststillstands- und Mindestlaufzeit von 1 Stunde modelliert.

- Beschränkung der Turbinen- bzw. Pumpleistung durch die Energiemengen, welche den Füllständen in Ober- und Unterbecken entsprechen.
  Die am Ende des Intervalls $t$ im Oberbecken des Pumpspeicherwerkes $j$ gespeicherte Energiemenge $\boldsymbol{l}_j^{s,t}$ hängt vom Zufluß $\boldsymbol{\gamma}_j^{s,t}$ ab:

$$\begin{array}{rcll} \boldsymbol{l}_j^{s,t} & = & \boldsymbol{l}_j^{s,t-1} - h^t(\boldsymbol{v}_j^{s,t} - \eta_j \boldsymbol{w}_j^{s,t}) + \boldsymbol{\gamma}_j^{s,t}, & j = 1, \ldots, J; \; t = 1, \ldots, T, \\ \boldsymbol{l}_j^{s,0} & = & L_j^{in}, \;\; \boldsymbol{l}_j^{s,T} \; = \; L_j^{end} & j = 1, \ldots, J. \end{array}$$

  Hier bezeichnen $L_j^{in}$ bzw. $L_j^{end}$ die zu Beginn bzw. zu Ende des Optimierungszeitraumes im Oberbecken gespeicherte Energiemenge und $\eta_j$ den Wirkungsgrad des $j-$ten PSW.
  Eine Nebenbedingung, die gleichzeitigen Pump– und Turbinenbetrieb in den PSW ausschließt, ist nicht notwendig, da dieser Effekt im optimalen Einsatzplan nicht auftreten kann.

- Einhalten der Nichtantizipativitätsbedingungen der Optimierungsvariablen (vgl. (1.1)).

Bei Berücksichtigung zufälliger Parameter in der Einsatzplanung erhält man Optimierungsaufgaben, die in der Literatur *mehrstufige stochastische Optimierungsmodelle* genannt werden.
Das stochastische Optimierungsmodell für den kostenoptimalen Einsatz der Einheiten hat $SIT$ binäre und $S(I+2J)T$ stetige Optimierungsvariablen. Die Anzahl der Nebenbedingungen hängt wegen der Nichtantizipativitätsbedingungen an die Optimierungsvariablen von der abstrakten Struktur der Szenarien — dem *Szenariobaum* — ab. Jeder Knoten des Baumes enthält Szenariowerte für ein gewisses Zeitintervall $t$. Die Kanten verbinden die einem Szenario zugehörigen Werte für zwei aufeinanderfolgende Zeitintervalle. Die Wurzel des Baumes bildet der Knoten mit den (für alle Szenarien identischen) Werten für das Zeitintervall $t = 1$. Die Blätter (oder Endpunkte) des Baumes bilden die Knoten, die $t = T$ zugeordnet sind. Jedes Szenario ist durch einen Weg von der Wurzel zu einem der Blätter definiert. Zwei Szenarien, die zum Zeitpunkt $\tau$ nicht unterscheidbar sind, weisen wir für den Zeitraum $t = 1, \ldots, \tau$ dieselbe Knotenfolge zu. In einem der nachfolgenden Zeitintervalle müssen sich die zugehörigen Szenariowerte voneinander unterscheiden. Dies drückt sich im (Teil-)Baum der beiden Szenarien darin aus, daß es einen Knoten geben muß, der zwei Nachfolgeknoten besitzt. Dieser ausgezeichnete Knoten heißt *Verzweigungspunkt* des (Teil-)Baumes. Ab dem Verzweigungspunkt werden den beiden Szenarien auch dann verschiedene Knotenfolgen zugewiesen, wenn beide Szenarien zu diesen Zeitpunkten aus denselben Werten gebildet werden.
Sofern die Szenarien für den Datenprozeß nicht gegeben sind, werden zumeist gleichmäßige Bäume mit wenigen Verzweigungspunkten als (Initial-)Struktur des Szenariobaumes gewählt. Man kann dann noch die Anzahl der Nachfolgeknoten der Verzweigungspunkte an das Planungsproblems anpassen. Angenommen, zu gewissen Zeitpunkten $T_1 < T_2 < \ldots < T_K < T$ des

Optimierungszeitraumes ist es auf Grund der bis dahin zu beobachtenden Realisierungen der zufälligen Parameter möglich, die Prognosen für zukünftige Parameterwerte zu verfeinern und das Erzeugungsregime anzupassen. Dann sind die Zeitintervalle $T_1, T_2, \ldots, T_K$ mögliche Verzweigungspunkte des Szenariobaums.
Die Nichtantizipativitätsbedingungen (1.1) erzwingen, daß die **Baumstruktur der Optimierungsvariablen** mit der des Szenariobaums übereinstimmt. Sie werden also nicht benötigt bei Verwendung eines Optimierungsverfahren, das an die Baumstruktur der Optimierungsvariablen angepaßt ist. In diesem Fall reduziert sich zudem die Anzahl der Optimierungsvariablen drastisch: Bei einem Szenariobaum mit insgesamt $W$ Knoten werden nur noch $IW$ binäre und $(I + 2J)W$ stetige Optimierungsvariablen benötigt. Tabelle 1 zeigt, daß selbst bei Ausnutzung der Baumstruktur der Optimierungsvariablen die Dimensionen des stochastischen Optimierungsmodells (1.2) (für T=168, I=25, J=7) in Abhängigkeit von der Szenarioanzahl dramatisch sind. Bei der Anzahl der Nebenbedingungen wurden die Mindeststillstands- und Mindestlaufzeiten sowie die Zielfunktion nicht berücksichtigt. Die Zahlenwerte erhält man für einen gleichmäßigen Szenariobaum mit äquidistanten Verzweigungspunkten, die jeweils 2 Nachfolgeknoten besitzen.

| Szenarien | Knoten | Variablen | | Nebenbedingungen | Nichtnullelemente |
|---|---|---|---|---|---|
| | | binäre | stetige | | |
| 1 | 168 | 4200 | 6652 | 13441 | 19657 |
| 10 | 756 | 18900 | 29484 | 60490 | 88462 |
| 20 | 1176 | 29400 | 45864 | 94100 | 137612 |
| 50 | 2478 | 61950 | 96642 | 198290 | 289976 |
| 100 | 4200 | 105000 | 163800 | 336100 | 491500 |

Tabelle 1: Modelldimensionen in Abhängigkeit von der Anzahl der Szenarien

## 2 Optimierungsverfahren

Das in Abschnitt 1 entwickelte Modell ist aus mathematischer Sicht ein hochdimensionales gemischt-ganzzahliges Optimierungsproblem. Da selbst im Fall eines linearen Modells moderne Löser für gemischt-ganzzahlige lineare Programme an den gewaltigen Dimensionen scheitern, stellen strukturausnutzende *Dekompositionstechniken* die einzige praktikable Alternative dar. Die beiden im gemischt-ganzzahligen Fall wesentlichen Dekompositionsansätze beruhen auf dem in der Kraftwerkseinsatz-Optimierung klassischen Prinzip der Lagrange Relaxation und seiner Varianten (vgl. [14]). Es handelt sich dabei um die *Szenario-Dekomposition*, d.h., die Relaxation der Nichtantizipativitätsbedingungen, und die *stochastische Lagrange Relaxation*, d.h., eine stochastische Version der Relaxation von Bedingungen, die Erzeugereinheiten verkoppeln. Die Szenario-Dekomposition führt zu einer sukzessiven Zerlegung in $S$ determinierte Optimierungsmodelle der gleichen Struktur wie das stochastische Modell ([3]). Bei der stochastischen Lagrange Relaxation erfolgt eine Dekomposition in stochastische Optimierungsprobleme für die einzelnen Erzeugereinheiten ([5]). In beiden Ansätzen erfolgt die Koordination der sukzessiven Dekomposition durch ein (konkaves, nichtdifferenzierbares) Master-Problem. Beide erfordern abschließende (Lagrange) Heuristiken, um aus den nach Lösung des Master-Problems erhaltenen Informationen (zu Preisen für die Verletzung der jeweiligen Nebenbedingungen) Lösungen des Originalproblems zu berechnen. Mit Ausnahme der Arbeit [15] finden in der neueren Literatur vor allem Varianten der stochastischen Lagrange Relaxation Anwendung ([1], [4], [13], [16]). Die Methodiken unterscheiden sich dabei vor allem durch die verwendeten Algorithmen zur Lösung des Master-Problems, der Teilprobleme und für die Lagrange Heuristik.
Im folgenden gehen wir auf den Zugang aus [13] näher ein und erläutern dessen Potenzen am

Beispiel der Lösung eines stochastischen Modells zur Optimierung des wöchentlichen Kraftwerkseinsatzes bei stochastischer Last im System der VEAG. Der Ansatz der stochastischen Lagrange Relaxation führt bei Verwendung von Lagrange Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}$ und $\boldsymbol{\mu}$ mit den nichtnegativen Komponenten $\boldsymbol{\lambda}^{s,t}$ und $\boldsymbol{\mu}^{s,t}$, $s = 1, ..., S, t = 1, ..., T$ für die Lastdeckungs- und Reserve-Nebenbedingungen zu folgender Lagrange-Funktion

$$
\begin{aligned}
L(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \quad = \quad & \sum_{s=1}^{S} \pi^s \left\{ \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{I} h^t \boldsymbol{B}_i^{s,t}(\boldsymbol{p}_i^{s,t},\boldsymbol{u}_i^{s,t}) + \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{I} A_i^t(\boldsymbol{u}_i^s) \right. \\
& \left. + \sum_{t=1}^{T} [\boldsymbol{\lambda}^{s,t}(\boldsymbol{d}^{s,t} - \sum_{i=1}^{I} \boldsymbol{p}^{s,t} - \sum_{j=1}^{J} (\boldsymbol{v}_j^{s,t} - \boldsymbol{w}_j^{s,t})) + \boldsymbol{\mu}^{s,t}(\boldsymbol{r}^{s,t} - \sum_{i=1}^{I} (\boldsymbol{u}_i^{s,t} p_{it}^{\max} - \boldsymbol{p}_i^{s,t}))] \right\}.
\end{aligned}
$$

Die zugehörige (duale) Zielfunktion des Master-Problems ist dann

$$
D(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) = \min_{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})} \; L(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}),
$$

wobei das Minimum bzgl. aller Nebenbedingungen mit Ausnahme der Lastdeckungs- und der Reserveleistungs-Bedingungen genommen wird.
Motiviert durch allgemeine Dualitätsresultate (vgl. die Diskussion in Kap. 4 von [5]) betrachten wir nun das konkave Master-Problem

$$
\begin{aligned}
\max\{D(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) \;\; : \;\; & \boldsymbol{\lambda}^{s,t} \geq 0\,,\ \boldsymbol{\mu}^{s,t} \geq 0\,,\ \text{und } \boldsymbol{\lambda}^{s_1,\tau} = \boldsymbol{\lambda}^{s_2,\tau}, \boldsymbol{\mu}^{s_1,\tau} = \boldsymbol{\mu}^{s_2,\tau},\ \text{für alle } \tau = 1,...,t, \\
& \text{und alle Szenarien } s_1, s_2,\ \text{die zum Zeitpunkt } t \text{ nicht unterscheidbar sind}\}
\end{aligned}
$$

mit $2W$ Optimierungsvariablen und wissen analog zum determinierten Fall, daß die Funktion $D$ die folgende Struktur besitzt:

$$
D(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) = \sum_{i=1}^{I} D_i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) + \sum_{j=1}^{J} \tilde{D}_j(\boldsymbol{\lambda}) + \sum_{s=1}^{S} \pi^s \sum_{t=1}^{T} [\boldsymbol{\lambda}^{s,t}\boldsymbol{d}^{s,t} + \boldsymbol{\mu}^{s,t}\boldsymbol{r}^{s,t}].
$$

Dabei sind die Funktionen $D_i$ und $\tilde{D}_j$ die Optimalwerte der thermischen und der hydraulischen Teilprobleme in Abhängigkeit von $\boldsymbol{\lambda}$ und $\boldsymbol{\mu}$. Die thermischen Teilprobleme ihrerseits stellen mehrstufige kombinatorische stochastische Optimierungsprobleme dar und haben die Gestalt

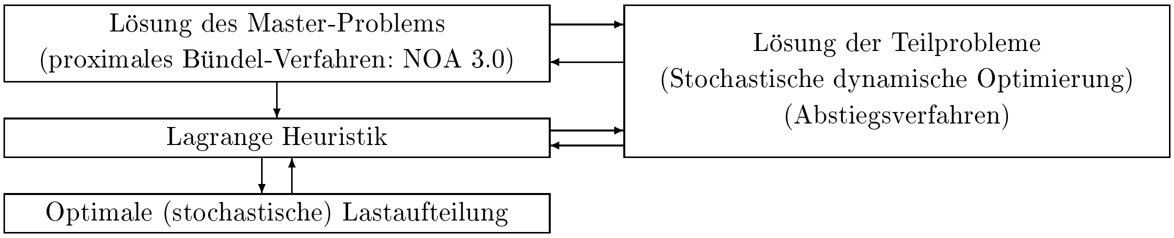
$$
\begin{aligned}
D_i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) \quad = \quad & \min_{\boldsymbol{u}_i}\{\sum_{s=1}^{S} \pi^s \sum_{t=1}^{T} [\min_{\boldsymbol{p}_i^{s,t} \in [\boldsymbol{u}_i^{s,t} p_{it}^{min}, \boldsymbol{u}_i^{s,t} p_{it}^{max}]} \{h^t \boldsymbol{B}_i^{s,t}(\boldsymbol{p}_i^{s,t},\boldsymbol{u}_i^{s,t}) + (\boldsymbol{\mu}^{s,t} - \boldsymbol{\lambda}^{s,t})\boldsymbol{p}_i^{s,t}\} \qquad (2.1) \\
& + A_i^t(\boldsymbol{u}_i^s) - \boldsymbol{\mu}^{s,t}\boldsymbol{u}_i^{s,t} p_{it}^{max}] \ : \ \boldsymbol{u}_i \text{ erfüllt die Schaltrestriktionen von} \\
& \text{Block } i \text{ und } \boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{u}_i \text{ erfüllen die Nichtantizipativitätsbedingungen}\}.
\end{aligned}
$$

Die hydraulischen Teilprobleme erweisen sich als mehrstufige stochastische Optimierungsprobleme der folgenden Gestalt

$$
\begin{aligned}
\tilde{D}_j(\boldsymbol{\lambda}) \quad = \quad & \min\{\sum_{s=1}^{S} \pi^s \sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{\lambda}^{s,t}(\boldsymbol{w}_j^{s,t} - \boldsymbol{v}_j^{s,t}) \ : \ \boldsymbol{v}_j^{s,t} \text{ und } \boldsymbol{w}_j^{s,t} \text{ erfüllen die Neben-} \qquad (2.2) \\
& \text{bedingungen der PSW und die Nichtantizipativitätsbedingungen}\}.
\end{aligned}
$$

Die spezifischen Strukturen der thermischen und der hydraulischen Teilprobleme und ihre kleinere Dimension ermöglichen den Einsatz speziell angepaßter Algorithmen zur Berechnung von Funktionswerten sowie Subgradienten von $D_i$ und $\tilde{D}_j$: Dynamische stochastische Optimierung

für (2.1) und ein spezielles Abstiegsverfahren für (2.2) (vgl. [11], [13]).
Die Grundidee des Optimierungsverfahrens besteht nun darin, zunächst das Master-Problem zu lösen und anschließend mittels einer Lagrange Heuristik eine zulässige Lösung des Originalproblems mit hinreichend gutem Zielfunktionswert zu bestimmen. In der nachfolgenden Abbildung wird die Struktur des gesamten **Optimierungsverfahrens** dargestellt.




Zur Lösung des **Master-Problems** wird ein proximales Bündel-Verfahren für nichtdifferenzierbare Optimierungsprobleme ([9], [10]) eingesetzt, das sehr gute Konvergenzeigenschaften insbesondere für duale Probleme besitzt ([7]) und für größere Dimensionen geeignet ist. Sind nun $\boldsymbol{\lambda}_*$ und $\boldsymbol{\mu}_*$ Lösungen des Master-Problems, so ist $D(\boldsymbol{\lambda}_*, \boldsymbol{\mu}_*)$ eine untere Schranke für den Optimalwert des ursprünglichen Optimierungsproblems. Wie im klassischen determinierten Fall existiert jedoch eine *Dualitätslücke*, da die zu $\boldsymbol{\lambda}_*$ und $\boldsymbol{\mu}_*$ gehörigen Variablen $(\boldsymbol{u}_*, \boldsymbol{p}_*, \boldsymbol{v}_*, \boldsymbol{w}_*)$ im allgemeinen nicht die Lastdeckungs- und Reserve-Nebenbedingungen erfüllen.
Deshalb wurden zwei Varianten von **Lagrange Heuristiken** entwickelt. In der sog. *determinierten Lagrange Heuristik* werden die Mittelwerte von $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{\lambda}_*$ und $\boldsymbol{\mu}_*$ berechnet und mit der in [8] beschriebenen Vorgehensweise (zur Bestimmung einer Reserve-zulässigen Lösung nebst optimaler Lastaufteilung) eine Näherungslösung für den optimalen Einsatzplan $(\boldsymbol{u}^t, \boldsymbol{p}^t, \boldsymbol{v}^t, \boldsymbol{w}^t)$, $t = 1, ..., T_1$, im Planungszeitraum bestimmt. Für eine detailliertere Beschreibung sei auf [13] verwiesen. Die sog. *stochastische Lagrange Heuristik* liefert eine (stochastische) Näherungslösung $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ für den gesamten Optimierungszeitraum und eine zugehörige Genauigkeitsschranke. Ausgangspunkt dieser Heuristik bildet die Menge $U(\boldsymbol{\lambda}_*, \boldsymbol{\mu}_*)$ aller zur Lösung $(\boldsymbol{\lambda}_*, \boldsymbol{\mu}_*)$ des Master-Problems und deren Nachbarschaft gehörigen (stochastischen) Schaltvariablen $\boldsymbol{u}$ der thermischen Blöcke. Ausgehend von einer solchen Schaltvariable mit einer genügend hohen Anzahl an eingeschalteten thermischen Blöcken wird sukzessive eine Folge von Schaltvariablen mit monoton fallender Zielfunktion konstruiert. Dabei wird für jede Schaltvariable mit dem in [13] beschriebenen Verfahren eine optimale stochastische Lastaufteilung zur Bestimmung der zugehörigen Leistungswerte $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ durchgeführt. Aus den Leistungswerten wird jeweils die Zeitperiode mit dem größten Überfluß an Reserveleistung bestimmt. Als nächstes Element der Folge wird dann die Schaltvariable $\boldsymbol{u} \in U(\boldsymbol{\lambda}_*, \boldsymbol{\mu}_*)$ gesucht, bei der in der entsprechenden Zeitperiode ein Kraftwerk ausgeschaltet ist. Außerdem wird darauf geachtet, daß beim Übergang zur nächsten Schaltvariablen nur Kraftwerke ausgeschaltet werden. Die Konstruktion wird abgebrochen, wenn zu einer Schaltvariable keine zulässigen Leistungswerte bestimmt werden konnten. Eine eingehendere Beschreibung dieser Heuristik findet man in [12].
Das Optimierungsverfahren wurde am hydro-thermischen Kraftwerkssystem der VEAG mit $T = 168$, $I = 25$ und $J = 7$, stückweise linearen Brennstoffkosten, stückweise konstanten Anfahrkosten und stochastischer Last getestet. Dabei wurden zu Testzwecken Last-Szenariobäume mit unterschiedlichen Anzahlen von Szenarien und Knoten zufällig erzeugt. Die **Testrechnungen** wurden auf einer HP 9000 Workstation (770/J280) durchgeführt. Die Tabellen 2 und 3 enthalten neben den Rechenzeiten auch Informationen über die relative Lücke bzw. Genauigkeit, die man aus dem Wert der (determinierten bzw. stochastischen) Zielfunktion des Originalproblems und dem Optimalwert des Master-Problems erhält. Die Rechenzeiten sind bei Verwendung beider Heuristiken für Last-Szenariobäume bis zu 2000 Knoten recht günstig. Sie wachsen mit

den Anzahlen der Knoten und naturgemäß stärker bei Verwendung der stochastischen Lagrange Heuristik, die jedoch weitergehende Informationen und eine Genauigkeitsgarantie liefert. Zu beachten ist außerdem, daß in diesem Fall die Master-Probleme mit größerer Genauigkeit (und Rechenzeit) gelöst werden.

| Szenarien | Knoten | Zeiten [s]/Lücken [%] | Knoten | Zeiten [s]/Lücken [%] |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 781 | 31.2 / 0.274 | 1043 | 52.93 / 0.138 |
| 20 | 1982 | 89.13 / 0.149 | 1627 | 93.62 / 0.101 |
| 50 | 4530 | 475.29 / 0.175 | 4060 | 274.43 / 0.096 |
| 100 | 9230 | 1183.25 / 0.108 | 9224 | 1072.18 / 0.131 |

Tabelle 2: Rechenzeiten und "Lücken" mit determinierter Lagrange Heuristik

| Dimensionen | | Zeiten [s] | | Dualität |
|---|---|---|---|---|
| Szenarien | Knoten | Master | Gesamt | Genauigkeit [%] |
| 10 | 952 | 137.54 | 225.72 | 0.26 |
| 20 | 1944 | 301.41 | 419.72 | 0.70 |
| 24 | 2135 | 311.24 | 529.98 | 0.44 |
| 34 | 3043 | 496.72 | 1498.72 | 0.94 |

Tabelle 3: Rechenzeiten und Genauigkeit mit stochastischer Lagrange Heuristik

# 3 Generierung von Last-Szenariobäumen

Konstruktionsverfahren für Szenariobäume sind im Gebiet der stochastischen Optimierung ein aktuelles Forschungsthema (vgl. dazu die Übersichtsarbeit [6]). In [18] wird ein auf die Konstruktion von Lastszenariobäumen zugeschnittenes Zweiphasen-Verfahren beschrieben, das wir im folgenden erläutern wollen.

In der **ersten Phase** wird ein statistisches Modell zur Beschreibung des Lastganges im Optimierungszeitraum bestimmt. Abhängig von der Verfügbarkeit meteorologischer Daten können dies wie in [16] Regressions- oder Zeitreihenmodelle sein. Das statistische Modell wird dann zur Erzeugung einer großen Anzahl unabhängig identisch verteilter Realisierungen (*Simulationsszenarien*) des Lastganges im Optimierungszeitraum benutzt.

Zur Validierung des Modells des optimalen Einsatzes des Kraftwerksparks unter Berücksichtigung zufälliger Lastverläufe für einen Optimierungszeitraum von einer Woche standen uns (realitätsnahe) Lastdaten eines Jahres bei stündlicher Diskretisierung zur Verfügung. Wegen des Fehlens meteorologischer Daten wurden in der Modellierungsphase spezielle lineare nichtstationäre Zeitreihenmodelle angepaßt. Das zyklische Verhalten und die Korrelationsstruktur der Daten können durch SARIMA-Modelle (vgl. dazu Kapitel 6 in [2]) beschrieben werden. Unter Verwendung des *Times Series Packs* von *Mathematica* wurde folgendes SARIMA(7,0,9)$\times$(0,1,0)$_{168}$-Modell für die Last $\boldsymbol{d}^t$ im Zeitintervall $t$ ermittelt:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}^t - \hat{\phi}_1\boldsymbol{y}^{t-1} - \ldots - \hat{\phi}_7\boldsymbol{y}^{t-7} &= \boldsymbol{z}^t + \hat{\theta}_1\boldsymbol{z}^{t-1} + \ldots + \hat{\theta}_9\boldsymbol{z}^{t-9}, \text{ wobei } \boldsymbol{y}^t = \boldsymbol{d}^t - \boldsymbol{d}^{t-168}, \\
(\hat{\phi}_1, \ldots, \hat{\phi}_7) &= (2.79, -4.35, 5.16, -4.88, 3.67, -1.92, 0.50), \\
(\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_9) &= (-1.27, 1.53, -1.35, 0.88, -0.31, -0.06, 0.18, 0.11, 0.07),
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{z}^t$ folgt für jedes $t$ einer Normalverteilung mit Erwartungswert 0 und Standardabweichung 108.3.

In der **zweiten Phase** des Konstruktionsverfahrens erfolgt die Festlegung der Baumstruktur sowie die Berechnung der Szenariowerte unter Verwendung der in Phase 1 erzeugten Simulationsszenarien. Die Baumstruktur wird durch die Anzahl und Lage der Verzweigungspunkte sowie die Anzahl der Nachfolgeknoten bestimmt. Wir legen folgende (Initial-)**Struktur des Szenariobaumes** fest:

- Ein gleichmäßiger Baum mit $K$ Verzweigungspunkten $T_1, \dots, T_K$. Äquidistante Lage der Verzweigungspunkte $T_2, \dots, T_K$ innerhalb des Zeitraumes $t = T_1, \dots, T$.
- Jedem Verzweigungspunkt werden jeweils zwei Nachfolgeknoten zugeordnet. Das entspricht jeweils einer Unterscheidung zwischen den Ereignissen mit der verbalen Beschreibung "niedriger" und "hoher" Lastgang.

Die Anzahl der zu konstruierenden Szenarien $\boldsymbol{d}^1, \dots, \boldsymbol{d}^S \in I\!R^T$ beträgt dann $S = 2^K$.
Die Verzweigungspunkte $T_1, T_2, \dots, T_K$ entsprechen den (in der Regel festen) Zeitpunkten, zu denen es auf Grund der bis dahin zu beobachtenden Last und meteorologischen Daten möglich ist, die Prognosen für zukünftige Parameterwerte zu verfeinern und das Erzeugungsregime anzupassen. Die (Initial-)Struktur des Szenariobaumes adaptiert somit die Planungsstruktur der EVUs für den kurzfristigen Kraftwerkseinsatz. Für einen längeren Optimierungszeitraum ist unter dem Aspekt der Begrenzung der Szenarienanzahl eine nichtäquidistante Lage der Verzweigungspunkte vorzuziehen. Eine Erhöhung der Anzahl der Nachfolgeknoten auf 3 zur Integration eines zusätzlichen Ereignisses — wie etwa "mittlerer" Lastgang — ist leicht möglich, hat jedoch eine Erhöhung der Szenarienanzahl auf $S = 3^K$ zur Folge.
Bevor wir den $T$ Komponenten des Szenarios $\boldsymbol{d}^s$ Werte zuweisen, bestimmen wir zunächst für jedes Zeitintervall $t = T_1+1, \dots, T$ den Mittelwert $\bar{d}^t$ der Simulationsszenarien $\tilde{\boldsymbol{d}}^1, \dots, \tilde{\boldsymbol{d}}^M$ sowie die Standardabweichung $\bar{\sigma}^t$ in den Verzweigungspunkten $T_2, \dots, T_K$ und $T_{K+1} := T$:

$$\bar{d}^t = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \tilde{\boldsymbol{d}}^{i,t}, \quad \bar{\sigma}^{T_k} = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^{M} (\tilde{\boldsymbol{d}}^{i,T_k} - \bar{d}^{T_k})^2}, \quad k = 2, \dots, K+1$$

Die vorhergesagten Lastwerte für den Zeitraum $t = 1, \dots, T_1$ bilden die ersten $T_1$ Komponenten aller Szenarien. Sofern keine Prognose vorliegt, weisen wir ihnen die Mittelwerte der Simulationsszenarien für die Zeitintervalle $t = 1, \dots, T_1$ zu.
$T_1$ ist erster Verzweigungspunkt des Szenariobaumes. Für den Zeitraum $t = T_1+1, \dots, T_2$ können wir im Szenariobaum zwei Knotenfolgen unterscheiden, die den Ereignissen "niedriger" und "hoher" Lastgang in diesem Zeitraum entsprechen. Zur Unterscheidung der beiden Knotenfolgen benutzen wir die Größen $\omega_2^s$: $\omega_2^s = -1$ ("niedriger Lastgang im Zeitraum $t = T_1+1, \dots, T_2$") bzw. $\omega_2^s = 1$ ("hoher" Lastgang). Die Werte von Szenario $s$ im Zeitraum $t = T_1+1, \dots, T_2$ werden in Abhängigkeit von $\bar{d}^t$, $\bar{\sigma}^{T_2}$ und $\omega_2^s$ bestimmt und zur besseren Unterscheidung mit $\boldsymbol{d}_2^{s,t}$ bezeichnet:

$$\boldsymbol{d}_2^{s,t} = \bar{d}^t + \omega_2^s \frac{\bar{\sigma}^{T_2}}{2^{K/2}} L_2^t = \begin{cases} \bar{d}^t + \dfrac{\bar{\sigma}^{T_2}}{2^{K/2}} L_2^t, & \text{falls } \omega_2^s = 1 \\ \bar{d}^t - \dfrac{\bar{\sigma}^{T_2}}{2^{K/2}} L_2^t, & \text{falls } \omega_2^s = -1 \end{cases}$$

wobei $L_2^t = \dfrac{t - T_1}{T_2 - T_1}$. Zwischen den beiden Verzweigungspunkten wird der Lastgang linear approximiert, um die Berechnung der Standardabweichung für $t = T_1+1, \dots, T_2-1$ zu vermeiden.
Zwischen den Verzweigungspunkten $T_{k-1}$ und $T_k$ ($k = 2, \dots, K+1$), d.h. für $t = T_{k-1}+1, \dots, T_k$, können wir im Szenariobaum $2^{k-1}$ Knotenfolgen unterscheiden. Die dem Szenario $s$ zugehörige Knotenfolge für $t = T_{k-1}+1, \dots, T_k$ wird durch die Werte $\omega_2^s, \dots, \omega_k^s$ eindeutig bestimmt,

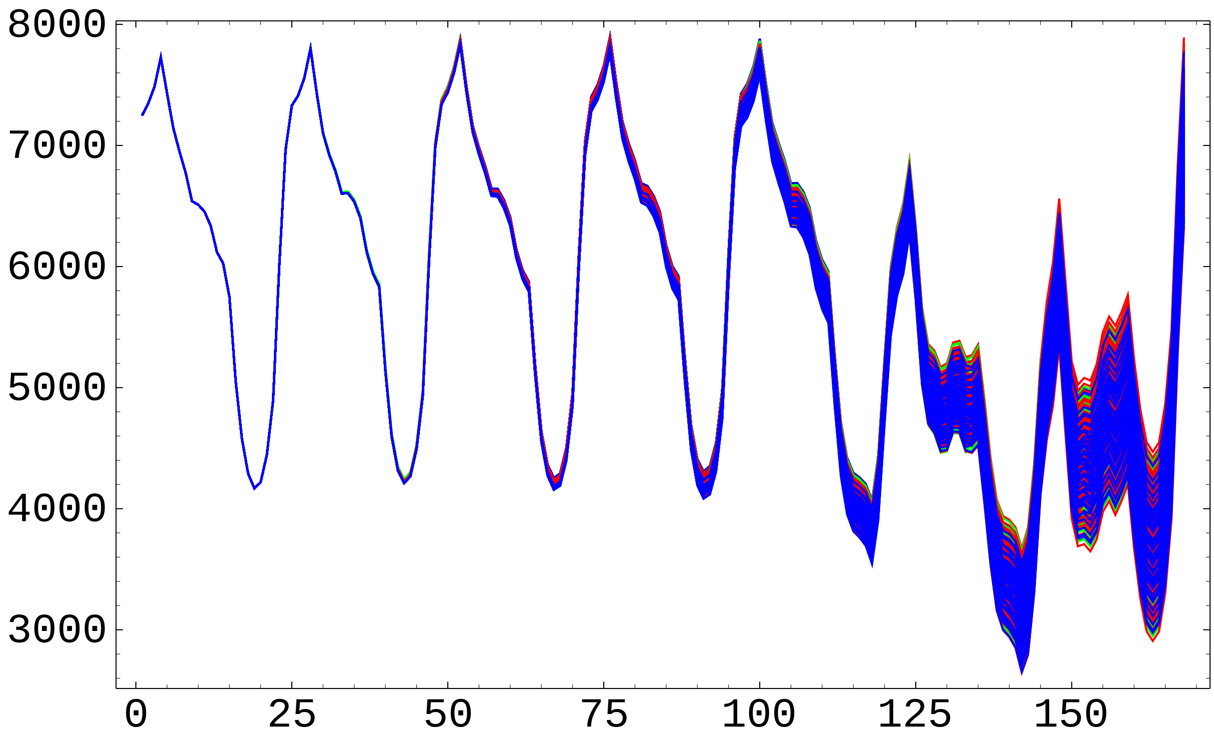



Abbildung 1: Last-Szenariobaum mit 4096 Szenarien für einen Zeitraum von einer Woche

wobei $\omega_m^s = -1$ bzw. $\omega_m^s = 1$ für $m = 2, \ldots, k$ den Ereignissen "niedriger" bzw. "hoher Lastgang im Zeitraum $t = T_{m-1}+1, \ldots, T_m$" zugeordnet sind. Die Werte $\boldsymbol{d}_k^{s,t}$ von Szenario $s$ für $t = T_{k-1}+1, \ldots, T_k$, $k = 2, \ldots, K+1$ werden dann nach folgender Vorschrift berechnet:

$$\boldsymbol{d}_k^{s,t} \quad = \quad \bar{d}^t + \sum_{i=2}^{k-1} \omega_i^s \, \frac{\bar{\sigma}^{T_i}}{2^{(K+2-i)/2}} + \omega_k^s \, \frac{\bar{\sigma}^{T_k}}{2^{(K+2-k)/2}} L_k^t, \tag{3.1}$$

wobei $L_k^t = \dfrac{t - T_{k-1}}{T_k - T_{k-1}}$. Szenario $s$ wird die Wahrscheinlichkeit $\pi^s = \dfrac{1}{2^K}$ zugewiesen. Alternative Zuweisungen der Szenariowahrscheinlichkeiten sind mit Hilfe der Verteilung der Simulationsszenarien möglich. Abbildung 1 stellt einen Last-Szenariobaum mit $2^{12} = 4096$ Szenarien für einen Zeitraum von einer Woche bei stündlicher Diskretisierung ($T = 168$) dar. Die Verzweigungspunkte sind durch $T_k = 12 + 12k$, $k = 1, \ldots, 12$ bestimmt. Die Konstruktionsvorschrift für Szenariobäume besitzt folgende Eigenschaften (vgl. [18]): Für jedes $t$ stimmt der Erwartungswert der Szenarien des Baumes mit dem der Simulationsszenarien überein. Abweichend zum Vorgehen in [16] gehen in die Berechnungsvorschrift (3.1) nicht die Werte der Simulationsszenarien ein, sondern nur deren Erwartungswerte und Standardabweichungen. In jedem Verzweigungspunkt erhöht sich die Anzahl unterscheidbarer Szenarien (und damit die Variablität der Szenariowerte) um den Faktor 2. Die zunehmende Ungewißheit über die Last mit wachsendem $t$ spiegelt sich zudem im monotonen Wachstum der Varianzen der Szenarien in den Verzweigungspunkten wider (vgl. [18]).

Die Anzahl $S = 2^K$ konstruierter Szenarien im Last-Szenariobaum ist noch zu groß für eine numerische Lösung des Problems der optimalen Einsatzplanung bei ungewisser Last. Daher dünnen wir die Last-Szenariobäume von $S$ auf $N$ Szenarien mit folgender **Reduktionsstrategie** aus:

1. Initialisierung: $S' := S$
   Bestimme die Euklidischen Abstände $c$ der Szenarien $s_1, s_2 \in \{1, \ldots, S'\}$:

$$c(\boldsymbol{d}^{s_1}, \boldsymbol{d}^{s_2}) := \sqrt{\sum_{t=1}^{T} \left(\boldsymbol{d}^{s_1,t} - \boldsymbol{d}^{s_2,t}\right)^2} = \sqrt{\sum_{k=2}^{K} \sum_{t=T_{k-1}+1}^{T_k} \left(\boldsymbol{d}_k^{s_1,t} - \boldsymbol{d}_k^{s_2,t}\right)^2}$$

2. Auswahl eines zu streichenden Szenarios: Entferne Szenario $d^{s^*}$, $s^* \in \{1, \ldots, S'\}$, aus dem Szenariobaum, für das

$$\pi_{s^*} \min_{s \neq s^*} c(d^s, d^{s^*}) = \min_{m=1,\ldots,S'} \pi_m \min_{s \neq m} c(d^s, d^m)$$

3. Aufdatieren der Szenario-Wahrscheinlichkeiten: Setze $S' := S' - 1$ und

$$\pi_s := \begin{cases} \pi_{\overline{s}} + \pi_{s^*}, & \text{falls } s = \overline{s} \text{ der Index ist, für den } c(d^{\overline{s}}, d^{s^*}) = \min\limits_{s \neq s^*} c(d^s, d^{s^*}) \\ \pi_s, & \text{falls } s \neq \overline{s} \end{cases}$$

4. Abbruchtest: Wenn $(S' > N)$ dann gehe zu 2., ansonsten STOP.

Abbildung 2 zeigt den optimalen Einsatzplan der Erzeugereinheiten des VEAG-Systems ($T = 168$, $I = 25$, $J = 7$) mit stochastischer Last. Die Szenarienanzahl des Last-Szenariobaumes wurde von 4096 auf 16 Szenarien reduziert und die Resultate wurden mit dem Optimierungsverfahren aus Abschnitt 2 bei Verwendung der stochastischen Lagrange Heuristik erhalten.

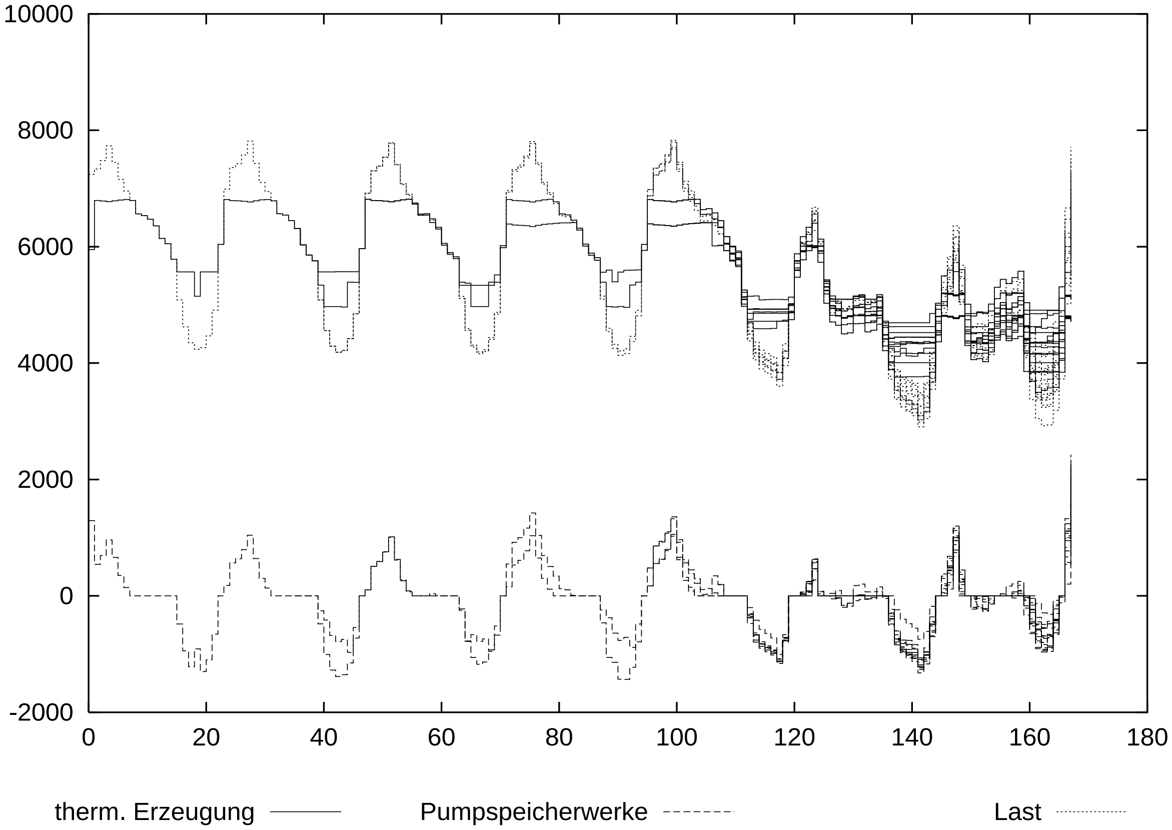



Abbildung 2: Optimaler wöchentlicher Einsatzplan bei ungewisser Last

# Literatur


[1] Bacaud, L.; Lemaréchal, C.; Renaud, A.; Sagastizábal, C.: Disaggregated bundle methods in stochastic optimal power management. *Computational Optimization and Applications* (eingereicht).

[2] Brockwell, P.J.; Davis, R.A.: Introduction to Time Series and Forecasting, Springer, New York, 1996.

[3] Carøe, C.C.; Schultz, R.: Dual decomposition in stochastic integer programming. *Operations Research Letters* 24 (1999), 37–45.

[4] Carpentier, P.; Cohen, G.; Culioli, J.-C.; Renaud, A.: Stochastic optimization of unit commitment: a new decomposition framework. *IEEE Transactions on Power Systems* 11 (1996), 1067–1073.

[5] Dentcheva, D.; Römisch, W.: Optimal power generation under uncertainty via stochastic programming. *Stochastic Programming Methods and Technical Applications* (K. Marti and P. Kall Eds.), Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems Vol. 458, Springer, Berlin 1998, 22–56.

[6] Dupačová, J.; Consigli, G.; Wallace, S.W.: Scenarios for multistage stochastic programs. *Annals of Operations Research* (eingereicht).

[7] Feltenmark, S.; Kiwiel, K.C.: Dual applications of proximal bundle methods, including Lagrangian relaxation of nonconvex problems. *SIAM Journal on Optimization* (erscheint).

[8] Gollmer, R.; Möller, A.; Römisch, W.; Schultz, R.; Schwarzbach, G.; Thomas, J.: Optimale Blockauswahl bei der Kraftwerkseinsatzplanung der VEAG. *Optimierung in der Energieversorgung II*, VDI-Berichte 1352, 1997, 71–85.

[9] Kiwiel, K.C.: Proximity control in bundle methods for convex nondifferentiable minimization. *Mathematical Programming* 46 (1990), 105–122.

[10] Kiwiel, K.C.: User's Guide for NOA 2.0/3.0: A Fortran Package for Convex Nondifferentiable Optimization. Polish Academy of Science, System Research Institute, Warsaw, 1993/1994.

[11] Nowak, M.P.: A fast descent method for the hydro storage subproblem in power generation. Working Paper, WP-96-109, IIASA, Laxenburg, 1996.

[12] Nowak, M.P.: Stochastic Lagrangian Relaxation Applied to Power Scheduling of a Hydro-Thermal System Under Uncertainty. Dissertation (in Vorbereitung), Humboldt-Universität Berlin, Institut für Mathematik, 1999.

[13] Nowak, M.P.; Römisch, W.: Stochastic Lagrangian relaxation applied to power scheduling in a hydro-thermal system under uncertainty. Preprint Nr. 98-36, Schwerpunktprogramm "Echtzeit-Optimierung großer Systeme" der Deutschen Forschungsgemeinschaft, 1998 und *Annals of Operations Research* (eingereicht).

[14] Sheble, G.B.; Fahd, G.N.: Unit commitment literature synopsis. *IEEE Transactions on Power Systems 9* (1994), 128–135.

[15] Takriti, S.; Birge, J.R.; Long, E.: A stochastic model for the unit commitment problem. *IEEE Transactions on Power Systems* 11 (1996), 1497–1508.

[16] Takriti, S.; Krasenbrink, B.; Wu, L.S.-Y.: Incorporating fuel constraints and electricity spot prices into the stochastic unit commitment problem. IBM Research Report RC 21066, Yorktown Heights, New York 1997 und *Operations Research* (erscheint).

[17] Time Series Pack: Reference and Users Guide, Wolfram Research 1995.

[18] Wegner, I.: Erzeugung von Szenariobäumen für die Kraftwerks-Einsatzoptimierung. Diplomarbeit, Humboldt-Universität Berlin, Institut für Mathematik, 1999.