1. Aufgabenblatt zum Stochastik–Praktikum

Generierung von Pseudozufallszahlen und Monte Carlo Methoden

Aufgabe 1 (Monte Carlo–Näherung des Kreiszahl)

Es soll die folgende Methode einer Monte Carlo–Näherung für die Zahl π implementiert werden: Man erzeugt n auf dem Intervall $[-1, 1]^2$ im $\mathbb{R}^2$ uniform–verteilte Pseudo-Zufallszahlen und bestimme den Anteil derjenigen, die innerhalb des Einheitskreises liegen.

a) Überlegen Sie sich eine Formel zur näherungsweisen Berechnung von π mit der Monte Carlo Methode und berechnen Sie damit π approximativ für $n = 10^k$, $k = 1, \ldots, 6$.

b) Veranschaulichen Sie die Methode grafisch. Zeichnen Sie hierfür einen Plot von $[-1, 1]^2$ mit Einheitskreis, in dem die Punkte innerhalb und außerhalb des Einheitskreises in unterschiedlichen Farben dargestellt sind. Benutzen sie die Funktion text um die Anzahl der jeweiligen Punkte in den Plot einzutragen.

c) Schreiben Sie das Ganze als eine Funktion in der Anzahl der Monte Carlo Iterationen und plotten Sie die relativen Fehler von b) gegen $k = \log_{10} n$.

d) Lösen Sie c) mit Sobol Quasi- statt Pseudo-Zufallszahlen mithilfe des Befehles sobolset und vergleichen Sie die Ergebnisse, präsentiert in einem gemeinsamen Plot.

Aufgabe 2 (Inversionsmethode und Monte Carlo–Bänder)

Es soll mit Hilfe der Inversionsmethode ein Sample von n exponentialverteilten Zufallszahlen mit Parameter $\lambda = 1$ aus uniform auf $[0, 1]$ verteilten Zufallszahlen erzeugt werden. Anschließend werden N Monte Carlo Iterationen zur Konstruktion von Monte Carlo–Bändern der zugehörigen Verteilungsfunktion durchgeführt.

a) Erzeugen Sie $n = 100$ auf $[0, 1]$ uniform verteilte Pseudozufallszahlen und generieren durch die Inversionsmethode hieraus ein Sample von $Exp(1)$–verteilten Zufallszahlen.

b) Berechnen Sie die empirische Verteilungsfunktion des Samples mit Hilfe der Ordnungsstatistik und stellen Sie sie in einem Plot dar.

c) Plotten Sie als Kurve die theoretische Verteilungsfunktion ein.

d) Führen Sie $N = 100$ Monte Carlo Iterationen der Methode durch und zeichnen Sie die zugehörigen Monte Carlo–Bänder in einer anderen Farbe in den Graphen mit ein.

Aufgabe 3 (Monte Carlo Integration)

a) Berechnen sie das Integral

$$\int_0^\infty x^2 \exp(-x) dx$$

Berechnen Sie zuerst symbolisch (statt numerisch) das Integral mit der int–Funktion und berechnen sie dann den Wert. Stellen sie den Integranden auf dem Intervall $[0, 10]$ grafisch dar.

b) Berechnen Sie das Integral näherungsweise mit der Monte Carlo Integration als empirisches zweites Moment für $n = 1000, 10000, 100000$ generierte Zufallszahlen.

c) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^\infty x^2 \exp(-x) dx = 2 \cdot \int_0^\infty x \exp(-x) dx$$

gilt und nutzen Sie dies, um das Integral alternativ durch $2n^{-1} \sum x_i$ näherungsweise zu berechnen. Vergleichen Sie beide Ergebnisse.

d) Schreiben Sie eine Funktion, die in $N = 50$ Iterationen die beiden Methoden aus b) und c) für ein Sample vom Umfang $n = 10000$ durchführt und als Rückgabe die empirische Standardabweichung für beide Methoden ausgibt. Können Sie die (theoretische) Standardabweichung der Methoden hier auch symbolisch exakt berechen?