3. Aufgabenblatt zum Stochastik–Praktikum

Simulation stochastischer Prozesse

Aufgabe 1 (Geometrische Brownsche Bewegung)

Sei (B_t) eine Brownsche Bewegung auf $t \in [0,1]$ mit Startwert $B_0 = 0$ und sei $\sigma > 0$. Dann heißt

$$S_t := \exp(\sigma B_t - \sigma^2 t/2)$$

geometrische Brownsche Bewegung auf $t \in [0,1]$. Man kann zeigen, dass (S_t) eine sogenannte stochastische Differentialgleichung der Form $dS_t = S_t \sigma dB_t$ mit Startwert $S_0 = 1$ löst.

a) Simulieren Sie in einem gemeinsamen Plot 10 Pfade der geometrischen Brownschen Bewegung (S_t) auf $t \in [0,1]$ indem Sie $n = 1000$ unabhängige normalverteilte (Pseudo)–Zufallszahlen kumulativ aufsummieren, um die Werte von (B_t) entlang eines äquidistanten Zeitgitters $t_k = k/n$, $k = 0, \ldots n$, zu erzeugen, und daraus diejenigen von S_t entsprechend der Definition zu berechen. Alternativ können Sie auch direkt (S_t) entlang des Zeitgitters durch kumulative Produktbildung simulieren. Was ist numerisch günstiger?

b) Simulieren Sie nun, ohne sie zu plotten, 10000 solche Pfade und plotten Sie zu jedem Zeitpunkt t das Mittel der Werte jener Pfade zur Zeit t. Versuchen Sie, Ihre Beobachtung kurz zu interpretieren.

c) Erzeugen Sie nun *einmal eine* Stichprobe $Z_1, \ldots Z_n$ von n unabhängigen standardnormalverteilten (Pseudo)–Zufallszahlen, mit denen Sie nun auf zwei Arten einen Pfad der geometrischen Brownschen Bewegung erzeugen und einen gemeinsamen Plot von beiden Pfaden generieren. Den einen Pfad generieren Sie wie in a) mit Hilfe von kumulativer Summen- bzw Produktbildung unter Nutzung von $B_{t_k} - B_{t_{k-1}} = \sqrt{1/n} Z_k$. Den anderen Pfad (in einer anderen Farbe) generien Sie rekursiv entsprechend eines Euler-Schemas zur zeitdiskreten Approximation der stochastischen Differentialgleichung wie folgt:

   Setzte $\widetilde{S}_0 = 1$ und

   $$\widetilde{S}_{t_k} := \widetilde{S}_{t_{k-1}} + \widetilde{S}_{t_{k-1}} \sigma \sqrt{1/n} Z_k$$

   für $k = 1, \ldots n$.

d) Wiederholen Sie das Experiment von c) auf einem gröberen Zeitgitter mit $n = 30$ und interpretieren Sie Ihre Resultate.

Aufgabe 2 (Maximum der Brownschen Bewegung)

a) Simulieren Sie den Pfad einer Brownschen Bewegung (B_t) auf $t \in [0,1]$ mit Startwert $B_0 = 0$, indem Sie $n = 1000$ unabhängige normalverteilte (Pseudo)–Zufallszahlen entsprechend aufsummieren.
Erstellen sie einen Plot des simulierten Pfades.
Wiederholen sie diese Simulation, bis sie einen Pfad erhalten, für den $\max_{0 \le s \le 1} B_s \ge 1$ gilt.

b) Zeichnen Sie in ihren Plot den Verlauf des Maximums $M_t = \max_{0 \le s \le t} B_s$ für $t \in [0,1]$ mit ein.

c) Zeichnen Sie eine Gerade bei $y = 1$ in den Plot ein.
Erzeugen Sie nun den Pfad einer Brownschen Bewegung W_t, $t \in [0,1]$, welcher bis zum Zeitpunkt

$$\tau_1 := \min\{s \in [0,1]\,,\, B_s \ge 1\}$$

dem Pfad von B_t entspricht und für $t \in (\tau_1, 1]$ die Brownsche Bewegung B_t an der von ihnen eingezeichneten Geraden durch 1 spiegelt.

d) Simulieren Sie in 10000 Monte Carlo–Iterationen jeweils einen Pfad der Brownschen Bewegung B_t, $t \in [0,1]$, wie zuvor, und bestimmen sie den relative Anteil derjenigen Pfadsimulationen, für welche

$$\max_{0 \le s \le 1} B_s \ge 1$$

eingetreten ist.
Führen Sie erneut 10000 Monte Carlo–Iterationen einer Simulation von Pfaden (B_t) der Brownschen Bewegung durch und bestimmen Sie hiermit den relativen Anteil derjenigen Iterationen, für welche $B_1 \ge 1$ eingetreten ist.

Vergleichen Sie die Anteile aus c) und d). Begründen Sie auch mit Hilfe ihres Plots aus a)-c), dass die folgende Gleichheit gilt:

$$\mathbb{P}(M_1 \ge 1) = \mathbb{P}(\tau_1 \le 1) = \mathbb{P}(|B_1| \ge 1) = 2\mathbb{P}(B_1 \ge 1) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_1^\infty e^{-x^2/2} dx\ .$$

Berechnen sie das Integral in Matlab (mit Hilfe der Funktionen erf oder normcdf) und vergleichen Sie dies mit ihren Werten aus der Monte Carlo–Simulation.