4. Aufgabenblatt zum Stochastik–Praktikum

Copulas und die Modellierung von Portfoliokreditrisiken

Gängige Modelle für Portfoliokreditrisiken basierten auf latenten Variablen und Copulas, wobei of die Gauß-Copula verwendet wurde. Für die Aufgaben untersuchen wir im folgenden vereinfachten Rahmen ein Model mit einer Periode und Zeithoriont $T = 1$.

Seien $X_1, \dots, X_m$ identisch und standardnormalverteilte univariate Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, deren gemeinsame Verteilung erst in den jeweiligen Aufgaben spezifiziert wird. Sei $D = (d_1, \dots, d_m)$ ein deterministischer Vektor in $\mathbb{R}^m$. Sei $Y_i := I_{\{X_i \le d_i\}}$ und $\{Y_i = 1\}$ modelliere das Ereignis, dass Firma i bis zur Zeit T ihren Zahlungsverpflichtungen nicht nachkommt. Die Wahrscheinlichkeit des jeweiligen Zahlungsausfalles ist $pd_i := P(Y_i = 1)$.

Der Kredit für Firma i habe *Notional* N_i und im Falle eines Zahlungsausfalles (*Default*) sei R_i der Anteil der Kreditsumme, den der Kreditgeber noch zurückerhält (*Recovery Value*). Für das Kreditportfolio ist bei einem Gesamtnotional $N = \sum_i N_i$ der Gesamtverlust bis T also

$$L := \sum_{i=1}^{m} N_i(1 - R_i)Y_i = \sum_{i=1}^{m} N_i(1 - R_i) I_{\{X_i \le d_i\}}\,.$$

Um diesen auf (z.B.) vier Tranchen aufzuteilen, trennt man diese durch Level (*detachment points*) $0\% = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 = 100\% = 1$. Der Verlust von Tranche k ist

$$L_k := \min((L - \lambda_{k-1}N)^+, (\lambda_k - \lambda_{k-1})N)\,,$$

und $L = \sum_1^4 L_k$. Die normalisierten Verluste sind $\tilde{L} = L/N$ bzw. $\tilde{L}_k = L_k/((\lambda_k - \lambda_{k-1})N)$.

Wir nehmen im Weiteren an, dass das Portfolio homogen ist, d.h. $d_i = d_1$, $N_i = N_1$ und $R_i = R_1$ (in Verteilung, falls stochastisch). Tranchenlevel seien $\lambda_1 = 5\%$, $\lambda_2 = 20\%$, $\lambda_3 = 50\%$. Weiter sei $m = 1000$ und $N_1 = 100000$ und d_i derart, dass $pd_i = 2\%$ gilt.

Bezeichne C_ρ mit $\rho \in [0, 1]$ die Gauß-Copula der Verteilung einer m-dimensionalen Zufallsvariablen Z, welche multivariat normalverteilt ist mit standardnormalverteilten Randverteilungen der Z_i und Korellationen $\rho = \mathrm{Cor}(Z_i, Z_j)$ zwischen allen verschiedenen Koordinaten $i \neq j$.

Aufgabe 1 (mit Standard Gauß-Copula)

Sei die gemeinsame Verteilung der latenten Variablen X_i durch die Gauß-Copula C_ρ gegeben. Sei zunächst $R_i = 40\%$.

a) Berechnen Sie approximativ jeweils durch 100000 Monte Carlo Iterationen die Erwartungswerte $E[L_k]$ der Verluste aller Tranchen sowie denjenigen des Gesamtverlustes $E[L]$ und die jeweiligen Anteile am erwarteten Verlust $E[L_k]/E[L]$ als Funktionen von $0 \leq \rho \leq 1$. Erzeugen Sie dazu jeweils einen Plot der Graphen mit enstprechenden Bezeichnungen.

b) Interpretieren Sie Ihre Beobachtungen.

Aufgabe 2 (mit stochastischer Recovery)

Sei wieder die gemeinsame Verteilung der latenten Variablen X_i bestimmt durch ihre Randverteilungen und die Gauß-Copula C_ρ. Anstatt $R_i = 40\%$ deterministisch anzunehmen, modellieren wir R_i stochastisch mit Erwartungswert $E[R_i|X_i \leq d_i] = 40\%$. Dabei soll $R_i = f_i(X_i)$ jeweils (auf $\{X_i \leq d_i\}$) durch eine **wachsende** Funktion $f : (-\infty, d_i] \to [0, 1]$ beschrieben sein, derart dass R_i die folgende (auf Default bedingte) Verteilung hat

$$P[R_i = r_j \,|\, X_i \leq d_i] = p_j \quad \text{für alle } j = 1, \ldots, 4$$

mit $r_1 = 0\%$, $r_2 = 20\%$, $r_3 = 40\%$, $r_4 = 60\%$ und $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.2$, $p_3 = 0.3$, $p_4 = 0.4$.

a) Konstruieren Sie f und illustrieren Sie Ihre Konstruktion, gern mit einer Skizze, unter Verwendung der Quantile $q(\alpha)$ der Standardnormalverteilung ($P[X_1 \leq q(\alpha)] = \alpha$ für $\alpha \in (0, 1)$).

b) Berechnen Sie wieder approximativ jeweils durch 100000 Monte Carlo Iterationen die Erwartungswerte $E[L_k]$ der Verluste aller Tranchen sowie denjenigen des Gesamtverlustes $E[L]$ und die jeweiligen Anteile am erwarteten Verlust $E[L_k]/E[L]$ als Funktionen von $0 \leq \rho \leq 1$. Erzeugen Sie dazu jeweils einen Plot der Graphen mit entsprechenden Bezeichnungen.

c) Interpretieren Sie Ihre Beobachtungen und diskutieren Sie die Resultate im Vergleich zu denjenigen von Aufgabe 1. Geben Sie hierzu die Resultate numerisch für ausgesuchte Werte von ρ in Tabellenform an.