

## 6. (individuelles) Aufgabenblatt zum Stochastik–Praktikum - Varianzreduktion bei Monte Carlo -

### Aufgabe 1

Sei  $Z = (Z^1, \dots, Z^d)^{\text{tr}}$  eine  $d$ -dimensionale standardnormalverteilte Zufallsgröße  $Z \sim \mathcal{N}(0, I_d)$ . Sei  $\rho \in [0, 1]$  und  $Y = (Y^1, \dots, Y^d)^{\text{tr}} = BZ$  für eine  $d \times d$ -matrix  $B$ , so dass  $Y \sim \mathcal{N}(0, Q)$  gilt für eine Korrelationsmatrix  $Q = BB^{\text{tr}}$  mit Einträgen  $Q^{i,j} = 1$  für  $i = j$  und  $Q^{i,j} = \rho$  für  $i \neq j$ .

Ziel ist die Berechnung von (approx.)  $1 - \alpha$ -Konfidenzintervallen für die Wahrscheinlichkeit

$$p := P(Y \in \times_{i=1}^d (-\infty, c]) = P\left(\max_{1 \leq j \leq d} Y^j \leq c\right) = E[1_{\{\max_j Y^j \leq c\}}] =: E[X]$$

mit  $c \leq 0$  mittels Monte Carlo Simulationen. Wir wenden hierzu gewöhnliche Monte Carlo Simulation sowie verschiedenen Methoden zur Varianzreduktion an, basierend jeweils auf  $n$  i.i.d. Ziehungen  $Y_1, \dots, Y_n$ .

Schreiben Sie ein Matlab Programm, welches für beliebige Wahl der Parameter die entsprechenden Berechnungen für gewöhnliches Monte Carlo sowie *zudem* für mindestens drei der im Folgenden genannten Methoden zur Varianzreduktion durchführt. Erklären Sie in Ihrer Dokumentation, wie genau Sie die Methoden zur Varianzreduktion umgesetzt haben. Diskutieren Sie Ihre Resultate für die Parameter  $n = 10^6$ ,  $\rho = 0.1$ ,  $c = -1$  und Konfidenzniveau  $1 - \alpha = 95\%$  für Dimensionen  $d = 2$  und  $d = 10$ , und erklären Sie dabei insbesondere die unterschiedlichen Resultate der Verfahren und den Einfluß der Dimension.

1. Monte Carlo mit antithetische Variablen,
2. Monte Carlo mit Kontrollvariablen: Konstruieren Sie hierzu eine möglichst gut mit  $Y$  korrelierte Kontrollvariable  $Y^{\text{cv}}$ .
3. Importance Sampling: Simulieren Sie hierzu  $Y_1, \dots, Y_n$  für das Importance Sampling unter einer Normalverteilung mit gleicher Kovarianzmatrix  $Q$  aber einem anderen Erwartungswert  $m \in \mathbb{R}^d$ , den Sie geeignet wählen.
4. Conditional Monte Carlo oder Monte Carlo mit Stratified Sampling.

[Zur Beachtung: Diese Aufgabe ist zu lösen, *ohne* dabei numerische Funktionen zur Auswertung der gemeinsamen Verteilungsfunktion von multivariat normalverteilten Zufallsvariablen zu nutzen, welche nicht unabhängig sind.]

**Zusatzfrage:** Welche Ihrer Varianzreduktionsverfahren lassen sich (wie?) verallgemeinern auf den Fall, wo  $Y$  zentriert normalverteilt ist mit einer allgemeinen Form der Kovarianzmatrix  $Q$  ?

**Einzelabgabe** von Bericht und Programm in der sonst üblichen Form bis 9.Feb.

Einzelprüfungen mit Präsentation von etwa 10min nach Abgabe aber vor dem 24.2.12 zum erfolgreichen Modulabschluss. Terminvereinbarung hierzu bei Prof.D.Becherer über Sekretariat Frau S. Bergmann, Raum 1.216, bergmann@math.hu-berlin.de bis zum 12.2..

[Übungsblattversion von 21. Januar 2015]