Stochastik–Praktikum
Copulas

Dirk Becherer

Humboldt-Universität zu Berlin

5. November 2014

Übersicht

Übersicht

Copula Motivation

Eine multivariate Verteilung in $\mathbb{R}^d$ ist beschrieben durch die gemeinsame Verteilungsfunktion, durch die gemeinsame charakteristische Funktion,

oder durch ihre

Randverteilungen und Copula

Copula Motivation

Nutzen von Copulas

- Modellierung,
- Visualisierung
- und Simulation

von Abhängigkeiten zwischen Zufallsvariablen

Copula Definition

Definition

Eine Copula ist eine multivariate Verteilungsfunktion $C : [0,1]^d \to [0,1]$, deren Randverteilungen alle gleichverteilt auf $[0,1]$ sind.

Theorem

(Satz von Sklar) Ist $X = (X_1, \dots, X_d)$ multivariat verteilt mit gemeinsamer Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ und Randverteilungen F_i. Dann existiert eine Copula C, so dass

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1)), \dots, F_d(X_d)) \quad auf \quad \mathbb{R}^d.$$

Dabei ist C eindeutig, falls alle F_i stetig sind.

Copula Beispiele

- unabhängige Koordinaten (Produkt-Copula)

$$C(u_1, \ldots, u_d) = \prod_1^d u_i$$

- Gauß-Copula einer $N(0, Q)$-Verteilung mit gem. Verteilungsfkt. F und Randverteilungen F_i:

$$C(u_1, \ldots, u_d) = F\left(F_1^{-1}(u_1), \ldots, F_d^{-1}(u_d)\right)$$

- Gumbel-Copula, Archimedische Copula, ...

Simulation von einer Copula

Sei $Y = (Y_1, \dots, Y_d)$ mit stetigen Randverteilungen G_i bereits verteilt nach einer Copula C. Seien F_i die angestrebten (1-dim.) Randverteilungsfunktionen.

Dann ist $X = (X_1, \dots, X_d) := \left(F_1^{-1}(G_1(Y_1)), \dots, F_d^{-1}(G_d(Y_d))\right)$ verteilt mit Randverteilungen F_i und gleicher Copula C

Beweis: $U_i := G_i(Y_i) \sim U[0,1] \Rightarrow F_i^{-1}(G_i(Y_i)) \sim F_i$

$$P(X_i \leq x_i, \forall i) = P(Y_i \leq G_i^{-1}(F_i(x_i)), \forall i) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$$

Simulation von einer Gauß-Copula

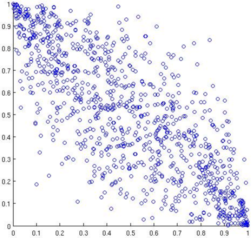
Beispiel: Generiere $Y = (Y_1, Y_2) \sim N(0, Q)$ für $Q = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$.

Dann sind Randverteilungen G_1, G_2 univariat standardnormal, und $U_i := G_i(Y_i)$ $(i = 1, 2)$ sind gleichverteilt auf $[0, 1]$ mit Copula C.

```
n=1000;
  for rho=-0.8:0.4:0.8
    A=cdf('norm',chol([1 rho; rho 1],'lower')*randn(2,n),0,1);
    scatter(A(1,:),A(2,:));
  end
```

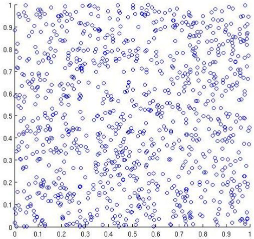
Simulation von einer Gauß-Copula

Scatterplot für 1000er Stichprobe mit $\rho = -0.8$



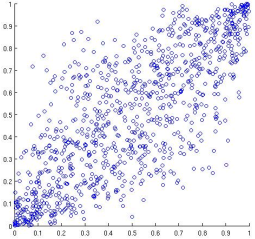
Simulation von einer Gauß-Copula

Scatterplot für 1000er Stichprobe mit $\rho = 0.0$



Simulation von einer Gauß-Copula

Scatterplot für 1000er Stichprobe mit $\rho = +0.8$



gemeinsamer Scatterplot