Stochastik–Praktikum
Simulation stochastischer Prozesse

Dirk Becherer

Humboldt-Universität zu Berlin

4. September 2014

Übersicht

1. Random Walk
2. Brownsche Bewegung
3. Diffusionen und Stochastische DGL

Vorbemerkungen

Ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ ist eine indizierte Kollektion von Zufallsgrößen.

Genauer: $X : \Omega \times \mathcal{T} \to (\mathcal{X}, \mathcal{F})$,
$X(\omega, t) := X_t(\omega)$ messbar $\forall t \in \mathcal{T}$.

Wird $\omega^* \in \Omega$ fixiert, so heißt $X(\omega^*, \cdot)$ ein Pfad des stochastischen Prozesses X.

Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$: Wachsende Familie von Sub-σ-Algebren von $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{X}$

$(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}, \mathbb{P})$ heißt gefilterter Wahrscheinlichkeitsraum.

Übersicht

1. Random Walk
2. Brownsche Bewegung
3. Diffusionen und Stochastische DGL

Random Walk

Definition

Es seien $Z_i, i \in \{1, \dots, n\}$, i. i. d. Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}(Z_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(Z_i = -1) \ .$$

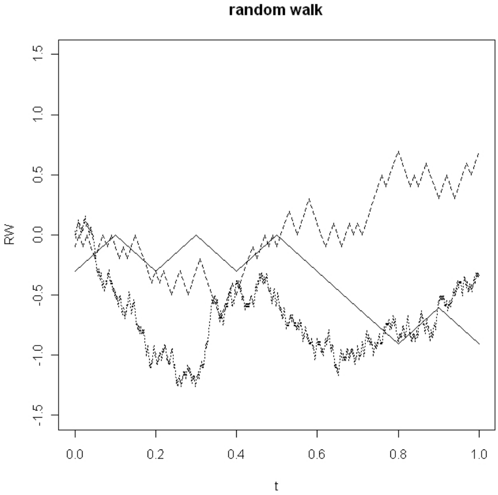
Die Zufallsvariable $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i$ beschreibt eine (eindimensionale) Irrfahrt (random walk) in $\mathbb{Z}$.
Für $p = 1/2$ ist dies die so genannte symmetrische Irrfahrt.

S_n nimmt Werte in $[-n, n]$ an. $\forall n$: $\mathbb{E}[S_n] = 0$ und $\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n) = n$.

Reskaliert konvergiert die Irrfahrt in Verteilung gegen die Brownsche Bewegung (ZGWS bzw Donsker):

$$\frac{S_{[n\,t]}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} B_t \qquad \text{bzw. allgemeiner} \qquad \frac{S_{[n\,\cdot]}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} B_.$$

Reskalierter symmetrischer Random Walk



Matlab: Random Walk

```
> function [t  zt] = SimpleRandomWalk(n, T)
>     % Simple Random Walk
>     % T Zeithorizont, n Anzahl der Zeitpunkte
>     dt = T/n;
>     t = [0:dt:T];
>     z = 1/sqrt(n+1) * (2*( rand(1,n+1)>0.5 )-1);
>     z(1) = 0;
>     zt = cumsum(z);
> end

> [t zt] = SimpleRandomWalk(  10, 1);
> plot(t,zt,'r');
```

Übersicht

1. Random Walk
2. Brownsche Bewegung
3. Diffusionen und Stochastische DGL

Brownsche Bewegung

Definition

Sei $(\mathcal{F}_t)$ eine Filtration. Ein $(\mathcal{F}_t)$–adaptierter stochastischer Prozess $(B_t)_{t\geq 0}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ heißt (Standard) Brownsche Bewegung (oder Wiener–Prozess) bzgl. $(\mathcal{F}_t)$, falls gilt:

(BB1) $B_0 = 0$ $\mathbb{P}$-f. s.,

(BB2) Für alle $t \geq s$ ist $(B_t - B_s)$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$,

(BB3) Zuwächse $(B_t - B_s)$, $0 \leq s \leq t$, sind $\mathbf{N}(0, t-s)$–verteilt,

(BB4) $(B_t)_{t\geq 0}$ hat $\mathbb{P}$–f. s. stetige Pfade.

Oft ist z.B. $\mathcal{F}_t = \sigma(B_u \,:\, u \leq t)$.

Satz

Ist $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung, so auch jeder der folgenden Prozesse:

(i) $B^1 := -B$ (Spiegelungsprinzip)

(ii) Für festes $s \geq 0$: $B^2_t := B_{s+t} - B_s\,, t \geq 0$ (Zeithomogenität)

(iii) Für festes $c > 0$: $B^3_t := c^{-1} B_{c^2 t}\,, t \geq 0$ (Skalierung)

(iv) Für festes $T > 0$: $B^4_t := B_T - B_{T-t}$, $0 \leq t \leq T$ (Zeitinversion)

(v) $B^5_t := \begin{cases} tB_{\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t = 0. \end{cases}$ (Inversion)

Satz

Ist $B = (B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung, so auch jeder der folgenden Prozesse:

(i) $B^1 := -B$ (Spiegelungsprinzip)

(ii) Für festes $s \geq 0$: $B^2_t := B_{s+t} - B_s\,, t \geq 0$ (Zeithomogenität)

(iii) Für festes $c > 0$: $B^3_t := c^{-1} B_{c^2 t}\,, t \geq 0$ (Skalierung)

(iv) Für festes $T > 0$: $B^4_t := B_T - B_{T-t}$, $0 \leq t \leq T$ (Zeitinversion)

(v) $B^5_t := \begin{cases} tB_{\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t = 0. \end{cases}$ (Inversion)

Satz

Ist $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung, so auch jeder der folgenden Prozesse:

(i) $B^1 := -B$ (Spiegelungsprinzip)

(ii) Für festes $s \geq 0$: $B^2_t := B_{s+t} - B_s\,,\, t \geq 0$ (Zeithomogenität)

(iii) Für festes $c > 0$: $B^3_t := c^{-1} B_{c^2 t}\,,\, t \geq 0$ (Skalierung)

(iv) Für festes $T > 0$: $B^4_t := B_T - B_{T-t}$, $0 \leq t \leq T$ (Zeitinversion)

(v) $B^5_t := \begin{cases} tB_{\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t = 0. \end{cases}$ (Inversion)

Satz

Ist $B = (B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung, so auch jeder der folgenden Prozesse:

(i) $B^1 := -B$ (Spiegelungsprinzip)

(ii) Für festes $s \geq 0$: $B^2_t := B_{s+t} - B_s \, , t \geq 0$ (Zeithomogenität)

(iii) Für festes $c > 0$: $B^3_t := c^{-1} B_{c^2 t} \, , t \geq 0$ (Skalierung)

(iv) Für festes $T > 0$: $B^4_t := B_T - B_{T-t}$, $0 \leq t \leq T$ (Zeitinversion)

(v) $B^5_t := \begin{cases} tB_{\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t = 0. \end{cases}$ (Inversion)

Satz

Ist $B = (B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung, so auch jeder der folgenden Prozesse:

(i) $B^1 := -B$ (Spiegelungsprinzip)

(ii) Für festes $s \geq 0$: $B_t^2 := B_{s+t} - B_s \, , t \geq 0$ (Zeithomogenität)

(iii) Für festes $c > 0$: $B_t^3 := c^{-1} B_{c^2 t} \, , t \geq 0$ (Skalierung)

(iv) Für festes $T > 0$: $B_t^4 := B_T - B_{T-t}$, $0 \leq t \leq T$ (Zeitinversion)

(v) $B_t^5 := \begin{cases} tB_{\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t = 0. \end{cases}$ (Inversion)

Markov-Eigenschaft und Simulation

Korollar

Aus den Eigenschaften der Brownschen Bewegung und dem vorangehenden Satz folgt die Markov–Eigenschaft:

$$\tilde{B}_t := B_{t+s} - B_s \,, \quad t \geq 0$$

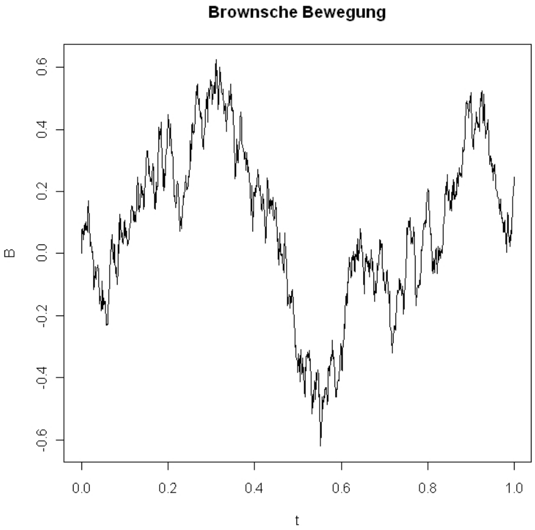
ist eine Brownsche Bewegung und unabhängig von $\mathcal{F}_s$; Die bedingte (reguäre) Verteilung von B_{t+s} ggb. $\mathcal{F}_s$ ist also die Normalverteilung $N(B_s, t)$ und hängt nur von B_s und t ab.

Exakte zeitdiskrete Simulation als Gaußscher Random Walk !

Matlab: Brownsche Bewegung auf Zeitgitter

```
> function [t  zt] = SBM(n, T)
>      % Simuliert den Pfad einer Brownian Motion
>      % T Zeithorizont, n Anzahl der Zeitgitterpunkte
>       dt = T/n;
>       t = [0:dt:T];
>       z = 1/sqrt(n+1)*normrnd(0, 1, 1, n+1);
>       zt = cumsum(z);
> end

> % Standard-Brownsche Bewegung
> [t B] = SBM(1000, 1); plot(t,B)
```


Brownsche Bewegung
B
0.6
0.4
0.2
0.0
-0.2
-0.4
-0.6
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
t

Weitere Eigenschaften der Brownschen Bewegung

Satz

Es sei $B = (B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Dann gilt:

1. Die Pfade von B sind fast sicher nirgends differenzierbar.
2. Die Pfade von B sind auf jedem Intervall fast sicher von unbeschränkter Variation.
3. Das Wachstumsverhalten lässt sich durch das Gesetz vom iterierten Logarithmus beschreiben:

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{B_t(\omega)}{\sqrt{2t \log\log(t)}} = 1 \quad \text{für } \mathbb{P} - \text{fast alle } \omega \in \Omega.$$

4. Eine Brownsche Bewegung ist stetiger zentrierter Gauß–Prozess mit $\mathbb{C}\mathrm{ov}(B_s, B_t) = s \wedge t \; \forall s, t \geq 0$ (g.d.w.).

fast-sichere-Konvergenz: Lévy-Konstruktion der B.B.

Konstruktion mit pfadweise f.s.-Konvergenz (statt Verteilungskonvergenz wie bei Donsker):

Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $D_n = \{k/2^n, k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 2^n\}$ und $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$.

$(Z_t)_{t \in D}$ seien unabh. standardnormalverteilte Zufallsvariablen.

Funktionenfolge $F_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $F_0(t) = tZ_1$ und

$$F_n(t) = \begin{cases} \frac{Z_t}{\sqrt{2^{n+1}}}, & t \in D_n \backslash D_{n-1}, \\ 0, & t \in D_{n-1}, \\ \text{linear interpoliert}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $B_t = f.s.\text{-}\lim_N \sum_0^N F_n(t)$ eine Brownsche Bewegung.

fast-sichere-Konvergenz: Lévy-Konstruktion der B.B.

Dann ist $B_t = f.s.\text{-}\lim_N \sum_0^N F_n(t)$ eine Brownsche Bewegung.

Dabei ist $B_0 = 0$, $B_1 = Z_1$ und $B_t = \frac{B_t^- + B_t^+}{2} + \frac{Z_t}{\sqrt{2^{n+1}}}$, wobei B_t^+ den rechten und B_t^- den linken Nachbarpunkt nach einer Intervallhalbierung bezeichnen.

Konkret gilt z.B. für die ersten Schritte

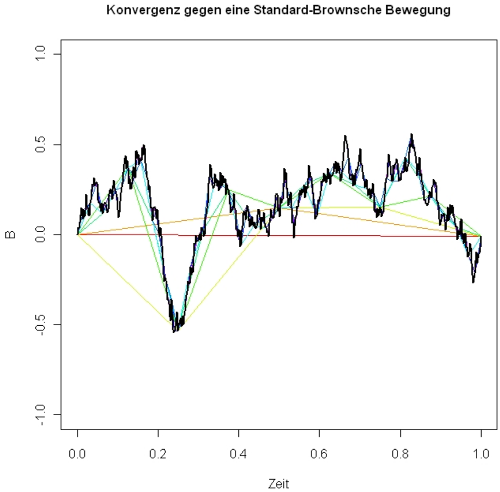
$$B_{1/2} = \frac{B_0 + B_1}{2} + \frac{Z_{1/2}}{2},$$

$$B_{1/4} = \frac{B_0 + B_{1/2}}{2} + \frac{Z_{1/4}}{\sqrt{8}} \quad \text{und} \quad B_{3/4} = \frac{B_{1/2} + B_1}{2} + \frac{Z_{3/4}}{\sqrt{8}}$$

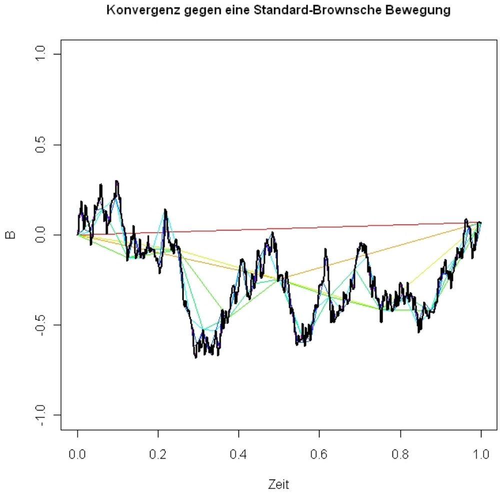
$$\ldots$$

Der entstehende Prozess hat zu jeder Zeit t die Varianz t.

Lévy–Konstruktion Brownscher Bewegung



Lévy–Konstruktion Brownscher Bewegung



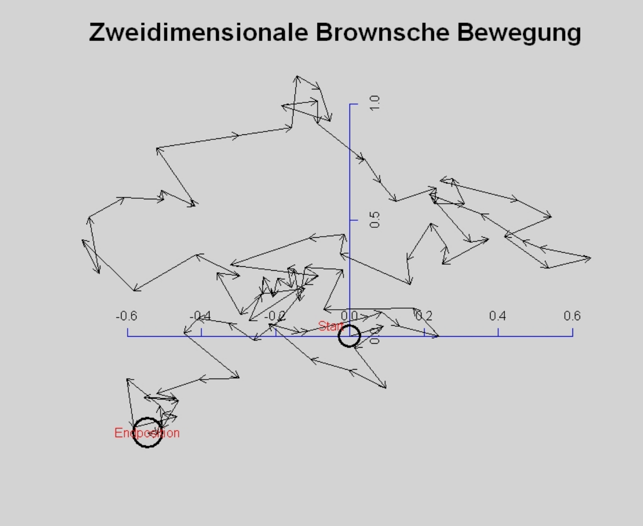
Zweidimensionale Brownschen Bewegung

Definition

Ein stochastischer Prozess $(\mathfrak{B}_t)_{t\geq 0}$ mit Werten im $\mathbb{R}^d$ heißt d-dimensionale Brownsche Bewegung, falls die Koordinaten $(B_i)_t$, $i \in \{1, \ldots, d\}$, stochastisch unabhängige eindimensionale Brownsche Bewegungen sind.

```
> function [Bx By] = SBM2d(n)
>     % 2D Brownsche Bewegung
>     x = normrnd(0,1/sqrt(n), 1, n);
>     y = normrnd(0,1/sqrt(n), 1, n);
>     Bx = zeros(1,n+1);
>     By = zeros(1,n+1);
>     Bx(2:n+1) = cumsum(x);
>     By(2:n+1) = cumsum(y);
> end

> [Bx By] = SBM2d(100);plot(Bx,By,'-bo')
```


Zweidimensionale Brownsche Bewegung
-0.6
-0.4
-0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
1.0
0.5
Start
Endposition

Übersicht

1 Random Walk

2 Brownsche Bewegung

3 Diffusionen und Stochastische DGL

Diffusionen

Unter einem Diffusionsprozess versteht man z.B. einen Prozess der Form

$$X_t = X_0 + \mu t + \sigma B_t \,, \quad t \geq 0,$$

mit einer Brownschen Bewegung B.

Ein X_t wie oben wird teils als “allgemeine Brownsche Bewegung” mit
Drift μ und Volatilität σ bezeichnet.

Allgemeiner erfüllt ein Diffusion eine stochastische DGL

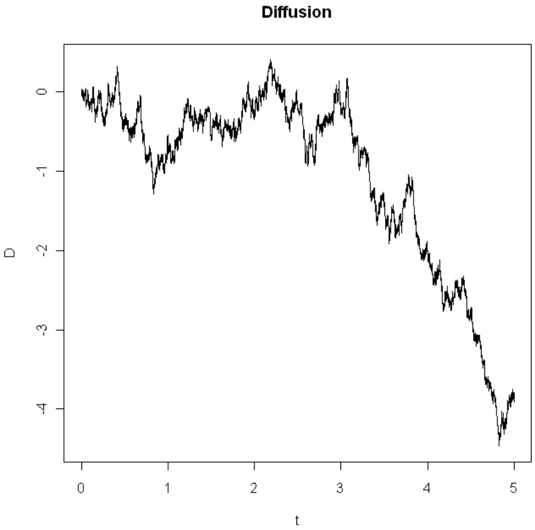
$$dX_t = \mu dt + \sigma dB_t$$

mit Koeffizienten μ, σ, die Funktionen von (t, X_t) sein dürfen. (Oben:Konstanten).

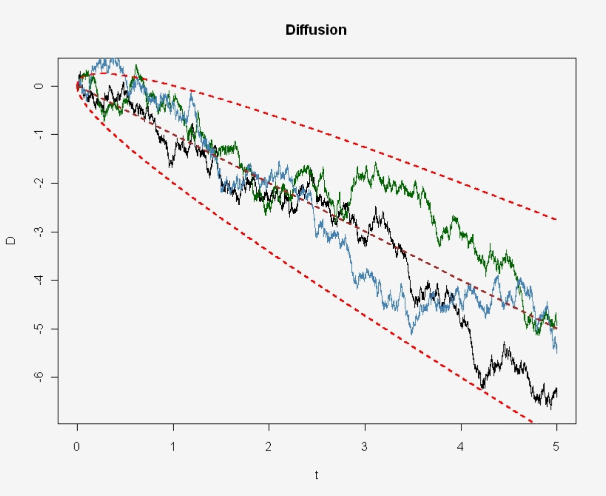
Matlab: Diffusion

```
> function [t  zt] = diffusion( x0, n, T, mu, sigma)
>    % Simuliert den Pfad von einem Diffusionsprozess
>    % mit konstanten Drift- u. Volatilitäts-Koefizienten
>      dt = T/n;
>      t = [0:dt:(n*dt)];
>      z = mu*dt + sigma*sqrt(dt)*normrnd(0, 1, 1, n+1);
>      z(1) = x0;
>      zt = cumsum(z);
> end

>[t  zt]=diffusion(0,1000,1,-1,0.5); plot(t,zt)
```


Diffusion
D
0
-1
-2
-3
-4
t
0
1
2
3
4
5

Diffusion mit Konfidenzbändern bei $\pm 1 STD$



SDGL Approximation: Das Eulerschema

Was eine Lösung (X_t) einer stochastischen DGL der Form

$$X_0 = x_o \,, \quad dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

genau ist, wird erst durch die Stochastische Analysis geklärt !

SDGL Approximation: Das Eulerschema

stochastische DGL

$$X_0 = x_o\,, \quad dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

Das Eulerschema ist intuitiv plausibel als numerische SDGL-Approximation $\widetilde{X}_t$ entlang eines diskreten Zeitgitters $t_k = k/n$ mit $\Delta t := 1/n$ und $\Delta B_{t_k} := B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$:

$$\widetilde{X}_0 := x_o\,, \quad \widetilde{X}_{t_k} = \widetilde{X}_{t_{k-1}} + \mu(t, \widetilde{X}_{t_{k-1}})\,\Delta t + \sigma(t, \widetilde{X}_{t_{k-1}})\,\Delta B_{t_k}\,,$$

wobei die $\Delta B_{t_k} = B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ als i.i.d. $N(0, \Delta t)$-verteilte Zufallsvariablen simuliert werden.

Beispiel zum Eulerschema

Die Stochastische Analysis wird zeigen, dass die SDGL

$$S_0 = 1\,, \quad dS_t = S_t\, a dB_t$$

mit $a \in \mathbb{R}$ als Lösung die geometrische Brownsche Bewegung

$$S_t = exp(aB_t - a^2 t/2)$$

hat, das sogenannte "Stochastische Exponential von aB_t".
Das Eulerschema liefert als zeitdiskrete Approximation hierfür

$$\widetilde{S}_0 = 1\,, \qquad \widetilde{S}_{t_k} := \widetilde{S}_{t_{k-1}} + \widetilde{S}_{t_{k-1}}\, a\, \Delta B_{t_k}$$

Beispiel zum Eulerschema

Die Stochastische Analysis wird zeigen, dass die SDGL

$$S_0 = 1\,, \quad dS_t = S_t\, a dB_t$$

mit $a \in \mathbb{R}$ als Lösung die geometrische Brownsche Bewegung

$$S_t = exp(aB_t - a^2 t/2)$$

hat, das sogenannte "Stochastische Exponential von aB_t".
Das Eulerschema liefert als zeitdiskrete Approximation hierfür

$$\widetilde{S}_0 = 1\,, \qquad \widetilde{S}_{t_k} := \widetilde{S}_{t_{k-1}} + \widetilde{S}_{t_{k-1}}\, a\, \Delta B_{t_k}$$

Frage: Güte der Approximation vgl. mit Fall konstanter Koeff.?