Prof. Dr. Ulrich Horst
Jana Bielagk

WS 2017/18

Lösungen zur Vorlesung

Analysis I*

<u>Serie 1</u>

1) (ad (1)) Beweis durch vollständige Induktion über n.

Induktionsanfang: Die Aussage gilt für $n = 1$, da

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1}{6} 1(1+1)(2+1)$$

Induktionsschritt: Wir setzten voraus, dass die Gleichung (1) für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ gilt (Induktionsvoraussetzung) und wollen zeigen, dass sie dann auch für $n+1$ gilt, d.h. dass gilt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1).$$

Wir berechnen also

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&\underset{\text{Nach IV}}{=} \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\
&= \frac{1}{6}(n+1)\left(n(2n+1) + 6(n+1)\right) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 7n + 6) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1).
\end{aligned}$$

(ad (2)) Beweis durch vollständige Induktion über n.

Induktionsanfang: Die Aussage gilt für $n = 1$, da

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 = \frac{1}{4} 1^2 (1+1)^2$$

Induktionsschritt: Es gelte Gleichung (2) für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ (IV).

Induktionsbehauptung: Dann gilt auch

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2.$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\ &\underset{\text{Nach IV}}{=} \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 + (n+1)^3 \\ &= \frac{1}{4}(n+1)^2 \Big(n^2 + 4(n+1)\Big) \\ &= \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2+4n+4) \\ &= \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2.\end{aligned}$$

2) *Beweis:* mittels vollständiger Induktion über n. Zunächst bemerken wir aber Folgendes:

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt nach den binomischen Formeln

$$0 \le (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Leftrightarrow 2ab \le a^2 + b^2,$$

mit anderen Worten, es gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit gleichem Vorzeichen, dass

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab} \ge 2 \tag{1}$$

Nun zur Induktion: Wir bezeichnen die zu beweisende Aussage mit $A(n)$.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist

$$\left(\sum_{k=1}^{1} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{x_k}\right) = \frac{x_1}{x_1} = 1$$

und andererseits $1^2 = 1$ und die Aussage $A(1)$ somit korrekt.

Induktionsschritt: Wir setzen die Gültigkeit von $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ voraus (IV) und wollen zeigen, dass dann auch $A(n+1)$ gilt (Induktionsbehauptung). Wir berechnen dazu

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{x_k}\right) &= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} + \frac{1}{x_{n+1}}\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) + x_{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) + \frac{1}{x_{n+1}}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + \frac{x_{n+1}}{x_{n+1}} \\
&\overset{(IV)}{\geq} n^2 + x_{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) + \frac{1}{x_{n+1}}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + 1.
\end{aligned}$$

Andererseits wissen wir, dass $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ ist. Um nun die Induktionsbehauptung zu beweisen, genügt es also, zu zeigen, dass

$$x_{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) + \frac{1}{x_{n+1}}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \geq 2n.$$

Dies zeigen wir nun:

$$\begin{aligned}
x_{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) + \frac{1}{x_{n+1}}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_{n+1}}{x_k}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_{n+1}}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k}{x_{n+1}} + \frac{x_{n+1}}{x_k}\right) \\
&\overset{(1)}{\geq} \sum_{k=1}^{n} 2 \\
&= 2n.
\end{aligned}$$

Damit ist die Induktionsbehauptung gezeigt und damit der Beweis vollständig.

3) i) Seien 0 und $0'$ zwei neutrale Elemente der Addition, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$x + 0 = x \quad \text{und} \quad x + 0' = x,$$

also insbesondere

$$0' + 0 = 0' \quad \text{und} \quad 0 + 0' = 0. \tag{2}$$

Mit $(K1)$ und (2) folgt:

$$0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'.$$

Seien 1 und $1'$ zwei neutrale Elemente der Multiplikation.
Einerseits gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, dass $1 \cdot x = x$ ist, also insb. $1 \cdot 1' = 1'$.
Andererseits gilt auch für alle $x \in \mathbb{R}$, dass $1' \cdot x = x$, also insb. $1' \cdot 1 = 1$.
Mit $(K5)$ folgt also $1' = 1 \cdot 1' = 1' \cdot 1 = 1$.

ii) Seien $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $z, z' \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$x \cdot z = 1 = x \cdot z'. \tag{3}$$

Dann gilt

$$z' \overset{(K7)}{=} z' \cdot 1 \overset{(3)}{=} z' \cdot (x \cdot z) \overset{(K6)}{=} (z' \cdot x) \cdot z \overset{(K5)}{=} (x \cdot z') \cdot z \overset{(3)}{=} 1 \cdot z \overset{(K7)}{=} z.$$

Seien $x \in \mathbb{R}$ und $y, y \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$x + y = 0 = x + y'. \tag{4}$$

Dann gilt

$$y' \overset{(K3)}{=} 0 + y' \overset{(4)}{=} (x + y) + y' \overset{(K1)}{=} (y + x) + y' \overset{(K2)}{=} y + (x + y') \overset{(4)}{=} y + 0 \overset{(K1)}{=} 0 + y \overset{(K3)}{=} y.$$

iii) Für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{(K4)}{=} (0 \cdot x) + (-(0 \cdot x)) \overset{(K3)}{=} ((0 + 0) \cdot x) + (-(0 \cdot x)) \\ &\overset{(K9)}{=} (0 \cdot x + 0 \cdot x) + (-(0 \cdot x)) \overset{(K2)}{=} 0 \cdot x + (0 \cdot x + (-(0 \cdot x))) \\ &\overset{(K4)}{=} 0 \cdot x + 0 \overset{(K3)}{=} 0 \cdot x. \end{aligned}$$

iv) Existenz: In der Tat löst $b + (-a)$ die Gleichung $a \cdot x = b$:

$$a + (b + (-a)) \overset{(K1)}{=} a + ((-a) + b) \overset{(K2)}{=} (a + (-a)) + b \overset{(K4)}{=} 0 + b \overset{(K3)}{=} b.$$

Eindeutigkeit: Sei $a + x = b$. Dann haben wir

$$x \overset{(K3)}{=} 0 + x \overset{(K4)}{=} ((-a) + a) + x \overset{(K1)}{=} (-a) + (a + x) \overset{Vor.}{=} (-a) + b \overset{(K1)}{=} b + (-a).$$

4) i) Aus $(A1)$ folgt $x - y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ oder $x - y \in -\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ($\Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$) und somit immer $x \leq y$ oder $y \leq x$.

ii) $x \leq x$ ist klar wegen $x - x \overset{(K4)}{=} 0 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

iii) Sei $x \leq y$ und $z \in \mathbb{R}$. Dann gilt mit $(x + z) + ((-z) + (-x)) = 0$

$$\begin{aligned} (y + z) - (x + z) = y + z + ((-z) + (-x)) &\overset{(K1)}{=} y + (z + (-z)) + (-x) \\ &\overset{(K3)}{=} y + 0 + (-x) \overset{(K3)}{=} y - x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \end{aligned}$$

und folglich ist $x + z \leq y + z$.

iv) Sei $x \leq y$ und $z \in \mathbb{R}^+$. Z.z. ist $y \cdot z - x \cdot z = (y - x) \cdot z \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.
Für $y = x$ ist die Aussage klar wegen Aufgabe 3 iii).
Für $y - x \in \mathbb{R}^+$ gilt $y \cdot z - x \cdot z \in \mathbb{R}^+$ wegen Eigenschaft $(A2)$.