Maßtheorie

Dr. Jana Bielagk
Humboldt-Universität zu Berlin

Sommersemester 2021

Notation

$\emptyset$	die leere Menge bzw. das unmögliche Ereignis
$\{a, b, c, \ldots\}$	ungeordnete Menge, z.B. $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$
$(a, b, c, \ldots)$	geordnete Menge, Tupel, Vektor
$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen $\{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{Q}$	rationale Zahlen
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen
$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen
$A \times B$	kartesisches Produkt von A und B, z.B. $\{1, 2, 3\} \times \{4, 5\} = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$
$A \cap B$	Schnittmenge von A und B, z.B. $\{0, 1\} \cap \{1, 2\} = \{1\}$
$A \cup B$	Vereinigung von Mengen A und B, z.B. $\{0, 1\} \cup \{1, 2, 3\} = \{0, 1, 2, 3\}$
$A \subseteq B$	Menge A ist in Menge B enthalten
$A \subset B$	Menge A ist echt in Menge B enthalten
$A \setminus B$	Menge von Elementen, die in A, aber nicht in B sind
A^c	Komplement der Menge / des Ereignisses A
$a \in A$	a ist ein Element der Menge A, z.B. $5 \in \mathbb{N}$
$\forall$	für alle, z.B. $\forall n \in \mathbb{N} \ldots$
$\exists$	es existiert, z.B. $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\colon m > n$
$\exists!$	ex existiert genau ein – Quantor kombiniert Aussagen zu Existenz und Eindeutigkeit
$f\colon V \to W$	eine Funktion f von V nach W, V ist Definitions- und W Wertebereich
$f \circ g$	Verkettung der Abbildungen f und g, d.h. $(f \circ g)(x) := f(g(x))$
$a \mapsto b$	Element a wird auf b abgebildet, z.B. $f(x) = x^2$ entspricht $x \mapsto x^2$
$A := B$	definiere A als B, z.B. $A := \{1, 2, 3\}$
$A \Rightarrow B$	Implikation (aus der Aussage A folgt Aussage B)
$A \Leftrightarrow B$	Aussage A ist äquivalent zu B
$\det(A)$	Determinante der (quadratischen) Matrix A, wird auch mit $\lvert A\rvert$ bezeichnet, wenn keine Verwechslung mit dem Betrag möglich ist
$f^{-1}(M)$	Urbild der Menge M unter f, d.h. für $f\colon V \to W$ ist $f^{-1}(M) = \{v \in V \mid f(v) \in M\}$
f^{-1}	die Umkehrfunktion der Abbildung f
A^{-1}	die inverse Matrix zu A
A^T	die Transponierte der Matrix A
$(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$	Folge $x_1, x_2, x_3, \ldots$
$x \to a$	Grenzwertbetrachtung, lasse x gegen a gehen
$x \to a_+$	einseitige Grenzwertbetrachtung von rechts
$x \to a_-$	einseitige Grenzwertbetrachtung von links
$f(x_+)$	Grenzwert $\lim_{x \to x_+} f(x)$
$[a, b]$	abgeschlossenes Intervall von a bis b
(a, b)	offenes Intervall von a bis b
$x \vee y$	$\max\{x, y\}$
$x \wedge y$	$\min\{x, y\}$
f^+	Positivteil einer Funktion in der Zerlegung $f = f^+ - f^-$; $f^+(x) = f(x) \vee 0$
$\operatorname{sgn}(x)$	Vorzeichen von $x \in \mathbb{R}$, d.h. $\operatorname{sgn}(x) \in \{-1, 0, 1\}$.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Diese Vorlesung richtet sich an Studierende im Master-Studiengang Statistik und soll das für die Vorlesung Stochastik (und ggf. weitere Vorlesungen am Institut für Mathematik) notwendige Wissen der Maßtheorie vermitteln.

Als Hilfestellung ist in Anhang B ein Überblick über das vorausgesetzte Wissen der Analysis und in Anhang A finden Sie die Grundlagen der Logik und darauf aufbauend elementare Mengenlehre. Dies ist die Voraussetzung für die elementaren Methoden des Beweisens.

Das Skript folgt in großen Teilen dem Buch [Kü16] von Uwe Küchler, welches für diese Vorlesung und damit auch für dieses Publikum geschrieben wurde.

Kapitel 1

Einführung

Ziele

- ☐ Die Motivation hinter der Maßtheorie nachvollziehen
- ☐ Den Begriff der Potenzmenge kennen
- ☐ Den Begriff der Äquivalenzrelation kennen

Bevor wir mit den Inhalten der Maßtheorie beginnen, wollen wir uns ansehen, wo die Theorie am Ende hinführt und wie sie motiviert ist.

1.1 Versuch der Definition einer Volumenfunktion

Wir wollen versuchen, eine Funktion zu definieren, die jeder Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ihr Volumen $\mu(A)$ zuordnet und dabei eine Reihe von „vernünftigen" Eigenschaften erfüllt. Unter anderem soll das Volumen einer Fläche im $\mathbb{R}^2$ gleich ihrem geometrischen Flächeninhalt sein, d.h. beispielsweise soll $\mu([a,b] \times [c,d]) = (b-a) \cdot (d-c)$ sein.

Sehen wir uns die gewünschten Eigenschaften an:

Nichtnegativität: $\mu \colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ ist eine Funktion, die jeder Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ einen nichtnegativen Wert zuordnet.

Monotonie: Ist $A \subseteq B$, so soll auch $\mu(A) \leq \mu(B)$ gelten.

Translationsinvarianz: Für beliebiges $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}^n$ ist $\mu(A + a) = \mu(A)$.

Verträglichkeit mit geometrischem Volumen: Ist $A = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader im $\mathbb{R}^n$, so ist

$$\mu(A) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k).$$

σ-Additivität: Sind $A_1, A_2, \ldots \subseteq \mathbb{R}^n$ abzählbar viele disjunkte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

So sinnvoll diese Minimalanforderung auch sein mag, sie kann leider nicht erfüllt werden.

Satz 1.1

Es existiert keine Funktion auf der Menge aller Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, die alle oben genannten Eigenschaften besitzt.

Um diesen Satz beweisen zu können, müssen wir ein wenig ausholen.

1.1.1 Das Auswahlaxiom

Sei $\mathcal{M}$ eine Menge von nichtleeren Mengen. Eine Abbildung, die jedem Element $A \in \mathcal{M}$, d.h. jeder Menge aus dem Mengensystem, ein Element aus dieser Menge A zuordnet, heißt *Auswahlfunktion* für $\mathcal{M}$.

Beispiel 1.2. *Sei* $\mathcal{M} = \{[0,2],[5,8],[1,6]\}$. *Dann ist eine mögliche Auswahlfunktion gegeben durch*

$$F([0,2]) = 1, \quad F([5,8]) = 5, \quad F([1,6]) = 5.$$

Das Auswahlaxiom kann wie folgt formuliert werden.

Auswahlaxiom

Für jede Menge nichtleerer Mengen gibt es eine Auswahlfunktion.

Nehmen wir an, dass alle Mengen eines Mengensystems Teilmengen einer gemeinsamen Grundmenge sind – nennen wir die Grundmenge Ω.

Definition 1.3: Potenzmenge

Die *Potenzmenge* $\mathcal{P}(\Omega)$ einer Menge Ω ist die Menge der Teilmengen von Ω, d.h.

$$\mathcal{P}(\Omega) := \{A \mid A \subseteq \Omega\}.$$

Wie lauten die Potenzmengen folgender Mengen?

Ω	$\mathcal{P}(\Omega)$
$\emptyset$	
$\{1\}$	
$\{0,1\}$	

In diesem Fall lautet das Auswahlaxiom:

Ist $\Omega \neq \emptyset$, d.h. ist Ω eine nichtleere Menge, so besitzt $\mathcal{P}(\Omega)\setminus\emptyset$ eine Auswahlfunktion.

Bemerkung 1.4. *Das Auswahlaxiom wird üblicherweise nicht bewiesen, sondern dessen Gültigkeit wird angenommen oder aber unter Annahme anderer Axiome bewiesen. Im Folgenden werden wir die Gültigkeit des Auswahlaxioms annehmen.*

1.1.2 Äquivalenzrelationen

Für zwei gegebene reelle Zahlen können wir immer sagen, welche der beiden größer ist oder ob beide gleich groß sind. Zum Beispiel ist

$$-1 < 0, \qquad \frac{1}{3} = \frac{2}{6}, \qquad 1 \leq 2 \quad \text{und} \quad \pi > 3.$$

Für Vektoren ist dies hingegen keineswegs klar: Ist $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ kleiner oder größer als $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ oder gar gleich (groß)? Wollen wir Beziehungen zwischen mathematischen Objekten darstellen, so tun wir das mit Hilfe von *Relationen*.

Definition 1.5: Relationen

Seien X und Y nichtleere Mengen. Eine Teilmenge $\mathcal{R}$ des kartesischen Produkts $X \times Y$ heißt *Relation in* $X \times Y$.

Gilt $\mathcal{R} \subseteq X \times X$, so heißt $\mathcal{R}$ *Relation in* X.

Beispiel 1.6.

- *Die Gleichheitsrelation in* $\mathbb{N}$ *lässt sich beschreiben als*

$$\mathcal{R} = \{(1,1),(2,2),(3,3),\ldots\} = \{\,(n,n) \mid n \in \mathbb{N}\}\,.$$

- $<$, $\leq$, $=$, $\geq$ *und* $>$ *sind Relationen auf* $\mathbb{R}$ *(oder Teilmengen von* $\mathbb{R}$*).*
- *Parallelität ist eine Relation in der Menge aller Geraden in einer Ebene.*

Ist $\mathcal{R} \subset X \times Y$ eine Relation, und ist das Paar $(x,y) \in \mathcal{R}$, so sagt man, x *steht in Relation zu* y.

Notation

Gilt für $(x,y) \in X \times Y$, dass x in Relation steht zu y, d.h. $(x,y) \in \mathcal{R}$, so schreibt man auch $x \sim y$.

Definition 1.7: Äquivalenzrelation

Eine Relation $\sim$ in einer nichtleeren Menge X heißt *Äquivalenzrelation*, falls für beliebige $x, y, z \in X$ folgende Eigenschaften erfüllt sind:

Reflexivität: $x \sim x$,
Symmetrie: $x \sim y$ impliziert $y \sim x$,
Transitivität: $x \sim y$ und $y \sim z$ impliziert $x \sim z$.

Bemerkung 1.8. *Die Eigenschaft der Symmetrie kann auch alternativ wie folgt definiert werden:*

$$x \sim y \iff y \sim x, \quad \forall x, y \in X.$$

Diese Definition ist inhaltlich äquivalent zu der oben gegebenen Definition.

Beispiel 1.9.

- *Die Relation* $<$ *auf* $\mathbb{R}$ *ist zwar transitiv, aber weder reflexiv noch symmetrisch.*
- *Die Relation* $\leq$ *auf* $\mathbb{R}$ *ist reflexiv und transitiv, jedoch nicht symmetrisch.*
- *Die Relation* $=$ *auf* $\mathbb{R}$ *ist reflexiv, symmetrisch und transitiv – es handelt sich also um eine Äquivalenzrelation.*

Beispiel 1.10. *Sei X die Menge der in der Mensa zur Verfügung stehenden Essen. Definieren wir als Relation*

$$(x, y) \in \mathcal{R} \; :\Longleftrightarrow \quad \text{ich mag } x \text{ genau so gerne wie oder lieber als } y.$$

Diese Relation ist üblicherweise reflexiv, jedoch nicht symmetrisch. Was bedeutet hier Transitivität? Nehmen wir an, ich mag Pasta lieber als Reis und Reis lieber als Kartoffeln, so bedeutet Transitivität, dass ich Pasta lieber mag als Kartoffeln. In der Realität ist selbst dies nicht immer gegeben.

Die bisher beschriebene Relation nennt man Präferenzrelation*, wenn sie zudem die Eigenschaft der* Vollständigkeit *hat, d.h. wenn gilt:*

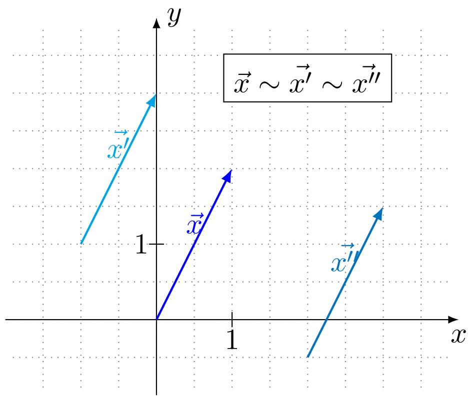
$$\forall x, y \in X: \; (x, y) \in \mathcal{R} \vee (y, x) \in \mathcal{R}.$$

Mit anderen Worten: Eine Relation ist vollständig auf einer Menge, wenn man für je zwei Elemente der Menge immer eines der beiden in Relation zum anderen steht.

Beispiel 1.11. *Interpretieren wir Vektoren $x \in \mathbb{R}^2$ als Pfeile mit einem Anfangspunkt, einer Richtung und einer Länge. Auf der Menge dieser Pfeile definieren wir folgende Äquivalenzrelation:*

$$\vec{x} \sim \vec{y} \; :\Longleftrightarrow \quad \vec{x} \text{ und } \vec{y} \text{ haben die gleiche Richtung und Länge}.$$

Auf Grund der Transitivität sind somit alle Pfeile einer vorgegebenen Richtung und Länge äquivalent zu dem Pfeil, der im Koordinatenursprung startet und die vorgegebene Richtung und Länge hat. Somit können wir Vektoren $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ als Repräsentanten einer ganzen Klasse *äquivalenter Pfeile interpretieren. Alle zueinander äquivalenten Pfeile haben gemeinsam, dass die Differenz zwischen End- und Anfangspunkt gerade den Vektor x ergeben.*



Den Ansatz, alle (in Bezug auf eine fixierte Äquivalenzrelation) zueinander äquivalenten Elemente einer Menge zu einer *Äquivalenzklasse* zusammenzufassen, wollen wir nun formalisieren:

Definition 1.12: Äquivalenzklassen

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer nichtleeren Menge X. Die *Äquivalenzklasse* eines Elements $x_0 \in X$ ist definiert als

$$[x_0] := \{ x \in X \mid x \sim x_0 \}.$$

Soll die Relation hervorgehoben werden, so schreibt man auch $[x_0]_\sim$.

Elemente einer Äquivalenzklasse werden *Vertreter* oder *Repräsentanten* der Äquivalenzklasse genannt.

Die Menge aller Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation $\sim$ auf einer Menge X,

$$X/\sim \; := \{ [x]_\sim \mid x \in X \},$$

wird als *Faktormenge* oder *Quotientenmenge* bezeichnet.

Die Menge aller Pfeile gleicher Länge und Richtung bilden eine Äquivalenzklasse, welche durch einen Vektor des $\mathbb{R}^n$ repräsentiert wird. Die Menge der Vektoren können wir also als Quotientenmenge der in Beispiel 1.11 eingeführten Relation auf der Menge der Pfeile verstehen.

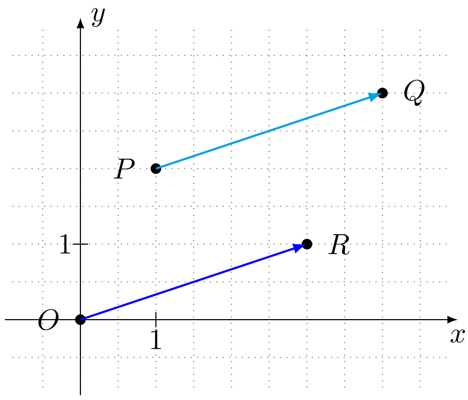
Beispiel 1.13 (Fortsetzung von Beispiel 1.11).
Seien

$$O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Punkte im Raum $\mathbb{R}^2$. *Dann ist* $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{OR}$, *d.h.* $\overrightarrow{PQ} \in [\overrightarrow{OR}]$. *Alle Pfeile dieser Äquivalenzklasse werden durch den Vektor*

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

repräsentiert.



Der Pfeil $\overrightarrow{OR}$ *heißt auch* Ortspfeil *oder* Ortsvektor *zum Vektor* v. *Unter allen zueinander äquivalenten Pfeilen wird so der im Koordinatenursprung startende Pfeil hervorgehoben.*

Satz 1.14

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation in einer nichtleeren Menge X. Dann gilt:

1. Keine der durch $\sim$ erzeugten Äquivalenzklassen ist leer, d.h.

$$[x] \neq \emptyset, \quad \forall x \in X.$$

2. Sind zwei Äquivalenzklassen nicht gleich, so sind sie disjunkt, d.h.

$$[x] \neq [y] \implies [x] \cap [y] = \emptyset.$$

3. X ist die Vereinigung aller Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$, d.h.

$$X = \bigcup_{x \in X} [x].$$

Beweis.

1. Als Äquivalenzrelation ist $\sim$ insbesondere reflexiv. Somit ist für jedes $x \in X$ insbesondere $x \in [x]$, so dass jede Äquivalenzklasse mindestens ein Element enthält.

2. Zeigen wir die Aussage durch Kontraposition. Wir nehmen an, es sei $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, d.h. es existiert ein $z \in [x] \cap [y]$. Dann gilt insbesondere $z \sim x$ und $z \sim y$. Wegen Symmetrie und Transitivität von $\sim$ gilt somit auch $x \sim y$. Mit Symmetrie und Transitivität haben wir also für alle $x' \in [x]$ und $y' \in [y]$:

$$\begin{aligned} x' \sim x \quad &\text{und} \quad x \sim y \quad \implies \quad x' \sim y \quad \implies \quad x' \in [y], \\ y' \sim y \quad &\text{und} \quad x \sim y \quad \implies \quad y' \sim x \quad \implies \quad y' \in [x], \end{aligned}$$

   d.h. $[x] \subseteq [y]$ und $[y] \subseteq [x]$. Zusammenfassend haben wir also $[x] = [y]$.

3. Es ist $x \in [x]$ für jedes $x \in X$ und man hat immer $X = \bigcup_{x \in X} x$, also folgt $X \subseteq \bigcup_{x \in X} [x]$. Andererseits ist per Definition $[x] \subseteq X$ für jedes $x \in X$ und somit ist auch $\bigcup_{x \in X} [x] \subseteq X$. Insgesamt folgt somit die behauptete Gleichheit der Mengen.

$\square$

1.1.3 Beweis von Satz 1.1

Wir wollen zeigen, dass auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ keine nichtnegative, monotone, translationsinvariante, σ-additive Abbildung existiert, welche zudem verträglich ist mit dem geometrischen Volumen. Dies zeigen wir durch einen Widerspruchsbeweis.

Beweis. Angenommen $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ sei eine Abbildung, die alle geforderten Eigenschaften besitzt.
Wir betrachten folgende Äquivalenzrelation[1] auf dem $\mathbb{R}^n$:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}^n.$$

Sei $A \subseteq [0,1]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, welche aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält. Eine solche Menge existiert, denn wenn F eine Auswahlfunktion auf der Menge der Äquivalenzklassen ist, so wähle man als Menge das Bild von F.
Sei nun

$$B := \bigcup_{r\in[-1,1]^n\cap\mathbb{Q}^n} A + \{r\}.$$

Sehen wir uns die Eigenschaften von B an:

B **ist eine disjunkte Vereinigung abzählbar vieler Mengen:** Da $\mathbb{Q}$ und somit auch $\mathbb{Q}^n$ abzählbar ist, ist B die Vereinigung abzählbar vieler Mengen. Nehmen wir an, die Vereinigung sei nicht disjunkt, d.h. für $r_1 \neq r_2$, beide in $[-1,1]^n \cap \mathbb{Q}^n$, gebe es $a_1, a_2 \in A$ derart, dass $r_1 + a_1 = r_2 + a_2$ ist. Dann folgt jedoch $a_1 - a_2 = r_2 - r_1 \in \mathbb{Q}^n$, d.h. $a_1 \sim a_2$. Folglich sind a_1 und a_2 in derselben Äquivalenzklasse. Da A nur aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält, ist folglich $a_1 = a_2$, also auch $r_1 = r_2$, was ein Widerspruch ist. Damit ist gezeigt, dass die Vereinigung der Mengen, die B ergeben, disjunkt ist.

$\mu(B)$ **ist endlich:** Nach Definition ist

$$[0,1]^n \subseteq B \subseteq [-1,2]^n.$$

Aus den Eigenschaften von μ folgt somit

$$1 = \mu([0,1]^n) \leq \mu(B) \leq \mu([-1,2]^n) = 3^n,$$

d.h. $\mu(B)$ ist endlich.

Kommen wir nun zum Aufzeigen eines Widerspruchs. Wegen der σ-Additivität und Translationsinvarianz von μ gilt auch

$$\mu(B) = \sum_{r\in[-1,1]^n\cap\mathbb{Q}} \mu(A + \{r\}) = \sum_{r\in[-1,1]^n\cap\mathbb{Q}} \mu(A).$$

Wäre $\mu(A) = 0$, so ergäbe sich ein Widerspruch zu $\mu(B) \geq 1$. Ist hingegen $\mu(A) > 0$, so ergibt sich ein Widerspruch zu $\mu(B) \leq 3^n$, da $\mu(A)$ unendlich oft addiert wird. □

Bemerkung 1.15. *Das Problem mit dem Volumenbegriff kann auch durch das Banach-Tarski-Paradoxon verdeutlicht werden: Man kann eine (mindestens 3-dimensionale) Kugel zerlegen und wieder so zusammensetzen, dass zwei Kugeln entstehen mit identischem Radius zur Ausgangskugel, d.h. das Volumen wird dabei verdoppelt. Eine ähnliche Aussage funktioniert auch für $n = 2$, dann spricht man allgemeiner vom* Hausdorff-Banach-Tarski-Paradoxon.

[1] Es ist eine kurze Übungsaufgabe, sich zu überlegen, dass dies tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist.

1.2 Ausblick auf die Lösung

Da es keine sinnvolle Funktion gibt die *jeder* Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ein n-dimensionales Volumen zuordnet, besteht die Lösung darin, das Volumen nur für eine geeignete Auswahl von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ zu definieren.
Wir haben also folgendes Ziel:

- Welches System von Mengen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ist geeignet, um darauf eine Volumenfunktion zu definieren, d.h. alle Mengen aus $\mathcal{A}$ wollen wir „messen" können mit einem „Maß", welches die bereits genannten Eigenschaften besitzen soll.
- Wie definiert man ein solches Maß μ mit den gewünschten Eigenschaften?
- Wie können wir mit Hilfe eines solchen Maßes μ für geeignete (messbare) Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$ ein Integral der Form $\int_X f \mathrm{d}\mu$ definieren, welches für geeignete Mengen X mit dem Riemann-Integral übereinstimmt?

1.3 Aufgaben

Aufgabe 1. *Die Translationsinvarianz der Volumenfunktion μ wurde wie folgt definiert: Für beliebiges $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}^n$ ist $\mu(A + a) = \mu(A)$.*
Geben Sie die Mengen $A + a$ für folgende Beispiele an:

a) $A = [0, 1]$ *und* $a = 3$*;*

b) $A = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_3 = 0 \right\}$ *und* $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2. *Geben Sie für folgende Mengen je eine oder, falls möglich, zwei Auswahlfunktionen an.*

a) $\mathcal{M} = \{[-1, 1], (-1, 1), (0, 5)\}$

b) $\mathcal{M} = \{\{1\}, \{2\}\}$

Aufgabe 3. *Wie viele Elemente enthält die Potenzmenge $\mathcal{P}(\{1, 3, 5, 7, 9\})$?*

Aufgabe 4. *Auf der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ definieren wir folgende Äquivalenzrelation:*

$$a \sim b \quad \iff \quad \exists k \in \mathbb{Z}\colon b - a = 3k.$$

a) Entscheiden Sie, welche der Folgenden Aussagen korrekt sind:

$$1 \sim 3, \quad 1 \sim 4, \quad 1 \sim 5, \quad 1 \sim 6, \quad 5 \sim 8.$$

b) Zeigen Sie, dass es sich bei $\sim$ in der Tat um eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ handelt.

c) Geben Sie alle Äquivalenzklassen an.

Aufgabe 5. *Entscheiden Sie für folgende Relationen $\sim$ ob sie Äquivalenzrelationen auf den gegebenen Mengen definieren. Falls ja, beschreiben Sie (in Worten), wie die Äquivalenzklassen aussehen. Wenn nicht, finden Sie geeignete Gegenbeispiele (zu den Eigenschaften einer Äquivalenzrelation).*

a) $\Omega = \{1, \ldots, n\}$ *für ein* $n \in \mathbb{N}$ *und für* $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ *definieren wir*

$$A \sim B \quad \iff \quad |A| = |B|\,.$$

b) $\Omega \neq \emptyset$ *ist eine beliebige Menge und für* $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ *definieren wir*

$$A \sim B \quad \iff \quad A \cap B = \emptyset.$$

1.4 English terminology

The properties of the volume functions mentioned in the first section are:

- nonnegativity
- monotonicity
- translation invariance
- compatibility with the geometric volume
- σ-additivity

We also used the following terminology:

Auswahlaxiom	axiom of choice
Auswahlfunktion	choice function
Potenzmenge	power set
Äquivalenzrelation	equivalence relation
Reflexivität	reflexivity
Symmetrie	symmetry
Transitivität	transitivity
Äquivalenzklasse	equivalence class
disjunkte Vereinigung	disjoint union
endlich	finite
abzählbar	countable
überabzählbar	uncountable
Widerspruch	contradiction
Maß	measure
Menge	set

Kapitel 2

Messbare Räume

Ziele

- □ Grundlagen der Mengenlehre kennen
- □ mit dem Begriff σ-Algebra umgehen können
- □ die Borel-σ-Algebra und erzeugte σ-Algebren kennen

2.1 Grundlagen der Mengenlehre

Wir führen in diesem Abschnitt nur kurz die wesentliche Notation für Mengen ein. Mehr Details und Beispiele dazu finden Sie im Anhang A.2.
Für Verknüpfungen von Mengen verwenden wir folgende Notation, wobei $A, B \subseteq \Omega$ Teilmengen einer gemeinsamen Grundmenge Ω seien.

Vereinigung zweier Mengen: $A \cup B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \vee \omega \in B\}$

Schnitt zweier Mengen: $A \cap B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \wedge \omega \in B\}$

Komplement: $A^c = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$

Bemerkung 2.1. *Wir wählen bewusst nicht die in der Literatur ebenfalls zu findende Schreibweise $\overline{A}$ für das Komplement zu A, da diese Schreibweise auch für den Abschluss einer Menge verwendet wird.*

Notation

Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen, so setzt man:

$$\begin{aligned}\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n &= \{\omega \in \Omega \mid \exists n \in \mathbb{N} \colon \omega \in A_n\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A_n \text{ für mindestens ein } n \in \mathbb{N}\}\,, \\ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n &= \{\omega \in \Omega \mid \forall n \in \mathbb{N} \colon \omega \in A_n\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}\,.\end{aligned}$$

Zur Vollständigkeit der Darstellung wiederholen wir kurz die Rechenregeln für Mengen.

Satz 2.2

Seien $E, F, G, A_1, \dots, A_n \subseteq \Omega$ Mengen. Dann gelten folgende Rechenregeln:

Kommutativität $E \cup F = F \cup E$ und $E \cap F = F \cap E$

Assoziativität: $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$ und $(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$

Distributivität: $(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G)$ und $(E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G)$

De Morgan'sche Regeln: $\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)^c = \bigcap_{k=1}^n A_k^c$ und $\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)^c = \bigcup_{k=1}^n A_k^c$

Beweis der De Morgan'schen Regeln. Die erste Gleichung zeigt man dadurch, dass ein beliebiges Element ω genau dann in der einen Menge enthalten ist, wenn es in der anderen Menge enthalten ist.

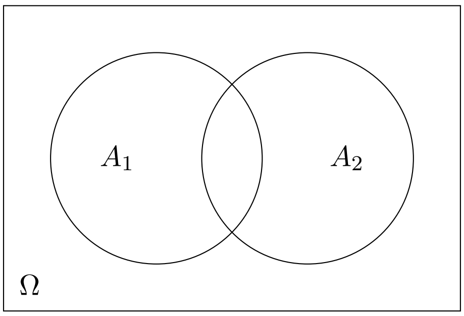
$$\begin{aligned}
\omega \in \left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)^c &\iff \omega \notin \bigcup_{k=1}^n A_k \\
&\iff \omega \notin A_k,\ \forall k \in \{1, \dots, n\} \\
&\iff \omega \in A_k^c,\ \forall k \in \{1, \dots, n\} \iff \omega \in \bigcap_{k=1}^n A_k^c
\end{aligned}$$

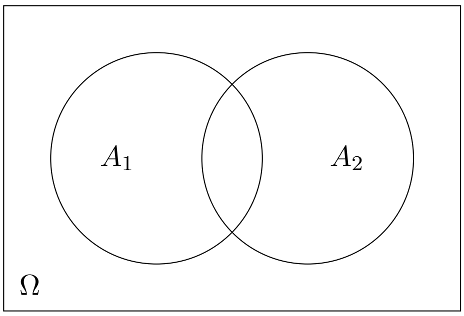
Die zweite Aussage beweist man mit Hilfe der ersten. Zunächst einmal gilt mit der bereits bewiesenen Aussage

$$\left(\bigcup_{k=1}^n A_k^c\right)^c \overset{\text{1. Aussage}}{=} \bigcap_{k=1}^n (A_k^c)^c = \bigcap_{k=1}^n A_k.$$

Bildet man das Komplement auf beiden Seiten, so erhält man die zu zeigende Aussage. □

Man kann sich die DeMorgan'schen Regeln auch mit Hilfe von Venn-Diagrammen verdeutlichen, zum Beispiel gilt im einfachen Fall $n = 2$:





Definition 2.3

Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen. Die Mengen heißen *paarweise disjunkt*, falls Folgendes gilt:

$$A_k \cap A_j = \emptyset, \quad \forall k \neq j.$$

Notation

Sind A und B disjunkt, so schreibt man für deren (disjunkte) Vereinigung $A \dot{\cup} B$.

2.2 σ-Algebren

Wir haben bereits die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ zu einer Menge Ω als Menge der Teilmengen von Ω kennen gelernt und wissen zugleich, dass wir keinen Volumenbegriff auf der Potenzmenge des $\mathbb{R}^n$ definieren können. Daher sehen wir uns nun ein etwas kleineres Mengensystem an. Dazu sei wieder Ω eine Grundmenge, in der Stochastik auch Grundraum genannt.

Definition 2.4: σ-Algebra

Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, d.h. eine Menge von Teilmengen von Ω, heißt *σ-Algebra*, falls sie folgende Bedingungen erfüllt:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. Ist $A \in \mathcal{A}$, so ist auch das Komplement $A^c \in \mathcal{A}$.
3. Sind $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, so ist auch deren Vereinigung $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Lemma 2.5

Die Potenzmenge ist stets eine σ-Algebra.

Beweis. Sei M eine Menge und sei $\mathcal{P}(M)$ deren Potenzmenge. Nach Definition ist $\mathcal{P}(M) \subseteq \mathcal{P}(M)$. Überprüfen wir die drei Eigenschaften einer σ-Algebra:

1. $M \subseteq M$, daher ist $M \in \mathcal{P}(M)$.
2. Ist $A \in \mathcal{P}(M)$, also $A \subseteq M$, so ist auch $A^c = M \setminus A \subseteq M$, also ist $A^c \in \mathcal{P}(M)$.
3. Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{P}(M)$, d.h. $A_1, A_2, \ldots \subseteq M$. Dann ist auch $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \subseteq M$, also ist $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{P}(M)$.

□

Beispiel 2.6. *Zu einer Grundmenge $\Omega \neq \emptyset$ sei*

$$\mathcal{A} := \{ A \subseteq \Omega \,|\; A \text{ oder } A^c \text{ ist höchstens abzählbar unendlich} \}.$$

Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra?

Antwort: Zunächst einmal ist nach Definition $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Überprüfen wir die drei Eigenschaften einer σ-Algebra:

1. *Ist Ω höchstens abzählbar unendlich (wir sagen dafür kurz, Ω sei abzählbar), so ist bereits $\Omega \in \mathcal{A}$. Ist Ω nicht abzählbar, so ist dafür $\Omega^c = \Omega \setminus \Omega = \emptyset$ abzählbar, also ist wieder $\Omega \in \mathcal{A}$.*
2. *Analog zu 1. gilt hier: Sei $A \in \mathcal{A}$. Damit ist zunächst einmal $A^c = \Omega \setminus A \subseteq \Omega$. Ist A selbst abzählbar, so ist damit $(A^c)^c = A$ abzählbar, also ist $A^c \in \mathcal{A}$. Ist hingegen A überabzählbar, so ist, da $A \in \mathcal{A}$ sein soll, A^c abzählbar und somit ist $A^c \in \mathcal{A}$.*
3. *Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$. Falls $B := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ abzählbar ist, so ist bereits $B \in \mathcal{A}$. Nehmen wir also an, B sei nicht höchstens abzählbar, also überabzählbar. Da B eine abzählbare Vereinigung von Mengen ist, muss somit mindestens eine dieser Mengen überabzählbar sein; o.B.d.A.[1] sei*

[1] O.B.d.A. ist die Abkürzung für *ohne Beschränkung der Allgemeinheit*. In diesem Fall ist das gegeben, denn welche der Mengen überabzählbar ist, spielt keine Rolle, da sowohl Vereinigung als auch Schnitt von Mengen kommutativ sind.

dies A_1. Dann gilt

$$B^c = \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right)^c = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k^c \subseteq A_1^c.$$

Da $A_1 \in \mathcal{A}$ ist, muss, da A_1 nach Annahme überabzählbar ist, A_1^c abzählbar sein. Folglich ist B^c als Teilmenge einer abzählbaren Menge selbst abzählbar und somit ist wieder $B \in \mathcal{A}$.

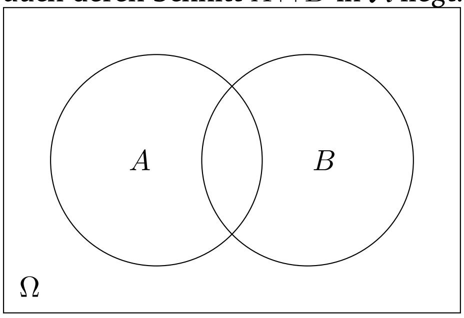
Wir können daraus schlussfolgern, dass $\mathcal{A}$ in der Tat eine σ-Algebra ist.

Lemma 2.7

Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra. Sind $A, B \in \mathcal{A}$, so sind auch die Mengen $A \cup B$ und $A \cap B$ Elemente von $\mathcal{A}$.

Beweis. Wenn die Vereinigung abzählbar vieler Mengen aus $\mathcal{A}$ wieder in $\mathcal{A}$ liegt, so gilt dies auch für endlich viele. Formal kann man das begründen, indem man $A_1 := A$, $A_2 := B$ und $A_k := \emptyset$ für $k \geq 3$ setzt.

Seien nun $A, B \in \mathcal{A}$. Anhand einer Skizze kann man sich eine Beweisstrategie überlegen, warum auch deren Schnitt $A \cap B$ in $\mathcal{A}$ liegt.



$\square$

Mit den gezeigten Eigenschaften können wir ein gegebenes Mengensystem so ergänzen, dass daraus eine σ-Algebra entsteht.

Sei $A \subseteq \Omega$. Ergänzen Sie die angegebenen Mengensysteme so, dass σ-Algebren entstehen.

$\mathcal{M}$	kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{M}$ enthält
$\{\Omega\}$	
$\{A\}$	
$\mathcal{P}(\Omega)$	

Das führt uns auf den Begriff der *erzeugten σ-Algebra*. Dafür benötigen wir zunächst etwas Vorarbeit.

Definition 2.8

Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ σ-Algebren auf einem Grundraum Ω und gilt $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, so sagt man, $\mathcal{A}$ sei *kleiner* als $\mathcal{B}$. Man nennt $\mathcal{A}$ dann *Unter-σ-Algebra* von $\mathcal{B}$.

Beispiel 2.9. *Für die σ-Algebren*

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{0,1\}\} \quad \textit{und} \quad \mathcal{B} = \{\{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \emptyset\}$$

gilt $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, denn jede Menge, die in $\mathcal{A}$ enthalten ist, ist auch in $\mathcal{B}$ enthalten. $\mathcal{A}$ ist also eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{B}$.

Lemma 2.10

Sei $\Omega \neq \emptyset$ und seien $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ σ-Algebren aus $\mathcal{P}(\Omega)$, wobei I eine nichtleere Indexmenge sei. Dann ist auch der Schnitt

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i = \{ A \subseteq \Omega \mid A \in \mathcal{A}_i, \ \forall i \in I \}$$

eine σ-Algebra aus $\mathcal{P}(\Omega)$.

Beweis. Da $\mathcal{A}_i$ für jedes $i \in I$ eine σ-Algebra ist, gilt insbesondere $\Omega \in \mathcal{A}_i$ für alle $i \in I$. Folglich ist $\Omega \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$. Die Menge ist damit zugleich nichtleer.

Sei nun $A \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$. Dann ist insbesondere $A \in \mathcal{A}_i$ für ein beliebiges $i \in I$. Da $\mathcal{A}_i$ eine σ-Algebra ist, ist auch $A^c \in \mathcal{A}_i$. Da $i \in I$ beliebig war, ist also A^c in $\mathcal{A}_i$ für alle $i \in I$, also ist $A^c \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$.

Seien nun (der Unterscheidbarkeit halber mit anderem Buchstaben) $B_1, B_2, \ldots \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$, d.h. $B_k \in \mathcal{A}_i$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $i \in I$. Da $\mathcal{A}_i$ eine σ-Algebra ist, ist auch $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k \in \mathcal{A}_i$ für beliebiges $i \in I$, also ist schließlich $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$.

Damit haben wir gezeigt, dass $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ eine σ-Algebra ist. □

Satz 2.11

Für eine nichtleere Menge Ω sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein beliebiges Mengensystem. Dann gilt:

1. Das Mengensystem

$$\sigma(\mathcal{M}) := \bigcap \{ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) \mid \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra}, \mathcal{M} \subseteq \mathcal{A} \}$$

   ist eine σ-Algebra, die $\mathcal{M}$ umfasst, d.h. es gilt $\mathcal{M} \subseteq \sigma(\mathcal{M})$.

2. $\sigma(\mathcal{M})$ ist die kleinste σ-Algebra aus $\mathcal{P}(\Omega)$, die $\mathcal{M}$ enthält. Ist also $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra, für die $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$ gilt, so gilt auch $\sigma(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{A}$.

Beweis.

1. Das Mengensystem

$$\{ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) \mid \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra}, \mathcal{M} \subseteq \mathcal{A} \} \tag{2.2.1}$$

   enthält $\mathcal{P}(\Omega)$ und ist somit nicht leer. Nach Lemma 2.10 ist zudem der Schnitt von σ-Algebren selbst eine σ-Algebra. Da jede der σ-Algebren aus dem Mengensystem (2.2.1) $\mathcal{M}$ enthält, gilt das auch für deren Schnitt, d.h. $\mathcal{M} \subseteq \sigma(\mathcal{M})$.

2. Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra, die $\mathcal{M}$ enthält. Nach Definition gilt dann auch $\sigma(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{A}$, da $\mathcal{A}$ zu dem Mengensystem (2.2.1) gehört, aus dessen Schnitt $\sigma(\mathcal{M})$ gebildet wird.

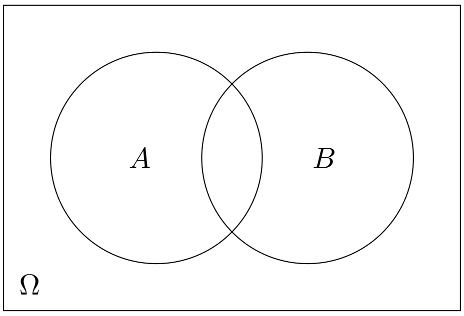
□

Definition 2.12

Ist $\Omega \neq \emptyset$ und $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengensystem, so nennt man $\sigma(\mathcal{M})$ *die von* $\mathcal{M}$ *erzeugte* σ*-Algebra*. Andersherum nennt man $\mathcal{M}$ dann einen *Erzeuger der* σ*-Algebra* $\sigma(\mathcal{M})$.

Beispiel 2.13. *Seien $A, B \subseteq \Omega$ Mengen. Was ist $\sigma(\{A, B\})$?*

Antwort: Hierbei hilft es, zunächst die kleinsten disjunkten nichtleeren Mengen zu finden, die in $\sigma(\{A, B\})$ enthalten sind, und im Anschluss alle denkbaren Vereinigungen derer zu bilden.



In den folgenden Ergebnissen sei stets $\Omega \neq \emptyset$ eine feste nichtleere Menge.

Lemma 2.14

Seien $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengensystem und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$

(ii) für jede σ-Algebra $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ mit $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}'$ gilt $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$.

Dann gilt $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{M})$.

Lemma 2.15

Ist $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra, so gilt $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

Lemma 2.16

Sind $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ Mengensysteme, für die $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2$ gilt, so folgt hieraus $\sigma(\mathcal{M}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{M}_2)$.

Alle drei vorangehenden Lemmata sind Übungsaufgaben.

2.3 Halbringe, Semialgebren und Algebren

Wir haben uns bisher ganz spezielle Mengensysteme angesehen, nämlich σ-Algebren. Eine naheliegende Frage ist: Welche Rolle spielt das σ? Dafür sehen wir uns zwei weitere Begriffe für Mengensysteme an. In diesem Abschnitt sei durchgehend $\Omega \neq \emptyset$ eine nichtleere Menge.

Definition 2.17

Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt *Halbring*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$.
2. Sind $A, B \in \mathcal{A}$, so ist auch $A \cap B \in \mathcal{A}$, d.h. $\mathcal{A}$ ist *durchschnittsstabil*.
3. Zu $A, B \in \mathcal{A}$ existieren stets $n \in \mathbb{N}$ und paarweise disjunkte Mengen $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, so dass $B \setminus A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ gilt.

Definition 2.18

Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt *Semialgebra*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$ und $\emptyset \in \mathcal{A}$.
2. Sind $A, B \in \mathcal{A}$, so ist auch $A \cap B \in \mathcal{A}$, d.h. $\mathcal{A}$ ist *durchschnittsstabil*.
3. Zu $A, B \in \mathcal{A}$ existieren stets $n \in \mathbb{N}$ und paarweise disjunkte Mengen $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, so dass $B \setminus A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ gilt.

Definition 2.19

Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt *Algebra*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. Zu jedem $A \in \mathcal{A}$ ist auch $A^c \in \mathcal{A}$.
3. Sind $A, B \in \mathcal{A}$, so ist auch $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Zwischen den drei Begriffen besteht folgender Zusammenhang:

Satz 2.20

a) Jede Semialgebra über einer Menge $\Omega \neq \emptyset$ ist stets auch ein Halbring.
b) Jede Algebra über einer Menge Ω ist stets auch eine Semialgebra.
c) Jede σ-Algebra über einer Menge Ω ist stets auch eine Algebra.

Beweis. Aussage a) ist offensichtlich korrekt, denn die Bedingungen, die an eine Semi-Algebra gestellt werden, beinhalten genau die Bedingungen, die an einen Halbring gestellt werden, und zusätzlich wird noch gefordert, dass Ω selbst dazugehört.

Aussage c) ist offensichtlich korrekt. Das einzige notwendige Argument haben wir bereits im Beweis von Lemma 2.7 gesehen.

Um Teil b) zu beweisen, nehmen wir an, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ sei eine Algebra. Wir müssen die drei Eigenschaften einer Semialgebra nachweisen.

1. $\Omega \in \mathcal{A}$ ist nach Eigenschaft 1 der Algebra erfüllt. Zudem folgt aus Eigenschaft 2 der Algebra, dass auch $\Omega^c = \Omega \setminus \Omega = \emptyset \in \mathcal{A}$ ist.

2. Seien $A, B \in \mathcal{A}$. Nach Eigenschaft 2 der Algebra gilt auch $A^c, B^c \in \mathcal{A}$ und mit Eigenschaft 3 der Algebra folgt $A^c \cup B^c \in \mathcal{A}$. Nochmalige Anwendung von Eigenschaft 2 impliziert nun $(A^c \cup B^c)^c = (A^c)^c \cap (B^c)^c = A \cap B \in \mathcal{A}$.

3. Seien $A, B \in \mathcal{A}$. Nach Eigenschaften 2 und 3 der Algebra ist dann auch

   $$B \setminus A = B \cap A^c = (B^c \cup A)^c \in \mathcal{A}.$$

   Eigenschaft 3 der Semialgebra ist also mit $n = 1$ und $A_1 = B \setminus A$ erfüllt.

□

2.4 Messbare Räume

Wir haben viele verschiedene σ-Algebren kennen gelernt. Mit dem Gedanken im Hinterkopf, dass ein Maß (d.h. eine Art Volumenfunktion) für alle Mengen der σ-Algebra definiert werden soll, können wir im folgenden Sinne von *messbaren Mengen* sprechen:

Definition 2.21

Jedes Paar $(\Omega, \mathcal{A})$, wobei Ω eine nichtleere Menge und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra ist, heißt ein *messbarer Raum*. Eine Menge $A \subseteq \Omega$ heißt *$\mathcal{A}$-messbare Menge*, falls $A \in \mathcal{A}$ ist.

Beispiel 2.22. *Betrachten wir die Menge $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ mit den Sigma-Algebren*

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 &= \{\emptyset, \Omega\}, \\
\mathcal{A}_2 &= \{\emptyset, \Omega, \{1, 3, 5, 7, 9\}, \{2, 4, 6, 8, 10\}\}, \\
\mathcal{A}_3 &= \{\emptyset, \Omega, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \{6, 7, 8, 9, 10\}\}, \\
\mathcal{A}_4 &= \mathcal{P}(\Omega).
\end{aligned}$$

Gegeben sind zudem folgende Teilmengen von Ω:

$$A = \{1\}, \quad B = \Omega, \quad C = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad D = \{1, 3, 5\}.$$

Bezüglich welcher σ-Algebren sind diese Mengen messbar?

<u>Antwort:</u> Gehen wir die Mengen nacheinander durch:

-
-
-
-

Dieses Beispiel zeigt insbesondere, dass Messbarkeit einer Menge i.A. von der gewählten σ-Algebra abhängt. Die einzigen Ausnahmen sind Ω und $\emptyset$:

Bemerkung 2.23. *Ist $(\Omega, \mathcal{A})$ ein beliebiger messbarer Raum, so sind stets sowohl $\emptyset$ als auch Ω messbare Mengen.*

2.5 Die Borel'sche σ-Algebra

Im Folgenden sei, sofern nichts anderes gesagt wird, $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl.

Als zu Grunde liegende Menge haben wir häufig $\Omega = \mathbb{R}^n$ und gerade auf dieser Menge wissen wir, dass wir keine Volumenfunktion für alle Teilmengen, d.h. für alle Elemente der Potenzmenge definieren können. Im Folgenden lernen wir eine etwas kleinere σ-Algebra als die Potenzmenge kennen, auf der dies möglich sein wird. Sie ist benannt nach dem französischen Mathematiker *Émile Borel* (1871-1956).

Definition 2.24

Sei $\mathcal{S}_n$ die Menge der nach links halboffenen Quader des $\mathbb{R}^n$, d.h.

$$\mathcal{S}_n = \left\{ \prod_{k=1}^{n} (a_k, b_k] \subseteq \mathbb{R}^n \;\middle|\; -\infty \leq a_k \leq b_k \leq \infty, k \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Dann heißt $\mathcal{B}^n := \sigma(\mathcal{S}_n)$ die *Borel'sche σ-Algebra* des $\mathbb{R}^n$.

Notation

Statt $\mathcal{B}^1$ schreiben wir auch kurz $\mathcal{B}$. Analog zur Schreibweise $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ für die Potenzmenge ist auch die Schreibweise $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ für die Borel'sche σ-Algebra üblich.

Bemerkung 2.25. *Sobald die σ-Algebra bekannt ist, also keine Verwechslung möglich ist, spricht man im Falle $A \in \mathcal{A}$ auch schlicht von einer* messbaren Menge. *Ist $\Omega = \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ die Borel'sche σ-Algebra, so heißt $A \in \mathcal{A}$ eine* Borel-messbare Menge.

Es ist klar, dass damit automatisch alle Quader, deren Seiten nach links halboffenen Intervalle sind, Borel-messbar sind. Wie sieht es jedoch mit offenen, abgeschlossenen oder nach rechts halboffenen Intervallen als Seiten aus?

In der Literatur wird die Borel-σ-Algebra auch als die σ-Algebra eingeführt, welche durch die offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$ erzeugt wird. Um mit dieser Definition arbeiten zu können, wiederholen wir kurz das Wichtigste zu offenen und abgeschlossenen Mengen im $\mathbb{R}^n$.

2.5.1 Exkurs: Offene und abgeschlossene Mengen

Dieser Abschnitt folgt Kapitel 1 aus [For13].

Im $\mathbb{R}^1$ kennen wir offene und abgeschlossene Intervalle (mit $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$):

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \quad \text{alternativ auch }]a, b[\text{ geschrieben, und}$$
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

Bemerkung 2.26 (Vorüberlegung)**.** *Hierbei fallen zwei Spezialfälle auf: Zunächst einmal ist für eine endliche Zahl $a \in \mathbb{R}$ das offene Intervall $(a, a) = \emptyset$, d.h. die leere Menge wäre demnach offen. Zum anderen gilt für den Spezialfall $a = -\infty$ und $b = +\infty$, dass scheinbar $(-\infty, \infty)$ offen, aber $[-\infty, \infty]$ abgeschlossen ist. Was ist dann mit $\mathbb{R}$ selbst?*

Schon anhand der Vorüberlegung sehen wir, dass das bloße Beschränken auf Intervalle nicht zufriedenstellend ist. Zudem müssen wir ein Konzept finden, welches sich auf den $\mathbb{R}^n$ erweitern lässt. Dazu führen wir zunächst den Begriff einer *Norm* ein.

Definition 2.27

Sei $V = \mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Eine nichtnegative reellwertige Funktion $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ heißt *Norm* auf V, falls sie folgende Eigenschaften besitzt:

1. $\|v\| \geq 0$ für alle $v \in V$ und $\|v\| = 0 \iff v = 0$. (Positive Definitheit)
2. $\|a \cdot v\| = |a| \cdot \|v\|$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und $v \in V$ (absolute Homogenität).
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$ (Dreiecksungleichung).

Bemerkung 2.28. *Diese Definition gilt auch für beliebige reelle oder komplexe Vektorräume. Da dies jedoch zu weit führen würde, beschränken wir uns hier auf den $\mathbb{R}^n$ als reellen Vektorraum.*

Beispiel 2.29. *Beispiele für Normen auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$ sind (mit $v = (v_1, \dots, v_n)$):*

$$\|v\|_\infty := \max\{|v_1|, \dots, |v_n|\}, \quad \|v\|_2 := \sqrt{v_1^2 + \dots v_n^2}, \quad \|v\|_1 := |v_1| + \dots + |v_n|.$$

Definition 2.30: offene Kugel und Umgebung

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$. Seien zudem $v \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$. Dann heißt

$$B_r(v) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|v - x\| < r\}$$

die *offene Kugel* mit Mittelpunkt v und Radius r bezüglich $\|\cdot\|$. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Umgebung eines Punktes* $x \in \mathbb{R}^n$, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $B_\varepsilon(x) \subseteq M$ ist.

Definition 2.31: offene Menge

Eine Teilmenge M des $\mathbb{R}^n$ heißt *offen* bezüglich $\|\cdot\|$, wenn zu jedem $x \in M$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $B_\varepsilon(x) \subseteq M$ ist.

Bemerkung 2.32. *Man kann auch sagen: Eine Menge ist offen, wenn sie Umgebung eines jeden ihrer Punkte ist.*

Beispiel 2.33. *Für $a < b$ ist das offene Intervall $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ in der Tat offen, denn für jeden Punkt $x \in (a, b)$ gilt*

$$B_\varepsilon(x) \subseteq (a, b)$$

mit der Festlegung $\varepsilon := \min\{|a - x|, |b - x|\}$.

Lemma 2.34

Bezüglich einer beliebigen Norm $\|\cdot\|$ auf dem $\mathbb{R}^n$ gelten folgende Aussagen:

1. $\mathbb{R}^n$ und $\emptyset$ sind offene Mengen im $\mathbb{R}^n$.
2. Sind $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Mengen, so ist auch $A_1 \cap A_2$ offen.
3. Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie offener Mengen im $\mathbb{R}^n$. Dann ist auch deren Vereinigung $\bigcup_{i \in I} A_i$ offen.

Beweis.

1. Zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ und für jedes $\varepsilon > 0$ ist $B_\varepsilon(x) \subseteq \mathbb{R}^n$. Für die leere Menge gibt es kein $x \in \emptyset$, für welches eine offene Umgebung existieren müsste, daher ist diese Bedingung auch erfüllt.

2. Sei $x \in A_1 \cap A_2$. Da A_1 und A_2 offen sind, existieren $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ derart, dass

$$B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A_1 \quad \text{und} \quad B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq A_2$$

gilt. Für $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ gilt dann $B_\varepsilon(x) \subseteq A_1 \cap A_2$, was beweist, dass $A_1 \cap A_2$ offen ist.

3. Ist $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, so existiert (mindestens) ein Index $j \in I$, für den $x \in A_j$ erfüllt ist. Da A_j offen ist, existiert $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(x) \subseteq A_j$, also insbesondere $B_\varepsilon(x) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ ist.

□

Definition 2.35

Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *abgeschlossen* bezüglich $\|\cdot\|$ genau dann, wenn ihr Komplement $M^c = \mathbb{R}^n \setminus M$ offen ist.

Bemerkung 2.36. *Die Mengen $\mathbb{R}^n = \emptyset^c$ und $\emptyset = (\mathbb{R}^n)^c$ sind nach Teil 1 von Lemma 2.34 offen und nach dieser Definition auch abgeschlossen. Beide Mengen sind also tatsächlich sowohl offen als auch abgeschlossen als Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.*

Es gibt selbstverständlich Mengen, die weder offen noch abgeschlossen sind – zum Beispiel halboffene Intervalle in $\mathbb{R}$ (bezüglich $|\cdot|$ als Norm). Sehen wir uns das exemplarisch anhand von $(0, 1]$ an.

Beispiel 2.37. *Sei $A := (0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ das nach links halboffene Intervall. A ist nicht offen, da zu $x = 1$ keine offene Kugel existiert, welche x enthält und ganz in A enthalten ist.*

A ist jedoch auch nicht abgeschlossen, da $A^c = (-\infty, 0] \cup (1, \infty)$ nicht offen ist. Das liegt wiederum daran, dass zu $y = 0$ keine offene Kugel existiert, welche y enthält und ganz in A^c enthalten ist.

Bemerkung 2.38. *Man kann die Begriffe* offen *und* abgeschlossen *auch bezüglich Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ verwenden. Das hat insbesondere einen Einfluss auf die Komplementbildung. Für unsere Zwecke soll die obige Darstellung der Begriffe genügen.*

Eine abschließende Bemerkung zu den Normen: Man kann zeigen, dass alle Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind, d.h. wenn $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|^*$ zwei Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ sind, so existieren Konstanten $c, C > 0$, so dass

$$c\,\|x\| \leq \|x\|^* \leq C\,\|x\|\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

gilt. Das impliziert, dass Mengen, die offen sind bezüglich der einen Norm, automatisch auch offen sind bezüglich der anderen Norm. Folglich können wir im $\mathbb{R}^n$ von offenen und abgeschlossenen Mengen sprechen ohne die Norm nennen zu müssen. In allgemeinen (insb. unendlich-dimensionalen) Vektorräumen ist das nicht der Fall!

2.5.2 Weitere Erzeuger der Borel-σ-Algebra

Sehen wir uns für den Spezialfall $n = 1$ an, welche uns bekannten Mengen Borel-Mengen sind.

Satz 2.39

Sei $\Omega = \mathbb{R}$. Folgende Mengen sind Borel-Mengen, d.h. sie sind enthalten in $\mathcal{B}$:

(i) alle einpunktigen Mengen $\{x\}$ mit $x \in \mathbb{R}$;

(ii) alle höchstens abzählbaren Mengen;

(iii) alle (abgeschlossenen/offenen/halboffenen) (endlichen/unendlichen) Intervalle;

(iv) alle offenen und abgeschlossenen Mengen.

Bemerkung 2.40. *Die Aussagen sind teilweise redundant: Die höchstens abzählbaren Mengen beinhalten die einpunktigen Mengen und offene und abgeschlossene Mengen beinhalten die offenen und abgeschlossenen Intervalle. Um den Beweis jedoch besser strukturieren zu können, wählen wir diese Darstellung.*

Beweis.

(i) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (x - \tfrac{1}{n}, x] \in \mathcal{B}.$$

(ii) Jede höchstens abzählbare Menge ist der Definition nach die höchstens abzählbare Vereinigung einelementiger Mengen. Da diese nach (i) Borel-Mengen sind, gilt das auch für deren abzählbare Vereinigung.

(iii) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $-\infty \le a \le b \le \infty$. Dann gilt beispielsweise

$$\begin{aligned}(a, b) &= (a, b] \cap \{b\}^c \in \mathcal{B}\\ [a, b] &= (a, b] \cup \{a\} \in \mathcal{B}\\ (a, \infty) &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a, a + n] \in \mathcal{B}.\end{aligned}$$

(iv) Offene Mengen sind stets darstellbar als abzählbare Vereinigung offener Mengen und als solche wegen (iii) Borel-Mengen. Jede abgeschlossene Menge ist das Komplement einer offenen Menge, und somit ebenfalls eine Borel-Menge.

□

Verallgemeinern wir diese Methode, so können wir zeigen, dass u.a. auch die offenen Quader ein Erzeuger von $\mathcal{B}^n$ ist. Für die übrigen Arten von Quadern geht der Beweis analog.

Lemma 2.41

Auch das Mengensystem

$$\mathcal{S}_n^o := \left\{ \prod_{k=1}^{n} (a_k, b_k) \subseteq \mathbb{R}^n \;\middle|\; -\infty \le a_k \le b_k \le \infty, k \in \{1, \ldots, n\} \right\}$$

ist ein Erzeuger von $\mathcal{B}^n$.

Beweis. Überlegen wir uns zunächst im 1-dimensionalen Fall, dass $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{S}_1) = \sigma(\mathcal{S}_1^o)$ ist. Dazu seien $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$. Dann gilt

$$(a,b) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \left(a, b - \tfrac{1}{j}\right] \quad \text{und} \quad (a,b] = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \left(a, b + \tfrac{1}{j}\right). \tag{2.5.1}$$

Folglich ist sowohl $\mathcal{S}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{S}_1^o)$ als auch $\mathcal{S}_1^o \subseteq \sigma(\mathcal{S}_1)$. Mit der Aussage von Aufgabe 5 folgt die Gleichheit der σ-Algebren, d.h. $\sigma(\mathcal{S}_1) = \sigma(\mathcal{S}_1^o)$.

Dieses Ergebnis können wir wie folgt auf den $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern indem wir das Analogon zu (2.5.1) formulieren. Dazu seien $-\infty \leq a_k \leq b_k \leq \infty$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$.

$$\prod_{k=1}^n (a_k, b_k) = \prod_{k=1}^n \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \left(a_k, b_k - \tfrac{1}{j}\right] \quad \text{und} \quad \prod_{k=1}^n (a_k, b_k] = \prod_{k=1}^n \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \left(a_k, b_k + \tfrac{1}{j}\right). \tag{2.5.2}$$

Hieraus folgt mit der gleichen Begründung wie im 1-dimensionalen Fall $\sigma(\mathcal{S}_n) = \sigma(\mathcal{S}_n^o)$, d.h. $\mathcal{S}_n^o$ ist (ebenso wie $\mathcal{S}_n$) ein Erzeuger von $\mathcal{B}^n$. □

Folgende Mengensysteme sind Erzeuger der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}^n$:

- $\mathcal{S}_n = \{\prod_{k=1}^n (a_k, b_k] \subseteq \mathbb{R}^n \mid -\infty \leq a_k \leq b_k \leq \infty, k \in \{1, \ldots, n\}\}$
- $\mathcal{S}_n^o := \{\prod_{k=1}^n (a_k, b_k) \subseteq \mathbb{R}^n \mid -\infty \leq a_k \leq b_k \leq \infty, k \in \{1, \ldots, n\}\}$
- $\mathcal{S}_n^a := \{\prod_{k=1}^n [a_k, b_k] \subseteq \mathbb{R}^n \mid -\infty \leq a_k \leq b_k \leq \infty, k \in \{1, \ldots, n\}\}$
- das System der offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$
- das System der abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$

Die einelementigen Mengen sind zwar in der Borel-σ-Algebra enthalten, bilden jedoch keinen Erzeuger derselbigen. Sehen wir uns an, welche σ-Algebra durch diese Mengen erzeugt wird.

Lemma 2.42

Sei $\mathcal{M} := \{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ die Menge der einelementigen Mengen des $\mathbb{R}^n$. Zudem Sei $\mathcal{A}$ die aus Beispiel 2.6 bekannte σ-Algebra für $\Omega = \mathbb{R}^n$, d.h.

$$\mathcal{A} := \{A \subseteq \mathbb{R}^n \mid A \text{ oder } A^c \text{ ist höchstens abzählbar unendlich}\}.$$

Dann gilt $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{M})$.

Beweis. Offensichtlich gilt $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$. Hieraus folgt sofort, da $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist, dass $\sigma(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{A}$ ist. Zeigen wir noch die andere Inklusion um insgesamt auf die Gleichheit der Mengensysteme schließen zu können.

Sei $A \in \mathcal{A}$. Ist A selbst abzählbar, so ist A eine höchstens abzählbare Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{M}$ und liegt somit in $\sigma(\mathcal{M})$. Ist A nicht abzählbar, so ist A^c abzählbar, also ist $A^c \in \sigma(\mathcal{M})$. Da $\sigma(\mathcal{M})$ als σ-Algebra stabil bezüglich der Bildung von Komplementen ist, impliziert das wiederum $A \in \sigma(\mathcal{M})$. Damit haben wir insgesamt $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{M})$ gezeigt. □

Da $\mathcal{A}$ aus dem Lemma nicht alle Borel-Mengen des $\mathbb{R}^n$ enthält, folgt automatisch aus der Aussage des Lemmas, dass die einelementigen Mengen keinen Erzeuger der Borel-σ-Algebra bilden.

Zum Abschluss dieses Abschnitt ist noch zu erwähnen, dass man auch die Borel'sche σ-Algebra auf einer Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ definieren kann:

Notation

Ist $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ eine echte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, so setzen wir

$$\mathcal{B}(A) := A \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \{ A \cap B \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \} . \tag{2.5.3}$$

2.6 σ-Algebren und Abbildungen

2.6.1 Urbilder von Funktionen

Im Folgenden sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung von einer nichtleeren Menge $X \neq \emptyset$ in einen messbaren Raum $(Y, \mathcal{A})$. Mit $f^{-1}(A)$ bezeichnen wir das *Urbild* einer Menge $A \in \mathcal{A}$ unter f, d.h.

$$f^{-1}(A) = \{ x \in X \mid f(x) \in A \} .$$

Während eine Umkehrfunktion nur für bijektive Abbildungen existiert, existiert das Urbild immer. Um diesen Unterschied zu verdeutlichen, erinnern wir uns an ein paar Begriffe:

Definition 2.43

Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt

- *injektiv*, falls aus $f(x) = f(x')$ für Werte $x, x' \in X$ stets $x = x'$ folgt;
- *surjektiv*, falls zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert, für welches $f(x) = y$ gilt;
- *bijektiv*, falls f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Beispiel 2.44. *Sehen wir uns einige Beispiele an, welche die Bedeutung der Wahl von Definitions- und Wertebereich unterstreichen.*

$f(x)$	X	Y	*injektiv*	*surjektiv*	*bijektiv*
$2x+3$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	*ja*		
x^2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$			
x^2	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}$			
x^2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+$			
x^2	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+$			

Kommen wir nun zurück zum Urbild: Welche Auswirkung hat die jeweilige Eigenschaft auf das Urbild? In der Tabelle verwenden wir der Kürze halber die Notation $|A|$ für die Anzahl der Elemente der Menge A.

für jedes $y \in Y$ ist $\lvert f^{-1}(y) \rvert \geq 1$	
für jedes $y \in Y$ ist $\lvert f^{-1}(y) \rvert \leq 1$	
für jedes $y \in Y$ ist $\lvert f^{-1}(y) \rvert = 1$	

Der Vollständigkeit halber wiederholen wir an dieser Stelle kurz einige nützliche Eigenschaften von Urbildern.

Lemma 2.45

Sei $f\colon X \to Y$ eine beliebige Abbildung. Dann gilt für je zwei Mengen $A, B \subseteq Y$:

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \tag{2.6.1}$$
$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B), \tag{2.6.2}$$
$$(f^{-1}(A))^c = f^{-1}(A^c), \tag{2.6.3}$$
$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B). \tag{2.6.4}$$

Beweis. Exemplarisch zeigen wir die erste Eigenschaft (2.6.1):

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cup B) &\iff f(x) \in A \cup B \\ &\iff (f(x) \in A) \vee (f(x) \in B) \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \vee x \in f^{-1}(B) \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B). \end{aligned}$$

□

Sehen wir uns zum Abschluss noch die Urbilder der Verknüpfung von Abbildungen an. Sind $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Abbildungen, so definieren wir $g \circ f\colon X \to Z$ folgendermaßen:

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)), \quad x \in X.$$

Man spricht von der *Verknüpfung*, *Verkettung* oder *Komposition* zweier Abbildungen.

Lemma 2.46

Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Abbildungen und sei $h := g \circ f$ deren Verknüpfung. Dann gilt für beliebige Mengen $A \subseteq Z$

$$h^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A)).$$

Beweis. Sei $A \subseteq Z$ eine beliebige Teilmenge. Dann gilt

$$\begin{aligned} x \in h^{-1}(A) &\iff h(x) \in A \\ &\iff (g \circ f)(x) = g(f(x)) \in A \\ &\iff f(x) \in g^{-1}(A) \\ &\iff x \in f^{-1}(g^{-1}(A)). \end{aligned}$$

□

2.6.2 σ-Algebra der Urbilder

Satz 2.47

Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung von einer nichtleeren Menge $X \neq \emptyset$ in einen messbaren Raum $(Y, \mathcal{A}')$. Dann ist

$$\mathcal{A}_f := f^{-1}(\mathcal{A}') = \{ f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}' \}$$

eine σ-Algebra, genannt die *von f in Y erzeugte σ-Algebra*.

Beweis. Übungsaufgabe. Unter Verwendung der Eigenschaften von Urbildern müssen die Eigenschaften einer σ-Algebra überprüft werden. □

Beispiel 2.48 (Indikatorfunktion)**.** *Sei $A \subseteq \Omega$. Dann ist die zugehörige* Indikatorfunktion *definiert durch*

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in A^c. \end{cases}$$

Die Indikatorfunktion ist also eine Abbildung $\mathbb{1}_A\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Da die Abbildung nur die Werte 0 und 1 annehmen kann, können wir leicht alle Elemente von $\mathcal{A}_{\mathbb{1}_A}$ finden. Um die Notation zu vereinfachen, setzen wir $f := \mathbb{1}_A$.

- $f^{-1}(x) = \emptyset$ *für jedes beliebige* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$;
- $f^{-1}(1) = A$;
- $f^{-1}(0) = A^c$;
- $f^{-1}(\{0, 1\}) = \Omega$.

In der Tat ist $\mathcal{A}_f = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$ die von der Indikatorfunktion $\mathbb{1}_A$ erzeugte σ-Algebra.

Definition 2.49

Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{A}')$ messbare Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *$\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-messbar* (oder kurz *messbar*), falls Urbilder messbarer Mengen wieder messbar sind, d.h. falls Folgendes gilt:

$$f^{-1}(A') \in \mathcal{A}, \quad \forall A' \in \mathcal{A}'.$$

Beispiel 2.50. *Sehen wir uns nochmals die Indikatorfunktion aus Beispiel 2.48 an. Seien also $X = \Omega$ und $(Y, \mathcal{A}') = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, wobei $\mathcal{B}$ die Borel-σ-Algebra ist. Überlegen wir uns für verschiedene σ-Algebren auf Ω, ob die Indikator-Funktion messbar ist. Dazu seien $A, B \subseteq \Omega$ und $f = \mathbb{1}_A$. Unterscheiden Sie die Fälle $A = \emptyset$, $A = \Omega$ und $A \notin \{\emptyset, \Omega\}$.*

$\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$	
$\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$	
$\mathcal{A} = \sigma(\{A, B\})$	

f ist genau dann $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar, wenn $\mathcal{A}_f \subseteq \mathcal{A}$ ist.

Wir werden später noch mehr über messbare Funktionen lernen. Zum Abschluss sehen wir noch ein Resultat über das Zusammenspiel zwischen Urbild und erzeugter σ-Algebra an.

Satz 2.51

Seien X und Y nichtleere Mengen und sei $f: X \to Y$ eine Abbildung von X nach Y. Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ ein beliebiges Mengensystem aus Y. Dann gilt

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{M})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{M})).$$

Beweis. Wir beweisen die Behauptung indem wir nachweisen, dass jede der Mengen in der jeweils anderen enthalten ist.

„$\subseteq$“ Es gilt $\mathcal{M} \subseteq \sigma(\mathcal{M})$ für jedes beliebige Mengensystem $\mathcal{M}$. Folglich gilt (wegen der Monotonie der Urbilder) $f^{-1}(\mathcal{M}) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{M}))$. Da nach Satz 2.47 $f^{-1}(\sigma(\mathcal{M}))$ eine σ-Algebra ist, welche $f^{-1}(\mathcal{M})$ enthält und andererseits $\sigma(f^{-1}(\mathcal{M}))$ die kleinste derartige σ-Algebra ist, folgt $\sigma(f^{-1}(\mathcal{M})) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{M}))$.

„$\supseteq$“ Sei $\mathcal{C} := \left\{ C \subseteq Y \,\middle|\, f^{-1}(C) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{M})) \right\}$. Das Mengensystem $\mathcal{C}$ enthält offensichtlich $\mathcal{M}$. Zudem handelt es sich bei $\mathcal{C}$ um eine σ-Algebra (Übungsaufgabe). Folglich ist (wegen der Minimalität der erzeugten σ-Algebra) $\sigma(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{C}$. Hieraus folgt nun unter Verwendung der Monotonie des Urbilds und der Definition von $\mathcal{C}$

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{M})) \subseteq f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathcal{M})).$$

□

2.7 Aufgaben

Aufgabe 1. *Welche der folgenden Aussagen ist wahr für alle Teilmengen $A, B, C \subseteq \Omega$ einer beliebigen Menge Ω?*

a) $A \setminus B = A \cap B^c$

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

c) $(A \cap B \cap C)^c = C^c \cup B^c \cup A^c$

d) $A \cap B \subseteq A$

e) $A \cup B \subseteq B$

f) $A \cup A = A$

g) $A \cap (A \cup B) = A$

Aufgabe 2. *Das folgende Resultat ist bekannt als* Einschluss-Ausschluss-Prinzip *(inclusion–exclusion principle) oder* Formel von Sylvester*:*

Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine nichtleere endliche Menge und seien $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \subseteq \Omega$ Teilmengen von Ω für $n \in \mathbb{N}$. Für jede (endliche) Menge $A \subseteq \Omega$ sei $|A|$ die Kardinalität der Menge A. Dann gilt:

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |A_k| - \sum_{1\le j<k\le n} |A_j \cap A_k| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1} \left|\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right| . \tag{2.7.1}$$

a) Schreiben Sie die Aussage der Formel für $n \in \{1, 2, 3\}$ auf. Verifizieren Sie die Formel (beispielweise mit Venn-Diagrammen) in diesen Spezialfällen.

b) *Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen ≤ 100, welche durch 2, 3 or 5 teilbar sind. (Unter* oder *verstehen wir das nicht-ausschließende* und/oder.*) Berechnen Sie $|A|$ mit Hilfe von a).*

Aufgabe 3. *Zeigen Sie am Beispiel des Grundraums $\Omega = \{1, 2, 3\}$, dass die Vereinigung von σ-Algebren im Allgemeinen keine σ-Algebra ist.*

Aufgabe 4. *Sehen Sie sich nochmal die Definition der erzeugten σ-Algebra (Satz 2.11 und Definition 2.12) an.*

a) *Beweisen Sie Lemma 2.14.*
b) *Beweisen Sie Lemma 2.15.*
c) *Beweisen Sie Lemma 2.16.*

Aufgabe 5. *Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ zwei Mengensysteme, für die sowohl $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{B})$ als auch $\mathcal{B} \subseteq \sigma(\mathcal{A})$ gilt. Zeigen Sie, dass dann $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{B})$ gilt.*

Hinweis: *Die Gleichheit zweier Mengen zeigt man, indem man nachweist, dass jede Menge in der anderen enthalten ist, siehe Definition A.23.*

Aufgabe 6. *Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine Semialgebra (Vgl. Definition 2.18), für die folgende Eigenschaft gilt:*

$$A \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad A^c \in \mathcal{A}. \tag{2.7.2}$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine Algebra ist.

Aufgabe 7. *Entscheiden Sie für jedes der folgenden Mengensysteme, ob es sich um eine Semialgebra, Algebra oder σ-Algebra handelt in Bezug zur gegebenen Menge Ω oder ob es keines davon ist.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1 &= \{\, (a, b] \mid -\infty \leq a \leq b \leq \infty \} \subseteq \mathcal{P}((-\infty, \infty])\\
\mathcal{M}_2 &= \{\, (a, b) \mid -\infty \leq a \leq b \leq \infty \} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})\\
\mathcal{M}_3 &= \{\, A \subseteq \mathbb{N} \mid \ A \text{ endlich ooder } A^c \text{ endlich} \} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})\\
\mathcal{M}_4 &= \{\, A \subseteq \mathbb{N} \mid \ A \text{ abzählbar oder } A^c \text{ abzählbar} \} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})
\end{aligned}$$

Aufgabe 8. *Wir setzen als bekannt voraus, dass der Betrag $|\cdot|$ eine Norm auf $\mathbb{R}$ definiert, d.h. die drei Eigenschaften aus 2.27 erfüllt.*

a) *Zeigen Sie, dass die Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$ aus Beispiel 2.29 tatsächlich eine Norm ist.*
b) *Überprüfen Sie, ob durch $\|v\| := \min\{|v_1|, \ldots, |v_n|\}$ ebenfalls eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ definiert wird.*

Aufgabe 9. *Im $\mathbb{R}^2$ sei $B_1 := \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1 \right\}$. Zeigen Sie, dass B_1 offen ist im $\mathbb{R}^2$.*

Hinweis: *Überlegen Sie sich anhand einer Skizze, wie ε zu einem Punkt $x \in B_1$ gewählt werden muss um eine geeignete Umgebung von x zu finden.*

Aufgabe 10. *Zeigen Sie, das $\mathcal{B}(A)$ aus* (2.5.3) *tatsächlich eine σ-Algebra ist.*

Aufgabe 11. *Zeigen Sie die noch nicht bewiesenen Eigenschaften aus Lemma 2.45, d.h.* (2.6.2), (2.6.3) *und* (2.6.4).

Aufgabe 12. *Beweisen Sie Satz 2.47.*

Aufgabe 13. *Zeigen Sie, dass das Mengensystem $\mathcal{C} := \left\{ C \subseteq Y \;\middle|\; f^{-1}(C) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{M})) \right\}$ aus dem Beweis von Satz 2.51 eine σ-Algebra ist.*

Aufgabe 14. *Seien $A, B \subseteq \Omega$ Teilmengen einer nichtleeren Menge Ω. Zeigen Sie, dass folgende Zusammenhänge zu den Indikatorfunktionen bestehen:*

a) $A \subseteq B \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$*;*

b) $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$*;*

c) $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\cup B} + \mathbb{1}_{A\cap B}$*;*

d) $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$*.*

2.8 English terminology

messbarer Raum	measurable space
Vereinigung von Mengen	union of sets
Schnittmenge	intersecting set
Komplement	complement
Kommutativgesetz	commutative law
Assoziativgesetz	associative law
Distributivgesetz	distributive law
σ-Algebra	σ-algebra / σ-field*
erzeugte σ-Algebra	generated σ-algebra
Halbring	semiring
nichtleer / nicht leer	nonempty
Unter-σ-Algebra	sub-σ-algebra
Erzeuger	generator
abgeschlossen unter ... / ...-stabil	closed under ... (operation)
offene Menge	open set
abgeschlossene Menge	closed set
positiv definit	positive definite
absolut homogen	absolutely homogeneous
Dreiecksungleichung	triangle inequality
offene Kugel	open ball
Umgebung	neighborhood
Mittelpunkt	center
Teilmenge	subset
halboffen	half-open
Urbild	preimage
Verkettung / Komposition	composition
Indikatorfunktion	indicator function

* Careful! Field can be used to mean *Körper* as well. It is due to those two terms for the same object that σ-algebras are sometimes given the letter $\mathcal{A}$ and sometimes $\mathcal{F}$.

Kapitel 3

Maße

Ziele

- ☐ Definition von Mengenfunktionen, speziell von Maßen, kennen
- ☐ Eigenschaften von Maßen und anderen Mengenfunktionen kennen
- ☐ u.a. das diskrete und das Lebesgue-Maß kennen
- ☐ die Konstruktion von Maßen kennen

3.1 Definition von Maßen

Definition 3.1: Mengenfunktion

Sei $\Omega \neq \emptyset$ und sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengensystem. Eine Abbildung $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$, die jeder Menge des Mengensystems eine nichtnegative reelle Zahl, möglicherweise $+\infty$, zuordnet, heißt *Mengenfunktion*.

Im Folgenden benennen wir eine Reihe von Eigenschaften, die Mengenfunktionen besitzen können. Dafür sei bis auf Weiteres $\Omega \neq \emptyset$ und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengensystem.

Definition 3.2: (σ-)endlich

Eine Mengenfunktion $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ heißt

- *endlich*, falls $\Omega \in \mathcal{A}$ ist und $\mu(\Omega) < \infty$ gilt;
- *σ-endlich*, falls Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ existieren, so dass $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \Omega$ ist und $\mu(A_k) < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Beispiel 3.3. *Betrachten wir $\Omega = \mathbb{R}$ und das Mengensystem der offenen Intervalle, d.h. $\mathcal{A} = \{(a,b) \subseteq \mathbb{R} \mid -\infty \le a \le b \le \infty\}$. Definieren wir eine Mengenfunktion via*

$$\mu((a,b)) := b - a, \qquad -\infty \le a \le b \le \infty.$$

Ist μ endlich, σ-endlich oder nichts von beidem?

<u>Antwort:</u>

Definition 3.4: (σ-)additiv

Eine Mengenfunktion $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ heißt

- *(endlich) additiv*, falls für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede Wahl paarweise disjunkter Mengen $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ mit $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A}$ stets Folgendes gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k);$$

- *σ-additiv*, falls für jede höchstens abzählbare Folge paarweise disjunkter Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ mit $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$ stets Folgendes gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) = \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k).$$

Bemerkung 3.5. *Nehmen wir an, dass μ eine additive Mengenfunktion auf einem beliebigen Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ist und dass $\emptyset \in \mathcal{A}$ ist. Können wir damit $\mu(\emptyset)$ bereits bestimmen?*
Antwort: Setzen wir $a := \mu(\emptyset)$ und $A_1 := A_2 := \emptyset$. Dann sind $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ disjunkt. Folglich gilt

$$a = \mu(\emptyset) = \mu(A_1 \cup A_2) \overset{\text{additiv}}{=} \mu(A_1) + \mu(A_2) = 2a.$$

Die Zahlen aus $[0,\infty]$, die $a = 2a$ erfüllen, sind 0 und $+\infty$. Gibt es neben der leeren Menge noch mindestens eine weitere Menge $A^* \neq \emptyset$ in $\mathcal{A}$, dann gilt zudem wegen $A^* \cap \emptyset = \emptyset$

$$\mu(A^*) = \mu(A^* \,\dot\cup\, \emptyset) = \mu(A^*) + \mu(\emptyset) = \mu(A^*) + a.$$

Somit muss entweder $\mu(\emptyset) = 0$ sein oder aber es muss $\mu(A) = \infty$ für alle $A \in \mathcal{A}$ gelten.

Sehen wir uns nun ein weiteres Beispiel für eine Mengenfunktion an.

Beispiel 3.6. *Seien $\Omega = \mathbb{N}$ und $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Für jede Menge $A \in \mathcal{A}$ sei*

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & |A| < \infty, \\ \infty, & |A| = \infty. \end{cases}$$

Es gilt also beispielsweise (mit der Notation $2\mathbb{N}$ für die geraden natürlichen Zahlen):

- $\mu(\{1,2,3\}) =$
- $\mu(\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 \leq 100\}) =$
- $\mu(\{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}\colon n = k^2\}) =$
- $\mu(2\mathbb{N}) =$

Ist diese Mengenfunktion (σ-)additiv?
Antwort:

μ **ist additiv:** *Gegeben seien endlich viele paarweise disjunkte Mengen $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Es gibt nun zwei Möglichkeiten.*

i) Sind alle Mengen endlich, so ist auch $\bigcup_{k=1}^n A_k$ als endliche Vereinigung endlicher Mengen endlich. In diesem Fall ist

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = 0 = \sum_{k=1}^n \mu(A_k).$$

ii) Ist mindestens eine der Mengen unendlich, so ist auch die Vereinigung von Mengen, die diese enthält unendlich. Folglich gilt

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \infty = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

μ **ist nicht σ-additiv:** *Um das zu sehen, betrachten wir die Folge von Mengen $B_k = \{k\} \in \mathcal{A}$ für $k \in \mathbb{N}$. Diese Mengen sind paarweise disjunkt und es gilt $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k = \mathbb{N}$, d.h.*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \mu(\mathbb{N}) = \infty \neq 0 = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k).$$

Definition 3.7: Inhalt, Prämaß

Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengensystem, welches die leere Menge enthält. Eine Mengenfunktion $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ heißt *Inhalt*, falls gilt:

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. Sind $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ endlich viele paarweise disjunkte Mengen und ist $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$, so gilt
$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

Ein σ-additiver Inhalt heißt auch *Prämaß*.

Bemerkung 3.8. *Ein Inhalt ist also eine endlich additive Mengenfunktion, von der zusätzlich gefordert wird, dass die leere Menge den Wert Null erhält. Während die Additivität eine Eigenschaft ist, die keine Anforderungen an das Mengensystem stellt, kann ein Inhalt also nur auf solchen Mengensystemen definiert werden, die die leere Menge enthalten.*

Die Eigenschaft der σ-Additivität, die aus einem Inhalt ein Prämaß macht, ist natürlich gerade dann sinnvoll, wenn tatsächlich auch abzählbare Vereinigungen von Mengen des Mengensystems wieder darin liegen. Das führt uns zum Begriff eines Maßes auf einer σ-Algebra.

Definition 3.9: Maß, Maßraum

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, d.h. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ist eine σ-Algebra auf einer nichtleeren Menge Ω. Eine σ-additive Mengenfunktion $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$, welche zusätzlich die Bedingung $\mu(\emptyset) = 0$ erfüllt, heißt *Maß*. Das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heißt dann *Maßraum*.

Bemerkung 3.10. *Alternativ kann man ein Maß auch definieren als eine Mengenfunktion $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. $\mu(A) \geq 0$ *für alle* $A \in \mathcal{A}$;
3. *für jede Folge paarweise disjunkter Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ gilt*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Beispiel 3.11 (Zählmaß)**.** *Seien* $\Omega = \mathbb{N}$*,* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *und* $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ *mit*

$$\mu(A) := \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_A(k) = \begin{cases} |A|, & |A| < \infty, \\ +\infty, & \textit{sonst}. \end{cases}$$

In diesem Fall ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein diskreter Maßraum. Man nennt* μ *das* Zählmaß.

Beispiel 3.12. *Sei* $(\Omega, \mathcal{A})$ *ein beliebiger messbarer Raum. Sei zudem* $x \in \Omega$ *ein beliebiges Element von* Ω*. Dann wird durch*

$$\delta_x\colon \mathcal{A} \to [0,\infty], \quad A \mapsto \delta_x(A) := \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in A^c \end{cases}$$

ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ *definiert.*

3.2 Eigenschaften von Maßen

In diesem Abschnitt wollen wir wichtige Eigenschaften von Maßen sammeln und beweisen.

Satz 3.13

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

1. Für Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq B$ gilt stets $\mu(A) \leq \mu(B)$.
2. Für Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq B$ gilt stets $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.
3. Sind $A, B \in \mathcal{A}$ Mengen mit $\mu(A \cap B) < \infty$, so gilt
$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$
4. Für jede Folge von Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ mit $A_k \subseteq A_{k+1}$ und $\mu(A_k) < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt die *Stetigkeit von unten*:
$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right).$$
5. Für jede Folge von Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ mit $A_k \supseteq A_{k+1}$ und $\mu(A_1) < \infty$ gilt die *Stetigkeit von oben*:
$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k\right).$$
6. Sind $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ endlich viele Mengen in $\mathcal{A}$, so gilt stets die *Subadditivität:*
$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$
7. Ist $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ eine (höchstens abzählbare) Folge von Mengen in $\mathcal{A}$, so gilt stets
$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k).$$

Notation

1. Gilt $A_k \subseteq A_{k+1}$ für eine Folge von Mengen, so nennt man $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine *aufsteigende Folge von Mengen*. Gilt $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$, so schreibt man in diesem Fall auch $A_k \uparrow A$.
2. Gilt $A_k \supseteq A_{k+1}$ für eine Folge von Mengen, so nennt man $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine *absteigende Folge von Mengen*. Gilt $A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$, so schreibt man in diesem Fall auch $A_k \downarrow A$.

Veranschaulichen wir uns anhand eines Beispiels, wofür die Stetigkeit von Maßen nützlich ist:

Beispiel 3.14. *Sei μ ein Maß auf der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, welches jedem abgeschlossenen Intervall $[a,b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ dessen Länge zuordnet, d.h. $\mu([a,b]) := b-a$. Was ist dann das Maß eines beliebigen offenen Intervalls, d.h. $\mu((a,b))$ für $a<b$?*

Antwort: Man kann ein offenes Intervall stets als Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener Intervalle darstellen:

$$(a,b) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \quad \text{für} \quad A_k =$$

Die Mengen A_k $(k\in\mathbb{N})$ bilden eine aufsteigende Folge von Mengen. Folglich gilt mit der Stetigkeit von unten:

$$\mu((a,b)) =$$

$$=$$

Bemerkung 3.15 (Vorbemerkung zum Beweis)**.** *Bei einem Beweis, der mehrere teilweise aufeinander aufbauende Eigenschaften zeigen soll, ist es wichtig, einen* Zirkelschluss *zu vermeiden. Einen Zirkelschluss kann man an folgenden offensichtlich falschen Aussagen demonstrieren:*

(1) Jede ungerade natürliche Zahl ist eine Primzahl.

(2) Ist $n\in\mathbb{N}$ derart, dass eine Zahl $k\in\mathbb{N}$ existiert, für die $n=2k-1$ gilt, so ist n eine Primzahl.

Falscher Beweis:

- *Sei $n\in\mathbb{N}$ von der Form $n=2k-1$ für ein $k\in\mathbb{N}$. Dann ist n eine ungerade, also nach (1) eine Primzahl.*
- *Sei n eine ungerade natürliche Zahl. Ungerade natürliche Zahlen sind gerade diejenigen Zahlen, die die Darstellungsform $n=2k-1$ für $k\in\mathbb{N}$ besitzen. Folglich erfüllt n die Anforderungen aus (2), ist also eine Primzahl.*

Beide Aussagen sind also äquivalent, aber leider falsch. Um diese Art Argumentation und hieraus folgende Fehler zu vermeiden, strukturiert man die Aussagen am besten so, dass man beim Beweisen höchstens vorangegangene Aussagen verwendet, jedoch nie noch nicht bewiesene spätere Aussagen.

Beweis von Satz 3.13.

1. Aus $A\subseteq B$ folgt, dass man die Menge B wie folgt in disjunkte Teilmengen zerlegen kann:

$$B = A \,\dot\cup\, (B\setminus A).$$

Nach Lemma 3.13 gilt damit

$$\mu(B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B\setminus A)}_{\geq 0} \geq \mu(A). \tag{3.2.1}$$

2. Aus (3.2.1) folgt direkt durch Umstellen die Behauptung.
3. Übungsaufgabe 4.
4. Sei $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ eine aufsteigende Folge von Mengen in $\mathcal{A}$. Um die σ-Additivität des Maßes ausnutzen zu können, müssen wir die Vereinigung $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}$ als Vereinigung disjunkter Mengen umschreiben. Dazu definieren wir
$$B_k := A_k \setminus A_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad A_0 := \emptyset.$$
Dann gilt $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k$ und die B_k sind paarweise disjunkt. Folglich gilt
$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) &\overset{(1)}{=} \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\right) \overset{(2)}{=} \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_k) \overset{(3)}{=} \sum_{k\in\mathbb{N}} (\mu(A_k) - \mu(A_{k-1}))\\ &\overset{(4)}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\mu(A_k) - \mu(A_{k-1})) \overset{(5)}{=} \lim_{n\to\infty} (\mu(A_n) - \mu(A_0))\\ &\overset{(6)}{=} \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).\end{aligned}$$
5. Gilt $A_k \supseteq A_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt zugleich $A_k^c \subseteq A_{k+1}^c$ (Übungsaufgabe). Setzen wir nun $C_k := A_1 \setminus A_k = A_1 \cap A_k^c$, so ist $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von Mengen mit $\mu(C_k) < \infty$. (Warum?) Durch Anwendung der Stetigkeit von unten auf $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ erhalten wir direkt
$$\lim_{k\to\infty} \mu(C_k) = \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k\right).$$
Zudem gilt nach 2.
$$\mu(C_k) = \mu(A_1 \setminus A_k) = \mu(A_1) - \mu(A_k)$$
und folglich
$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A_1 \setminus A_k)\right) = \mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k\right).$$
Die Kombination dieser Resultate liefert
$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) &= \mu(A_1) - \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k\right)\\ &= \mu(A_1) - \lim_{k\to\infty} \mu(C_k)\\ &= \mu(A_1) - \lim_{k\to\infty} (\mu(A_1) - \mu(A_k))\\ &= \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).\end{aligned}$$
6. Analog zu 1. besteht der Trick darin, die Vereinigung beliebiger Mengen als Vereinigung paarweise disjunkter Mengen umzuschreiben. Es ist
$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \,\dot\cup\, A_2 \setminus A_1 \,\dot\cup\, A_3 \setminus (A_1 \cup A_2) \,\dot\cup\, \dots \,\dot\cup\, A_n \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)$$
und folglich
$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) &= \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \mu(A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)) + \dots + \mu\left(A_n \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)\right)\\ &\le \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).\end{aligned}$$

7. Wir kombinieren nun die Stetigkeit von unten und die Subadditivität des Maßes. Seien dazu $D_n := \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ für $k \in \mathbb{N}$. Die Folge $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine aufsteigende Folge von Mengen mit
$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} D_k\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$
   - Falls ein Index $k^* \in \mathbb{N}$ existiert, für den $\mu(A_{k^*}) = \infty$ ist, so ist wegen $A_{k^*} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ automatisch auch $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \infty$. Zudem ist, da alle Maße nichtnegativ sind, $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \geq \mu(A_{k^*}) = \infty$, so dass die behauptete Gleichheit gilt.
   - Falls $\mu(A_k) < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, so erfüllt die Folge $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ alle Voraussetzungen für die Anwendung von 4. Folglich gilt
$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \overset{(1)}{=} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k\right) \overset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty} \mu(D_n) \overset{(3)}{=} \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$$
$$\overset{(4)}{\leq} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \overset{(5)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

□

3.3 Konstruktion von Maßen

Wir werden das Thema nicht in voller Tiefe darstellen können. Folgende Quellen eignen sich bei Bedarf zum weiteren Studium des Themas:

- Küchler [Kü16] – Abschnitte 3.1.2 und 3.2.3
- Brokate & Kersting [BK19] – Kapitel 7 und 11
- Henze [Hen19] – Kapitel 8
- Elstrodt [Els11] – Kapitel II Abschnitte §4 und §5

3.3.1 Äußere Maße

Definition 3.16

Sei $\Omega \neq \emptyset$. Eine Abbildung $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ heißt *äußeres Maß auf* Ω, falls gilt:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$;
2. aus $A \subseteq B \subseteq \Omega$ folgt stets $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (Monotonie);
3. für jede Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ gilt σ-Subadditivität:
$$\mu^*\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(A_k).$$

Im vorherigen Abschnitt hatten wir gesehen, dass jedes Maß die genannten Eigenschaften besitzt – die Bedingungen sind also schwächer als die Anforderungen an Maße. Dafür wird ein äußeres Maß direkt auf der Potenzmenge von Ω definiert und nicht auf einer Unter-σ-Algebra von $\mathcal{P}(\Omega)$.

Wir werden nun aus einem äußeren Maß ein Maß konstruieren. Dafür müssen wir zunächst eine geeignete σ-Algebra definieren und im Anschluss zeigen, dass das darauf eingeschränkte äußere Maß in der Tat ein Maß ist.

Definition 3.17

Sei μ^* ein äußeres Maß auf $\mathcal{P}(\Omega)$. Eine Teilmenge $A \subseteq \Omega$ heißt μ^*-messbar, falls für alle Teilmengen $B \subseteq \Omega$ folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\mu^*(B) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B). \tag{3.3.1}$$

Die Menge der bezüglich μ^* messbaren Teilmengen von Ω bezeichnen wir mit $\mathcal{A}_{\mu^*}$.

Gleichung (3.3.1) besagt, dass eine Menge $A \subseteq \Omega$ genau dann μ^*-messbar ist, wenn sie jede Teilmenge von Ω in zwei disjunkte Teilmengen zerlegt, auf denen μ^* additiv ist.

Satz 3.18: Carathéodory (1914)

Ist μ^* ein äußeres Maß auf $\mathcal{P}(\Omega)$, so ist $\mathcal{A}_{\mu^*} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra und $\mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}}$ ist ein Maß.

Man kann auch sagen: $(\Omega, \mathcal{A}_{\mu^*}, \mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}})$ ist ein Maßraum.

Beweis. **$\mathcal{A}_{\mu^*}$ ist eine Algebra:** Wir überprüfen die Eigenschaften aus Definition 2.19:

- $\Omega \in \mathcal{A}_{\mu^*}$, denn für alle $B \subseteq \Omega$ gilt
$$\mu^*(\Omega \cap B) + \mu^*(\Omega^c \cap B) = \mu^*(B) + \mu^*(\emptyset) = \mu^*(B) + 0 = \mu^*(B).$$
- Ist $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$, so ist auch $A^c \in \mathcal{A}_{\mu^*}$, da (3.3.1) symmetrisch bezüglich A und A^c ist.
- Seien $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_{\mu^*}$. Dann gilt für beliebige $B \subseteq \Omega$ einerseits wegen der (σ)-Subadditivität
$$\mu^*(B) \leq \mu^*((A_1 \cup A_2) \cap B) + \mu^*((A_1 \cup A_2)^c \cap B).$$
Andererseits gilt auch
$$\begin{aligned}\mu^*(B) &= \mu^*(A_1 \cap B) + \mu^*(A_1^c \cap B)\\ &= \mu^*(A_1 \cap B) + \mu^*(A_1^c \cap B \cap A_2) + \mu^*(A_1^c \cap B \cap A_2^c)\\ &\geq \mu^*((A_1 \cap B) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap B)) + \mu^*(A_1^c \cap A_2^c \cap B)\\ &= \mu^*((A_1 \cup A_2) \cap B) + \mu^*((A_1 \cup A_2)^c \cap B).\end{aligned}$$
Folglich ist auch $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}_{\mu^*}$.

$\mathcal{A}_{\mu^*}$ ist σ-$\cup$-stabil: Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ paarweise disjunkt. Für disjunkte Mengen $M, N \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ und beliebige $B \subseteq \Omega$ gilt (Aufgabe 10)

$$\mu^*(B \cap (M \cup N)) = \mu^*(B \cap M) + \mu^*(B \cap N). \tag{3.3.2}$$

Daher haben wir für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mu^*\left(B \cap \bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu^*(B \cap A_k).$$

Setzen wir $A := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$, so erhalten wir, da $\mathcal{A}_{\mu^*}$ eine Algebra ist und somit $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ ist,

$$\begin{aligned}\mu^*(B) &= \mu^*\left(B \cap \bigcup_{k=1}^n A_k\right) + \mu^*\left(B \cap \left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)^c\right)\\ &\geq \sum_{k=1}^n \mu^*(B \cap A_k) + \mu^*(B \cap A^c).\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir die Monotonie von μ^* und $\bigcup_{k=1}^n A_k \subseteq A$ verwendet. Die σ-Subadditivität von μ^* liefert schlussendlich

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(B \cap A_k) + \mu^*(B \cap A^c) \leq \mu^*(B). \qquad (3.3.3)$$

Hieraus folgt, dass die Ungleichungen in der Tat Gleichungen waren, d.h. $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$. Das lässt sich auch auf abzählbare Vereinigungen von nicht notwendigerweise paarweise disjunkten Mengen übertragen. (Übungsaufgabe 11)

$\mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}}$ **ist σ-additiv:** Setzt man in (3.3.3) $B = A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu^*(A \cap A_k) + \mu^*(A \cap A^c) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu^*(A_k) + \mu^*(\emptyset) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu^*(A_k). \end{aligned}$$

□

Zum Abschluss dieses Abschnittes wollen wir sehen, wie man von einer Mengenfunktion, die nur auf einer Teilmenge der Potenzmenge definiert ist, auf ein äußeres Maß kommt, welches auf allen Mengen der Potenzmenge definiert ist.

Satz 3.19

Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengensystem mit $\emptyset \in \mathcal{A}$. Sei weiterhin $\mu \colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ eine Mengenfunktion, die $\mu(\emptyset) = 0$ erfüllt. Für jede Menge $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ definieren wir

$$\mathcal{U}(A) := \left\{ (A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \;\middle|\; A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right\}$$

als die (möglicherweise leere) Menge der Überdeckungsfolgen von A. Dann definiert die Abbildung $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$, welche gegeben ist durch

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \;\middle|\; (A_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}(A) \right\}, \qquad A \in \mathcal{P}(\Omega),$$

ein äußeres Maß definiert. Wir nennen die so definierte Abbildung μ^* das *von μ induzierte äußere Maß*.

Bemerkung 3.20. *Für den Satz verwenden wir die übliche Festlegung* $\inf \emptyset := +\infty$*, d.h. das Infimum über einer leeren Menge habe den Wert $+\infty$. Zudem gibt es für das Infimum einer nichtleeren Teilmenge von $\mathbb{R}$ ($X \subseteq \mathbb{R}$) folgende Charakterisierung:*

$$m = \inf X < \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} m \leq x, \ \forall x \in X \quad \textit{und} \\ \forall \varepsilon > 0 \, \exists x \in X : x \leq m + \varepsilon. \end{cases}$$

Beweis. $\mu^*(\emptyset) = 0$ und die Monotonie von μ^* zu zeigen ist eine Übungsaufgabe. Es bleibt noch die σ-Subadditivität zu zeigen. Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$.

- Falls für einen Index $j \in \mathbb{N}$ bereits $\mu^*(A_j) = \infty$ gilt, so ist auch $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(A_k) \geq \mu^*(A_j) = \infty$ und damit gilt
$$\mu^*\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \leq \infty = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(A_k).$$
- Ist $\mu^*(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so besitzt jede der Mengen A_n Überdeckungsfolgen in $\mathcal{A}$. Nach der vorherigen Bemerkung kann zu jedem festen $\varepsilon > 0$ und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Folge $(B_{n,k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ derart gewählt werden, dass
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_{n,k}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$
Die Doppelfolge $(B_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ ist eine Überdeckungsfolge von $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und es gilt
$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_{n,k}) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$
Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt hieraus die Behauptung.

□

3.3.2 Fortsetzungs- und Eindeutigkeitssatz

Wie wir in Beispiel 3.14 gesehen haben, ist es möglich, von den Werten, die ein Maß den offenen Intervallen zuordnet, auf die Werte zu schließen, die es abgeschlossenen Intervallen zuordnet. Das ist die Grundidee der Fortsetzungssätze. Wir legen fest, welche Werte ein (Kandidat für ein) Maß auf einem Mengensystem annimmt und wollen dann – sofern das möglich ist – daraus ableiten, welche Werte das Maß auf der von diesem Mengensystem erzeugten Sigma-Algebra annimmt.

Bevor wir zum Fortsetzungssatz kommen, sehen wir uns an, welche Bedingungen an ein Mengensystem $\mathcal{M}$ ausreichen, um zu garantieren, dass die Fortsetzung einer Mengenfunktion auf $\mathcal{M}$ zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{M})$ auf eindeutige Weise geschieht.

Satz 3.21: Eindeutigkeitssatz

Seien $\Omega \neq \emptyset$ eine Grundmenge und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra auf Ω. Sei zudem $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein durchschnittsstabiler Erzeuger von $\mathcal{A}$, d.h. $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{A}$ und für Mengen $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ gilt stets $M_1 \cap M_2 \in \mathcal{M}$. Für zwei Maße $\mu, \nu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mögen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1. $\mu(A) = \nu(A)$ für alle $A \in \mathcal{M}$;
2. es existiert eine Folge von Mengen $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ mit $\mu(A_k) = \nu(A_k) < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \Omega$.

Dann gilt $\mu = \nu$.

Bemerkung 3.22. *Insbesondere ist jeder Halbring und jede Semialgebra ein durchschnittsstabiles Mengensystem, so dass es für die Konstruktion eines Maßes genügen wird, dessen Werte auf einem Halbring oder einer Semialgebra zu kennen – anschließend können wir daraus die Werte auf der davon erzeugten σ-Algebra ableiten.*

Um den Eindeutigkeitssatz beweisen zu können, ist es sinnvoll, den Begriff des *Dynkin-Systems* zu kennen:

Definition 3.23: Dynkin-System

Ein Mengensystem $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt *Dynkin-System*, falls gilt:

1. $\Omega \in \mathcal{D}$;
2. sind $A, B \in \mathcal{D}$ mit $A \subseteq B$, so ist auch $B \setminus A \in \mathcal{D}$;
3. sind $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}$ höchstens abzählbar viele paarweise disjunkte Mengen in $\mathcal{D}$, so ist auch $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{D}$.

Jede σ-Algebra ist offensichtlich ein Dynkin-System. Für die Umkehrung muss noch gefordert werden, dass das Dynkin-System durchschnittsstabil ist.

Lemma 3.24

Sei $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein durchschnittsstabiles Dynkin-System, d.h. zu $A, B \in \mathcal{D}$ gilt stets auch $A \cap B \in \mathcal{D}$. Dann ist $\mathcal{D}$ eine σ-Algebra.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Es gilt sogar folgende noch stärkere Aussage:

Durchschnittsstabiles Dynkin-System

Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein durchschnittsstabiles Mengensystem und sei

$$\delta(\mathcal{M}) := \bigcap \{\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) \mid \mathcal{D} \text{ ist ein Dynkin-System}, \mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}\}.$$

Dann ist $\delta(\mathcal{M})$ ein durchschnitsstabiles Dynkin-System, also ist $\delta(\mathcal{M}) = \sigma(\mathcal{M})$.

Beweis. Skizzieren wir den Beweis für $\mathcal{D} := \delta(\mathcal{M})$.

1. $\delta(\mathcal{M})$ ist ein Dynkin-System. (Man weist direkt die 3 Eigenschaften eines Dynkin-Systems nach.)
2. $\mathcal{D}_1 := \{A \in \mathcal{D} \mid A \cap M \in \mathcal{D}, \forall M \in \mathcal{M}\}$ ist ein Dynkin-System und es gilt $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{M})$. Folglich ist $\mathcal{D}_1 = \delta(\mathcal{M}) = \mathcal{D}$.
3. $\mathcal{D}_2 := \{A \in \mathcal{D} \mid A \cap B \in \mathcal{D}, \forall B \in \mathcal{D}\}$ ist ebenfalls ein Dynkin-System und es gilt nach 2. $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}_2$. Folglich ist $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}$, d.h. $\mathcal{D}$ ist in der Tat durchschnittsstabil.

□

Beweis des Eindeutigkeitssatzes. Sei $A \in \mathcal{A}$ beliebig. Dann gilt für die Folge $(A \cap A_k)_{k\in\mathbb{N}}$:

- $A \cap A_k \in \mathcal{A}$ für alle $k \in \mathbb{N}$;
- $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(A \cap A_k) = A$.

Auf Grund der Stetigkeit von unten gilt folglich für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu(A \cap A_k) \quad \text{und} \quad \nu(A) = \lim_{k\to\infty} \nu(A \cap A_k).$$

Wenn wir $\mu(A \cap A_k) = \nu(A \cap A_k)$ $(k \in \mathbb{N})$ zeigen, folgt hieraus die Behauptung.
Um das zu sehen, definieren wir für jedes $M \in \mathcal{M}$ das Mengensystem

$$\mathcal{D}_M := \left\{A' \in \mathcal{A} \,\middle|\, \mu(A' \cap M) = \nu(A' \cap M)\right\}. \tag{3.3.4}$$

Falls $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}_{A_k}$ ist für alle $k \in \mathbb{N}$, so sind wir fertig.

- $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}_M$ für jedes $M \in \mathcal{M}$: Seien $M, M' \in \mathcal{M}$. Da $\mathcal{M}$ durchschnittsstabil ist, ist auch $M \cap M' \in \mathcal{M} \subseteq \sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{A}$. Da μ und ν auf $\mathcal{M}$ übereinstimmen, gilt also $\mu(M \cap M') = \nu(M \cap M')$. Da M' beliebig war, gilt also $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}_M$ für alle $M \in \mathcal{M}$.
- $\mathcal{D}_M$ ist ein Dynkin-System: Übungsaufgabe.
- $\delta(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{D}_M$: Das folgt sofort aus den vorherigen Punkten, da $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}_M$ ist und $\delta(\mathcal{M})$ das kleinste Dynkin-System ist, welches $\mathcal{M}$ enthält.
- $\delta(\mathcal{M}) = \sigma(\mathcal{M})$: Seien also $A, B \in \delta(\mathcal{M})$. Für jedes Dynkin-System $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, welches $\mathcal{M}$ enthält, gilt dann $A \in \mathcal{D}$ und $B \in \mathcal{D}$, also $A \cap B \in \mathcal{D}$ und somit $A \cap B \in \delta(\mathcal{M})$. Folglich ist $\delta(\mathcal{M})$ durchschnittsstabil. Die Aussage folgt somit aus Lemma 3.24.
- $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{D}_M$: Das folgt sofort aus den vorherigen Punkten, da $\sigma(\mathcal{M}) = \delta(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{D}_M$ ist.

Aus dem letzten Punkt folgt insbesondere $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}_{A_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, d.h. der Beweis ist vollendet. □

Es gibt verschiedene Versionen von Fortsetzungssätzen, die sich darin unterscheiden, was für Anforderungen wir an das Mengensystem stellen. Wir sehen uns exemplarisch eine Fassung an, welche Kapitel 8 aus [Hen19] entnommen ist.

Satz 3.25: Fortsetzungssatz

Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein Halbring und sei $\mu \colon \mathcal{M} \to [0, \infty]$ ein Prämaß. Dann existiert mindestens ein Maß $\widetilde{\mu}$ auf $\sigma(\mathcal{M})$ mit

$$\mu(A) = \widetilde{\mu}(A), \quad \forall A \in \mathcal{M}.$$

Ist μ σ-endlich, so ist $\widetilde{\mu}$ eindeutig bestimmt.

Beweis. Seien μ^* das von μ induzierte äußere Maß und $\mathcal{A}_{\mu^*}$ die σ-Algebra der μ^*-messbaren Mengen. Der Beweis umfasst folgende Schritte:

1. $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}_{\mu^*}$
2. $\sigma(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{A}_{\mu^*}$
3. $\mu^*(A) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{M}$
4. Setze $\widetilde{\mu}(A) := \mu^*(A)$ für alle $A \in \sigma(\mathcal{M})$. Dann hat $\widetilde{\mu}$ nach 2. und 3. die gewünschten Eigenschaften.
5. Eindeutigkeitsaussage im Fall, dass μ σ-endlich ist.

Abgesehen von Schritt 4, in dem nichts zu zeigen ist, gehen wir nun diese Schritte durch.

1. Sei $A \in \mathcal{M}$ und sei $B \subseteq \Omega$ beliebig. Auf Grund der σ-Subadditivität gilt

   $$\mu^*(B) \leq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B).$$

   Ist $\mu^*(B) = \infty$, so folgt automatisch die Gleichheit. Nehmen wir also im Folgenden an, dass $\mu^*(B) < \infty$ sei. Wir wollen für diesen Fall zeigen, dass

   $$\mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B) \leq \mu^*(B) \tag{3.3.5}$$

   gilt. Nach Definition von μ^* gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Überdeckungsfolge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ mit $B \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ und

   $$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k) \leq \mu^*(B) + \varepsilon. \tag{3.3.6}$$

Da $\mathcal{M}$ eine Halbring ist, folgt aus $A_k, A \in \mathcal{M}$ sofort $B_k := A \cap A_k \in \mathcal{M}$ und für jedes $k \in \mathbb{N}$ existieren paarweise disjunkte Mengen $C_{k,1}, \ldots, C_{k,n_k} \in \mathcal{M}$ derart, dass

$$A_k \cap A^c = A_k \setminus (A \cap A_k) = A_k \setminus B_k = \bigcup_{j=1}^{n_k} C_{k,j}.$$

Somit haben wir die Zerlegung jedes A_k in disjunkte Mengen:

$$A_k = B_k \,\dot\cup\, \bigcup_{j=1}^{n_k} C_{k,j}. \tag{3.3.7}$$

Um (3.3.5) zu zeigen, stellen wir nun zuerst fest, dass wir mit $A \cap B \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k$ und $A^c \cap B \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{j=1}^{n_k} C_{k,j}$ jeweils Überdeckungsfolgen gefunden haben. Somit gilt nach Definition von μ^* und unter Verwendung der Prämaß-Eigenschaften (von μ)

$$\begin{aligned}
\mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B) &\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_k) + \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{n_k} \mu(C_{k,j}) \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\mu(B_k) + \sum_{j=1}^{n_k} \mu(C_{k,j}) \right) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k) && \text{wegen (3.3.7)} \\
&\leq \mu^*(B) + \varepsilon, && \text{wegen (3.3.6)}
\end{aligned}$$

wobei wir in $(*)$ die Reihe umordnen durften, da alle Summanden nichtnegativ sind, die Reihe also absolut konvergent ist (siehe Satz B.14). Da $\varepsilon > 0$ in (3.3.6) beliebig war, folgt hieraus $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$, also insgesamt $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}_{\mu^*}$.

2. Da $\mathcal{A}_{\mu^*}$ nach Satz 3.18 eine σ-Algebra ist, welche nach 1. $\mathcal{M}$ enthält und $\sigma(\mathcal{M})$ die kleinste derartige σ-Algebra ist, folgt sofort $\sigma(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{A}_{\mu^*}$.

3. Sei $A \in \mathcal{M}$. Dann gilt einerseits, dass $(A, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \ldots) \in \mathcal{U}(A)$ eine Überdeckungsfolge von A ist. Folglich ist $\mu^*(A) \leq \mu(A)$. Sei nun $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}(A)$ eine beliebige Überdeckungsfolge von A, d.h. insbesondere $A \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Dann gilt wegen der σ-Subadditivität und Monotonie von μ:

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A \cap A_k) \right) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A \cap A_k) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k).$$

Hieraus folgt (nach Definition des induzierten äußeren Maßes μ^*) $\mu(A) \leq \mu^*(A)$, denn wenn $\mu(A) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$ ist für alle solche Überdeckungsfolgen, dann gilt das auch für das Infimum dieser Werte. Damit ist die Gleichheit gezeigt.

5. Seien $\widetilde{\mu}$ und $\widetilde{\nu}$ zwei Maße, die Fortsetzungen des Prämaßes μ von $\mathcal{M}$ auf $\sigma(\mathcal{M})$ sind. Ist μ σ-endlich, so ist automatisch Bedingung 2 des Eindeutigkeitssatzes erfüllt. Da ein Halbring zudem durchschnittsstabil ist, kann der Eindeutigkeitssatz angewendet werden und er liefert $\widetilde{\mu} = \widetilde{\nu}$, also die behauptete Eindeutigkeit des Maßes.

□

Bemerkung 3.26. *Was ist der Vorteil dieses Begriffs Halbring gegenüber der Semialgebra? Wie wir schon in den Übungen für den Spezialfall $n = 1$ festgestellt haben, ist das Mengensystem*

$$\mathcal{S}_n = \left\{ \prod_{k=1}^{n} (a_k, b_k] \subseteq \mathbb{R}^n \;\middle|\; -\infty \leq a_k \leq b_k \leq \infty, k \in \{1, \ldots, n\} \right\}$$

aus Definition 2.24 eine Semialgebra über $\Omega = (-\infty, \infty]^n$, nicht jedoch über $\Omega' := \mathbb{R}^n = (-\infty, \infty)^n$ oder $\Omega'' := [-\infty, \infty]^n$, da nicht alle Mengen des Mengensystems in Ω' enthalten sind, auf der anderen Seite jedoch Ω'' selbst nicht zum Mengensystem gehört. Wenn wir die Bedingung $\Omega \in \mathcal{M}$ jedoch weglassen, ist $\mathcal{S}_n$ ein Halbring in Ω'' – damit können wir mit dem Fortsetzungssatz ein Maß auf $\sigma(\mathcal{S}_n) \subseteq \mathcal{P}(\Omega'')$ definieren.

3.4 Das Lebesgue-Maß

Bemerkung 3.27. *Dieser Abschnitt folgt Abschnitt 3.3.3 in [Kü16] und Abschnitt 3.2 in [BK19].*

Satz 3.28: Definition des Lebesgue-Maßes

Sei der Halbring $\mathcal{H}_n \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ wie folgt gegeben:

$$\mathcal{H}_n = \left\{ \prod_{k=1}^{n} (a_k, b_k] \subseteq \mathbb{R}^n \;\middle|\; -\infty < a_k \leq b_k < \infty, k \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Dann wird durch

$$\lambda_n \colon \mathcal{H}_n \to \overline{\mathbb{R}}, \quad \prod_{k=1}^{n} (a_k, b_k] \mapsto \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$$

ein Prämaß definiert. Man nennt es das *Lebesgue'sche Prämaß*. Zu λ_n existiert eine eindeutig bestimmte Fortsetzung auf die Borel'sche σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{H}_n)$, genannt das *Lebesgue-Maß* (oder *Borel-Lebesgue-Maß*) auf dem $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung 3.29. *In der Definition des Prämaßes wird das Symbol $\prod_{k=1}^{n}$ in zwei verschiedenen Bedeutungen verwendet – erstens für das Kreuzprodukt, welches in der Literatur zur besseren Unterscheidung auch als $\bigtimes_{k=1}^{n}$ notiert wird, und zweitens für das Produkt von n reellen Zahlen.*

Beweis. Fassen wir kurz die entscheidenden Argumente zusammen, auf denen die Konstruktion des Borel-Lebesgue-Maßes aufbaut.

- $\mathcal{H}_n$ ist in der Tat ein Halbring – die wesentlichen Eigenschaften haben wir in Aufgabe 4 von Übungsblatt 1 für den Spezialfall $n = 1$ überprüft.
- λ_n definiert tatsächlich ein Prämaß. Dafür ist zunächst einmal festzustellen, dass $\mathcal{H}_n$ ein Mengensystem ist, welches die leere Menge $\emptyset$ enthält. Zudem kann man die Eigenschaften eines Prämaßes aus Definition 3.7 für λ_n überprüfen.
- Schritte 1 bis 4 des Beweises des Fortsetzungssatz benötigen nicht die Eigenschaft, dass der Grundraum selbst in dem Mengensystem enthalten ist, so dass der Satz auch auf den Halbring $\mathcal{H}_n$ anwendbar ist. Folglich existiert die Fortsetzung des Prämaßes auf die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
- λ_n ist σ-endlich, was man anhand der Folge $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}_n$ mit $A_j := \prod_{k=1}^{n}(-j, j] = (-j, j]^n$ nachweisen kann. Da $\mathcal{H}_n$ ein durchschnittsstabiler Erzeuger der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist, kann der Eindeutigkeitssatz (Satz 3.21) angewendet werden, welcher die Basis der Eindeutigkeitsaussage des Fortsetzungssatzes (Satz 3.25) ist.

$\square$

Kommen wir schlussendlich zurück zu Abschnitt 1.1 und unserem Versuch, eine sinnvolle Volumenfunktion zu definieren.

Ist $\lambda_n\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}$ das Lebesgue-Maß, so ist es insbesondere nichtnegativ, monoton, σ-additiv und per Konstruktion verträglich mit dem geometrischen Volumen. Überzeugen wir uns noch, dass das Lebesgue-Maß auch translationsinvariant ist. Es soll also für beliebige $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $m \in \mathbb{R}^n$ stets folgende Eigenschaft gelten:

$$\lambda_n(M+m) = \lambda_n(M).$$

Hierbei ist $M+m = \{x+m \mid x \in M\}$. Es soll uns genügen, das Beweisprinzip für den Spezialfall $n = 1$ darzulegen.
Seien $(a,b] \in \mathcal{H}_1$ und $m \in \mathbb{R}$. Dann ist $(a,b]+m = (a+m, b+m]$ und es gilt

$$\lambda_1((a,b]) = b-a = (b+m)-(a+m) = \lambda_1((a,b]+m).$$

Somit stimmt das durch Translation erhaltene Maß mit dem Lebesgue-Maß auf $\mathcal{H}_1$ überein – folglich stimmen beide Maße auch auf der ganzen von $\mathcal{H}_1$ erzeugten Borel-σ-Algebra überein.

3.5 Aufgaben

Aufgabe 1. *Überprüfen Sie, dass in den Beispielen 3.11 und 3.12 tatsächlich Maße definiert wurden durch μ bzw. δ_x. Sind diese Maße endlich bzw. σ-endlich?*

Aufgabe 2. *Die σ-Additivität eines Maßes bezieht sich zunächst auf abzählbar unendlich viele paarweise disjunkte Mengen. Zeigen Sie, dass dies auch für endlich viele paarweise disjunkte Mengen gilt, d.h. zeigen Sie:*

Lemma 3.30

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ endlich viele paarweise disjunkte Mengen. Dann gilt

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

Aufgabe 3. *Auf $\Omega \neq \emptyset$ sei die σ-Algebra*

$$\mathcal{A} := \{A \subseteq \Omega \mid A \textit{ oder } A^c \textit{ ist höchstens abzählbar unendlich}\}$$

aus Beispiel 2.6 gegeben. Auf dem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A})$ wird ein Maß wie in Beispiel 3.11 definiert, d.h.

$$\mu(A) = \begin{cases} |A|, & |A| < \infty, \\ +\infty, & \textit{sonst}. \end{cases}$$

Entscheiden Sie in Abhängigkeit von der Mächtigkeit von Ω, ob es sich bei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um ein endliches, σ-endliches oder nicht einmal σ-endliches Maß handelt.

Aufgabe 4. *Zeigen Sie Aussage 3 von Satz 3.13.*

Aufgabe 5. *Überlegen Sie sich für jede der nummerierten Gleichungen aus dem Beweis von Aussage 4 von Satz 3.13, warum das Gleichheitszeichen gilt.*

Aufgabe 6. *Überlegen Sie sich (wahlweise mit Formeln oder Diagrammen): Gilt für zwei Teilmengen A, B von Ω die Beziehung $A \supseteq B$, so gilt für deren komplementäre Mengen $A^c \subseteq B^c$.*

Aufgabe 7. *Begründen Sie, warum die Folge $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus dem Beweis von Aussage 5 von Satz 3.13 eine aufsteigende Folge ist mit $\mu(C_k) < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$.*

Aufgabe 8. *Überlegen Sie sich für jede der nummerierten (Un-)Gleichungen aus dem Beweis von Aussage 7 von Satz 3.13, warum das Gleichheitszeichen gilt.*

Aufgabe 9. *Zeigen Sie die Einschluss-Ausschluss-Formel (Formel von Poincaré und Sylvester) für Maße mittels vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$:*

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum, d.h. $\Omega \neq \emptyset$, $\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra auf Ω und μ ist ein endliches Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Für $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ ($n \in \mathbb{N}$) gilt dann

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) - \sum_{1 \leq j < k \leq n} \mu(A_j \cap A_k) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mu(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} \mu\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right).$$

Aufgabe 10. *Begründen Sie, warum* (3.3.2) *für disjunkte Mengen $M, N \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ gilt.*

Aufgabe 11. *Zeigen Sie, dass zu abzählbar vielen Mengen $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ stets auch deren Vereinigung $A := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ in $\mathcal{A}_{\mu^*}$ enthalten ist – auch dann, wenn diese nicht notwendigerweise paarweise disjunkt sind (Vgl. Satz 3.18).*

Hinweis: *Sie dürfen alles verwenden, was im Beweis von Satz 3.18 gezeigt wurde. Zudem können Sie einen Trick aus dem vorherigen Abschnitt verwenden, der aus Vereinigung beliebiger Mengen eine Vereinigung paarweise disjunkter Mengen macht.*

Aufgabe 12. *Zeigen Sie für das in Satz 3.19 definierte induzierte äußere Maß μ^*:*

a) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

b) *Ist $A \subseteq B \subseteq \Omega$, so gilt $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.*

Aufgabe 13. *Beweisen Sie Lemma 3.24.*

Aufgabe 14. *Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}_M$, welches in* (3.3.4) *definiert wird, ein Dynkin-System ist.*

3.6 English terminology

messbarer Raum	measurable space
Maßraum	measure space
Mengenfunktion	set function
endlich	finite
gerade Zahlen	even numbers
ungerade Zahlen	odd numbers
paarweise disjunkt	pairwise disjoint
endliche Vereinigung	finite union
Inhalt	content
Prämaß	pre-measure
Maß	measure
Zählmaß	counting measure
Stetigkeit von unten	continuity from below
Stetigkeit von oben	continuity from above
aufsteigende Folge	increasing sequence
absteigende Folge	decreasing sequence
Primzahl	prime (number)
Zirkelschluss	circular reasoning
äußeres Maß	outer measure
Monotonie	monotonicity
Überdeckung	cover
induziertes äußeres Maß	induced outer measure
Folge	sequence
Fortsetzungssatz	extension theorem
Eindeutigkeit	uniqueness
durchschnittsstabil	stable with respect to intersections
Erzeuger	generator
Dynkin-System	dynkin system
Kreuzprodukt / kartesisches Produkt	Cartesian product
Translation	translation

Kapitel 4

Messbare Abbildungen

Ziele

- □ Kriterien für (Borel-)Messbarkeit von Abbildungen kennen und anwenden können
- □ das durch eine messbare Abbildung induzierte Maß kennen (ÜA)
- □ die Konstruktion von Produkt-σ-Algebren und Produktmaßen kennen
- □ die Approximation Borel-messbarer Funktionen durch einfache Funktionen kennen

4.1 Definition (Borel-)messbarer Abbildungen

In Definition 2.49 haben wir bereits für messbare Räume $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{A}')$ eine Abbildung $f\colon X \to Y$ als $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-*messbar* definiert, falls $f^{-1}(\mathcal{A}') \subseteq \mathcal{A}$ ist.
Für Integrationstheorie interessiert uns insbesondere der Spezialfall $Y = \mathbb{R}$ oder $Y = \overline{\mathbb{R}}$ mit der zugehörigen Borel-σ-Algebra.

Definition 4.1

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und sei $\mathcal{B}_n$ die Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$.
Eine Abbildung $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ heißt *Borel-messbar*, wenn f $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_n$-messbar ist.

In Satz 2.47 haben wir die von einer Abbildung erzeugte Urbild-σ-Algebra kennen gelernt. Im Folgenden wollen wir ein paar interessante zusätzliche Eigenschaften sammeln.

Lemma 4.2

Sei $X \neq \emptyset$ und sei $(Y, \mathcal{A}')$ ein messbarer Raum. Ist $f\colon X \to Y$ gegeben, so ist die Urbild-σ-Algebra $\mathcal{A}_f := f^{-1}(\mathcal{A}') \subseteq \mathcal{P}(X)$ die kleinste σ-Algebra auf X, bezüglich der f messbar ist.

Notation

Die Urbild-σ-Algebra wird auch mit $\sigma(f) := f^{-1}(\mathcal{A}')$ bezeichnet.

Beweis. Einerseits ist $\sigma(f) := f^{-1}(\mathcal{A}')$ eine σ-Algebra nach Satz 2.47 und da jedes Mengensystem sich selbst enthält, gilt speziell $\sigma(f) \subseteq \sigma(f)$, d.h. f ist in der Tat $\sigma(f)$-$\mathcal{A}'$-messbar.
Andererseits gilt für jede σ-Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, bezüglich der f $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-messbar ist, $\sigma(f) = f^{-1}(\mathcal{A}') \subseteq \mathcal{A}$. Somit ist $\sigma(f)$ minimal unter allen solchen σ-Algebren. □

4.2 Messbarkeitskriterien

Stellen wir uns die Aufgabe vor, für eine vorgegebene Abbildung $f\colon X \to \mathbb{R}$ für einen messbaren Raum $(X, \mathcal{A})$ zu überprüfen, ob diese Borel-messbar (d.h. $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar) ist. Für jede Borelmenge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ müssten wir dann überprüfen, ob $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ ist. Wir müssten also insbesondere die Urbilder aller offenen, abgeschlossenen und halboffenen Intervalle, sowie deren Schnitte und Vereinigungen etc. überprüfen. Um diese Arbeit zu umgehen, gibt es folgendes sehr nützliches Resultat:

Satz 4.3

Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{A}')$ messbare Räume. Sei zudem $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ ein Erzeuger von $\mathcal{A}'$, d.h. $\mathcal{A}' = \sigma(\mathcal{M})$. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ ist genau dann $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-messbar, wenn $f^{-1}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{A}$ ist.

Beweis. Ist f $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-messbar, so gilt $f^{-1}(\mathcal{M}) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{M})) = \sigma(f) \subseteq \mathcal{A}$.
Sei nun $f^{-1}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{A}$. Dann ist

$$f^{-1}(\mathcal{A}') = f^{-1}(\sigma(\mathcal{M})) \overset{(1)}{=} \sigma(f^{-1}(\mathcal{M})) \overset{(2)}{\subseteq} \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A},$$

wobei wir in (1) Satz 2.51 und in (2) Lemma 2.16 und die Voraussetzung verwendet haben. □

Mit Hilfe dieses Satzes können wir eine Reihe von Kriterien für Borel-Messbarkeit formulieren.

Satz 4.4

Seien $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent zueinander.

(1) f ist Borel-messbar;

(2) $\{x \in X \mid f(x) \leq y\} \in \mathcal{A}$ für alle $y \in \mathbb{R}$;

(3) $\{x \in X \mid f(x) < y\} \in \mathcal{A}$ für alle $y \in \mathbb{R}$;

(4) $\{x \in X \mid f(x) > y\} \in \mathcal{A}$ für alle $y \in \mathbb{R}$;

(5) $\{x \in X \mid f(x) \geq y\} \in \mathcal{A}$ für alle $y \in \mathbb{R}$.

Beweis. Zunächst einmal gilt (2) $\iff$ (4) und (3) $\iff$ (5), da für alle $y \in \mathbb{R}$ stets

$$\{x \in X \mid f(x) \leq y\}^c = \{x \in X \mid f(x) > y\} \quad \text{und}$$
$$\{x \in X \mid f(x) < y\}^c = \{x \in X \mid f(x) \geq y\}$$

gilt. Zeigen wir noch die übrigen Äquivalenzen.

(1) $\Longrightarrow$ (2): Sei f Borel-messbar und sei $y \in \mathbb{R}$ fest. Wegen $(-\infty, y] \in \mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist dann

$$\{x \in X \mid f(x) \leq y\} = \{x \in X \mid f(x) \in (-\infty, y]\} = f^{-1}((-\infty, y]) \in f^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}. \quad (4.2.1)$$

(2) $\Longrightarrow$ (1): Aus (4.2.1) folgt, dass $f^{-1}((-\infty, c]) \in \mathcal{A}$ ist für alle $c \in \mathbb{R}$. Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ gilt stets

$$(a, b] = (-\infty, b] \setminus (-\infty, a],$$

so dass für den Erzeuger $\mathcal{H}_1$ der Borel-σ-Algebra, den wir in Satz 3.28 definiert haben, ebenfalls $f^{-1}(\mathcal{H}_1) \subseteq \mathcal{A}$ gilt. Aus Satz 4.3 folgt die Messbarkeit von f.

(1) $\iff$ (3): Übungsaufgabe.

$\square$

Korollar 4.5

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und sei $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung.

1. Wenn $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ ist für alle offenen Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$, dann ist f Borel-messbar.
2. Jede stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ $(m, n \in \mathbb{N})$ ist Borel-messbar.

Beweis.

1. Die Menge der offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ist ein Erzeuger der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, daher folgt die Aussage mit Satz 4.3.
2. Eine Funktion ist genau dann stetig, wenn die Urbilder offener Mengen wieder offen sind. Aus der Stetigkeit von f folgt also, dass $f^{-1}(U) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ ist für alle offenen Mengen $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Die Behauptung folgt aus 1.

$\square$

Bemerkung 4.6. *Man kann auch die Borel-Messbarkeit einer Abbildung $f\colon (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ auf $f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{A}$ zurückführen. Details sind in Satz 4.2 [Kü16] zu finden.*

Satz 4.7

Seien $(X_1, \mathcal{A}_1)$, $(X_2, \mathcal{A}_2)$ und $(X_3, \mathcal{A}_3)$ messbare Räume und seien $f\colon X_1 \to X_2$ und $g\colon X_2 \to X_3$ jeweils $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}_2$- bzw. $\mathcal{A}_2$-$\mathcal{A}_3$-messbare Abbildungen. Dann ist $g \circ f\colon X_1 \to X_3$ eine $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}_3$-messbare Abbildung.

Beweis. Übungsaufgabe. $\square$

Bemerkung 4.8 (Motivation des nächsten Resultats)**.** *Ein weiteres Resultat besagt, dass unter anderem Summen Borel-messbarer Abbildungen wieder Borel-messbar sind. Sind also $f, g\colon (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ messbar, so ist auch $f + g$ messbar. Das können wir zeigen, indem wir die Summe zweier Funktionen als Verknüpfung auffassen: Sei $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\phi(x, y) := x + y$. Diese Abbildung ist stetig und somit nach Korollar 4.5 Borel-messbar. Wenn wir wüssten, dass die vektorwertige Abbildung $(f, g)\colon X \to \mathbb{R}^2$ messbar ist, dann könnten wir aus*

$$(f + g)(x) = \phi(f(x), g(x)) = (\phi \circ (f, g))(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

dank Satz 4.7 sofort darauf schließen, dass $f + g$ Borel-messbar ist.

Sehen wir uns nun an, wie die Messbarkeit $\mathbb{R}^n$-wertiger Abbildungen mit der Messbarkeit der zugehörigen $\mathbb{R}$-wertigen Komponenten zusammenhängt.

Satz 4.9

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und seien $f_k\colon X \to \mathbb{R}$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$ Abbildungen auf X. Sei weiterhin

$$f := \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} : X \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

die vektorwertige Abbildung mit den Komponenten $f_1, \ldots, f_n$. Dann gilt folgende Äquivalenz:

$$f \text{ ist } \mathcal{A}\text{-}\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\text{-messbar} \quad \Longleftrightarrow \quad f_k \text{ ist } \mathcal{A}\text{-}\mathcal{B}(\mathbb{R})\text{-messbar}, \ \forall k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Beweis. Wir beweisen beide Implikationen nacheinander.

"$\Longrightarrow$": Sei $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ das System der offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$. Dann ist $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{O})$. Nach Satz 4.3 genügt es, $f_k^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ für alle $U \in \mathcal{O}$ zu zeigen.

Sei also $k \in \{1, \ldots, n\}$ fest und sei $U_k \in \mathcal{O}$ eine beliebige offene Teilmenge von $\mathbb{R}$. Dann ist auch

$$U := \bigtimes_{j=1}^{k-1} \mathbb{R} \times U_k \bigtimes_{j=k+1}^{n} \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^n$$

eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Somit gilt nach Voraussetzung $f_k^{-1}(U_k) = f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$, d.h. f_k ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar. Da $k \in \{1, \ldots, n\}$ beliebig war, folgt die Aussage.

"$\Longleftarrow$": Seien $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_n$ die Systeme der halboffenen Intervalle bzw. n-dimensionalen Quader aus Satz 3.28. Dann gilt $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{H}_1)$ und $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{H}_n)$, d.h. nach Satz 4.3 genügt es, $f^{-1}(M) \in \mathcal{A}$ für alle Quader $M \in \mathcal{H}_n$ zu zeigen.

Sei $(a, b] := \bigtimes_{k=1}^{n} (a_k, b_k] \in \mathcal{H}_n$. Dann gilt für das Urbild dieser Menge

$$f^{-1}((a, b]) = \bigcap_{k=1}^{n} f_k^{-1}((a_k, b_k]). \tag{4.2.2}$$

Die Messbarkeit der Komponenten impliziert $f_k^{-1}((a_k, b_k]) \in \mathcal{A}$ für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$, so dass aus (4.2.2) die Messbarkeit von f folgt.

□

Lemma 4.10

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und seien $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ zwei Borel-messbare Funktionen und $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Dann sind auch die Funktionen cf, $f + g$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$, $f \cdot g$ und $|f|$ Borel-messbar.

Beweis. Die Beweisidee wurde für $f + g$ bereits in Bemerkung 4.8 aufgeführt. Einige weitere Eigenschaften zu beweisen ist Bestandteil einer Übungsaufgabe. □

Bisher haben wir uns bei Borel-messbaren Funktionen auf Abbildungen $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ beschränkt, d.h. insbesondere, dass die Abbildungen zwar unbeschränkt sein dürfen, aber nicht konkret die Werte $\pm\infty$ annehmen können. Wir wollen jedoch auch über Suprema, Infima und Grenzwerte von Folgen von Funktionen sprechen – dafür müssen wir diese Werte ausdrücklich zulassen um nicht die Aussagekraft von Resultaten stark einschränken zu müssen.

Numerische Funktionen

Definition 4.11

Ist $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, so wird jede Abbildung $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ *numerische Funktion* genannt. Eine solche numerische Funktion nennen wir *messbar*, wenn sie $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-messbar ist.

Wie üblich verstehen wir unter der Notation $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, dass $f(X) \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ist, und nicht, dass das Bild von f mit $\overline{\mathbb{R}}$ übereinstimmen muss. Insbesondere ist jede reellwertige Funktion (d.h. $f(X) \subseteq \mathbb{R}$) genau dann $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-messbar, wenn sie $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar ist.

Bemerkung 4.12 (Rechenregeln für $\pm\infty$)**.** *Wir erinnern uns an dieser Stelle an die Konventionen für das Rechnen mit $\pm\infty$:*

- $-\infty < x < \infty$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$
- $x + (\pm\infty) := (\pm\infty) + x := \pm\infty$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$
- $x - (\pm\infty) := -(\pm\infty) + x := \mp\infty$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$
- $\infty + \infty := \infty$, $(-\infty) + (-\infty) := -\infty$ *und* $-(\pm\infty) := \mp\infty$
- $x \cdot \pm\infty := \pm\infty \cdot x := \pm\infty$ *für* $x > 0$ *oder* $x = +\infty$
- $x \cdot \pm\infty := \pm\infty \cdot x := \mp\infty$ *für* $x < 0$ *oder* $x = -\infty$
- $0 \cdot \pm\infty := \pm\infty \cdot 0 := 0$

Nicht definiert sind hingegen die Ausdrücke $\pm\infty - \pm\infty$ und $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, sowie alle Ausdrücke, die durch Umschreiben (z.B. durch Verwendung der Kommutativität) entstehen.[1]

Beispiel 4.13. *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_A\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann messbar, wenn $A \in \mathcal{A}$ ist.*

Beweis: *Die Urbild-σ-Algebra von $\mathbb{1}_A$ ist $\mathbb{1}_A^{-1}(\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})) = \{\emptyset, A, A^c, X\}$ und dieses Mengensystem ist Teilmenge von $\mathcal{A}$ genau dann, wenn $A \in \mathcal{A}$ ist.*

Satz 4.14

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Folge messbarer numerischer Funktionen. Dann sind auch die durch

$$f_*(x) := \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x), \quad f^*(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \quad \text{und} \quad F(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

definierten Funktionen $f_*, f^*, F\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, sofern sie wohldefiniert sind.

[1] Insbesondere ist $\overline{\mathbb{R}}$ (anders als $\mathbb{R}$) kein *Körper* – siehe `https://de.wikipedia.org/wiki/KÃűrper_(Algebra)`

Beweis. Für jedes $y \in \mathbb{R}$ ist

$$\left\{ x \in X \;\middle|\; \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \le y \right\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{ x \in X \mid f_n(x) \le y \} \in \mathcal{A},$$

daher ist $f^* = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ nach Satz 4.4 messbar.
Ist f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ messbar, so auch $-f_n$ und somit ist auch

$$f_* = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n = -\sup_{n \in \mathbb{N}} (-f_n)$$

messbar.
Für messbare Folgen numerischer Funktionen (f_n) sind auch Limes Inferior und Limes Superior (vgl. Definition B.10) messbar, denn es gilt

$$\limsup_{n \to \infty} f_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \ge n} f_k \quad \text{und} \quad \liminf_{n \to \infty} f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \ge n} f_k.$$

Falls der punktweise Grenzwert $F(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ für alle $x \in X$ existiert, so ist dieser ebenfalls messbar, da in diesem Fall Folgendes gilt:

$$\lim_{n \to \infty} f_n = \limsup_{n \to \infty} f_n = \liminf_{n \to \infty} f_n.$$

□

Wir haben bisher immer Mengen der Form $\{f \, \mathcal{R} \, c\}$ betrachtet, wobei $\mathcal{R}$ eine Relation auf $\overline{\mathbb{R}}$ ist. Wir können jedoch auch etwas für Mengen der Form $\{f \, \mathcal{R} \, g\}$ sagen, wenn sowohl f als auch g numerische Abbildungen sind.

Satz 4.15

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und seien $f, g \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbare numerische Funktionen. Dann sind folgende Mengen in $\mathcal{A}$:

$$\{f < g\}, \quad \{f \le g\}, \quad \{f = g\}, \quad \{f \ne g\}.$$

Beweis. Halten wir zunächst fest, was wir unter der Notation verstehen:

$$\{f < g\} = \{ x \in X \mid f(x) < g(x) \} \subseteq X.$$

Da die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ dicht in der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist, existiert zu zwei beliebigen reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ stets eine rationale Zahl $c \in \mathbb{Q}$ mit $a < c < b$. Damit ist

$$\{f < g\} = \bigcup_{c \in \mathbb{Q}} (\{f < c\} \cap \{c < g\}) \in \mathcal{A},$$

wobei die Mengen $\{f < c\}$ und $\{c < g\}$ für messbare Abbildungen nach Satz 4.4 in $\mathcal{A}$ liegen. Die übrigen Mengen können wir mit Hilfe dieser ausdrücken:

$$\{f \le g\} =$$

$$\{f = g\} =$$

$$\{f \ne g\} =$$

□

4.3 Die Produkt-σ-Algebra und das Produktmaß

4.3.1 Die Produkt-σ-Algebra

Wir haben bereits die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ kennen gelernt. Während wir den $\mathbb{R}^n$ als Produkt der eindimensionalen Vektorräume $\mathbb{R}$ auffassen können, d.h.

$$\mathbb{R}^n = \bigtimes_{k=1}^{n} \mathbb{R} = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R},$$

ist es bisher jedoch nicht klar, ob es einen ähnlichen Zusammenhang für die zugehörigen Borel-σ-Algebren gibt. Dazu führen wir an dieser Stelle die allgemeine Produkt-σ-Algebra ein.

Bemerkung 4.16 (Motivation). *Sind $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ messbare Räume und sind $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$, so sollten auch $A_1 \times \Omega_2$ und $\Omega_1 \times A_2$ in der Produkt-σ-Algebra sein. In der Stochastik entspricht das beispielsweise dem Szenario, dass wir die Wahrscheinlichkeit für eine 6 in einem Würfelwurf und die Wahrscheinlichkeit für* Zahl *beim Werfen einer fairen Münze kennen. Dann wissen wir auch, wie wahrscheinlich es ist, dass wenn Würfel und Münze gleichzeitig geworfen wird, der Würfel eine 6 und die Münze irgendetwas zeigt.*

Definition 4.17

Für eine nichtleere Indexmenge $I \neq \emptyset$ seien nichtleere Mengen Ω_i für $i \in I$ gegeben. Sei zudem

$$\Omega := \bigtimes_{i \in I} \Omega_i = \{ (\omega_i)_{i \in I} \mid \omega_i \in \Omega_i, i \in I \}$$

das kartesische Produkt der Grundmengen. Für $k \in I$ bezeichnet man die Abbildung

$$\pi_k \colon \Omega \to \Omega_k, \quad (\omega_i)_{i \in I} \mapsto \omega_k$$

als *Projektion* von Ω auf Ω_k. Mengen der Form

$$\pi_k^{-1}(A) := \{ \omega \in \Omega \mid \pi_k(\omega) \in A \}$$

für ein $A \subseteq \Omega_k$ bezeichnet man als *Zylindermengen*.

Die Produkt-σ-Algebra ist also die kleinste σ-Algebra auf Ω, bezüglich der alle Projektionen auf die Komponenten Ω_i $(i \in I)$ messbar sind.

Beispiel 4.18. *Ist $I = \{1, \ldots, n\}$ eine endliche Indexmenge, so sind Zylindermengen anschaulich:*

$$\pi_k^{-1}(A) = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{k-1} \times A \times \Omega_{k+1} \times \ldots \times \Omega_n.$$

Definition 4.19

Für eine Indexmenge I und für alle $k \in I$ seien $(\Omega_k, \mathcal{A}_k)$ messbare Räume und $\pi_k \colon \Omega := \bigtimes_{i \in I} \Omega_i \to \Omega_k$ die zugehörigen Projektionen. Dann heißt

$$\bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}_i := \sigma\left(\left\{ \pi_k^{-1}(A_k) \,\middle|\, A_k \in \mathcal{A}_k, k \in I \right\} \right)$$

Produkt-σ-Algebra über Ω.

Sind $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ messbare Räume und gilt $A_k \in \mathcal{A}_k$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$, so ist auch $A_1 \times \ldots \times A_n \in \bigotimes_{k=1}^n \mathcal{A}_k$, denn

$$\bigtimes_{k=1}^{n} A_k = \bigcap_{k=1}^{n} \pi_k^{-1}(A_k).$$

Somit sind die messbaren Quader enthalten in der Produkt-σ-Algebra, d.h.

$$\mathcal{H}_n := \left\{ \bigtimes_{k=1}^{n} A_k \;\middle|\; A_k \in \mathcal{A}_k, k \in \{1, \dots, n\} \right\} \subseteq \bigotimes_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k.$$

Es gilt sogar

$$\bigotimes_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k = \sigma(\mathcal{H}_n),$$

d.h. der Halbring[1] $\mathcal{H}_n$ ist ein Erzeuger der Produkt-σ-Algebra.
Fassen wir diese Überlegungen zu einem Satz zusammen.

Satz 4.20

Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ messbare Räume und seien $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{A}_1$ und $\mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{A}_2$ Erzeuger der σ-Algebren, d.h. $\mathcal{A}_1 = \sigma(\mathcal{M}_1)$ und $\mathcal{A}_2 = \sigma(\mathcal{M}_2)$. Dann sind folgende Mengensysteme Erzeuger von $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$:

1. $\{A_1 \times A_2 \,|\; A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$
2. $\{A_1 \times \Omega_2 \,|\; A_1 \in \mathcal{A}_1\} \cup \{\Omega_1 \times A_2 \,|\; A_2 \in \mathcal{A}_2\}$
3. $\{M_1 \times \Omega_2 \,|\; M_1 \in \mathcal{M}_1\} \cup \{\Omega_1 \times M_2 \,|\; M_2 \in \mathcal{M}_2\}$
4. $\{M_1 \times M_2 \,|\; M_1 \in \mathcal{M}_1, M_2 \in \mathcal{M}_2\}$, falls $\Omega_1 \in \mathcal{M}_1$ und $\Omega_2 \in \mathcal{M}_2$ ist.

Beispiel 4.21. *Seien $\Omega_1 = \Omega_2 = \{0, 1\}$ mit den σ-Algebren*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \{\emptyset, \Omega_1\}, \\ \mathcal{A}_2 &= \mathcal{P}(\Omega_2) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}. \end{aligned}$$

Wenn wir $A \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times A$ für beliebige Mengen A schreiben, haben wir somit folgende Produkt-σ-Algebra auf $\Omega_1 \times \Omega_2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 &= \sigma\left(\{\emptyset, \{0, 1\} \times \{0\}, \{0, 1\} \times \{1\}, \{0, 1\}^2\}\right) \\ &= \{\emptyset, \{(0, 0), (1, 0)\}, \{(0, 1), (1, 1)\}, \{0, 1\}^2\}. \end{aligned}$$

Nicht jede σ-Algebra auf einem Produktraum ist automatisch die Produkt-σ-Algebra.

Beispiel 4.22. *Seien wieder $\Omega_1 = \Omega_2 = \{0, 1\}$ und sei*

$$\mathcal{A} := \{\emptyset, \{(0, 0), (1, 1)\}, \{(1, 0), (0, 1)\}, \{0, 1\}^2\}.$$

Das System $\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra auf $\Omega_1 \times \Omega_2$, aber es ist keine Produkt-σ-Algebra. Da $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ aus Beispiel 4.21 die einzigen σ-Algebren auf $\{0, 1\}$ sind, können wir sämtliche Produkt-σ-Algebren beider überprüfen. $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ haben wir bereits berechnet.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_1 &= \\ \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_1 &= \\ \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_2 &= \end{aligned}$$

[1] Das Lemma, dass das kartesische Produkt von Halbringen wieder einen Halbring bildet, und dessen Beweis findet man auf Seite 306 in [Hen19].

Da keine dieser Produkt-σ-Algebren mit $\mathcal{A}$ übereinstimmt, kann $\mathcal{A}$ keine Produkt-σ-Algebra auf $\{0,1\}^2$ sein.

In Definition 2.24 haben wir die Borel'sche σ-Algebra $\mathcal{B}^n = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ als diejenige σ-Algebra eingeführt, welche von den halboffenen Quadern des $\mathbb{R}^n$ erzeugt wird. Daher führen wir folgendes Resultat ohne Beweis an:

Lemma 4.23

Ist $\mathcal{B}^n = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ für $n \in \mathbb{N}$ die Borel'sche σ-Algebra des $\mathbb{R}^n$, so gilt

$$\mathcal{B}^n = \bigotimes_{k=1}^{n} \mathcal{B}^1.$$

4.3.2 Das Produktmaß

Seien $(\Omega_k, \mathcal{A}_k, \mu_k) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda_1)$ für $k \in \{1,2\}$. Sind $A_1 = (a_1, b_1] \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 = (a_2, b_2] \in \mathcal{A}_2$, so sind $\mu_1(A_1) = b_1 - a_1$ und $\mu_2(A_2) = b_2 - a_2$ die Lebesgue-Maße (d.h. Längen) der Intervalle A_1 und A_2. Der Flächeninhalt des Rechtecks $A_1 \times A_2$ ist dann $\lambda_2(A_1 \times A_2) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) = \lambda_1(A_1) \cdot \lambda_2(A_2)$. Wir haben in Satz 3.28 das Lebesgue-Maß auf dem $\mathbb{R}^n$ als eindeutige Fortsetzung des Erzeugers $\mathcal{H}_n$ von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ definiert. Analog dazu können wir Produktmaße auf beliebigen Produkträumen mit den zugehörigen Produkt-σ-Algebren definieren.

Satz 4.24

Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ Maßräume mit σ-endlichen Maßen μ_1 und μ_2. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Maß μ auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, so dass

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$$

für alle $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$ gilt.

Beweis. Die Aussage folgt aus dem Fortsetzungssatz 3.25 und Satz 4.20 über die Erzeuger der Produkt-σ-Algebra. □

Definition 4.25

Das Maß μ auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, welches die Bedingung aus Satz 4.24 erfüllt, heißt *Produktmaß* von μ_1 und μ_2. Notation: $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$.

Für das Lebesgue-Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ schreibt man speziell $\lambda_n = \bigotimes_{k=1}^{n} \lambda_1 = \lambda_1^{\otimes n}$.

4.4 Maßtheoretische Induktion – Approximation Borel-messbarer Funktionen

Bemerkung 4.26 (Motivation über Integration). *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_A \colon X \to \mathbb{R}$ ist, wie wir bereits in Beispiel 4.13 gesehen haben, Borel-messbar, sofern $A \in \mathcal{A}$ ist. Greifen wir schon einmal ein Stück voraus und überlegen, was wir uns unter dem Integral $\int_X \mathbb{1}_A \mathrm{d}\mu$ vorstellen wollen. Soll der Integral-Begriff das uns bekannte Riemann-Integral enthalten, so müsste der Wert dieses Integrals gerade das Maß der Menge A gewichtet mit der Höhe der Funktion, also 1, sein, d.h.*

$$\int_X \mathbb{1}_A \mathrm{d}\mu = \mu(A).$$

Wie kann man diesen Ansatz so weiterführen, dass man einen Integralbegriff für alle "geeigneten" Funktionen erweitern kann? Die Idee ist, dass man die Funktionen, soweit dies möglich ist, mit Hilfe von Indikatorfunktionen approximiert. Diesen Vorgang, der auch unter dem Begriff maßtheoretische Induktion *bekannt ist, sehen wir uns in diesem Abschnitt an.*

Literatur zu diesem Abschnitt: u.a. Abschnitte 4.1.1 und 4.2 in [Kü16].

4.4.1 Einfache Funktionen

Definition 4.27

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Falls eine Funktion $f \colon X \to \mathbb{R}$ die Darstellung

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}(x), \quad x \in X,$$

besitzt für $n \in \mathbb{N}$, reelle Zahlen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und Mengen $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, so heißt f *einfache Funktion*.

Bemerkung 4.28. *Anschaulicher werden einfache Funktionen in der Literatur auch als* Treppenfunktionen *bezeichnet.*

Satz 4.29

Ist $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und sind $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ ($n \in \mathbb{N}$), so ist

$$f \colon X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$$

für jede Wahl reeller Zahlen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ Borel-messbar.

Wenn man auf die Einführung der Notation verzichtet, besagt dieser Satz, dass einfache Funktionen stets Borel-messbar sind.

Beweis. Das folgt sofort aus der Messbarkeit der Indikatorfunktionen $\mathbb{1}_{A_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und der wiederholten Anwendung von Lemma 4.10. □

Wir haben bereits mehrfach Vereinigungen von Mengen als disjunkte Mengen geschrieben. Mit diesem Gedanken können wir eine einfache Funktion auch als Linearkombination von Indikatorfunktionen disjunkter Mengen schreiben. Beispielweise gilt für $n = 2$:

$$a_1 \mathbb{1}_{A_1} + a_2 \mathbb{1}_{A_2} = a_1 \mathbb{1}_{A_1 \setminus A_2} + (a_1 + a_2) \mathbb{1}_{A_1 \cap A_2} + a_2 \mathbb{1}_{A_2 \setminus A_1}.$$

Falls $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ war, haben wir damit eine andere Darstellung der selben Funktion gefunden. Während im Allgemeinen die Darstellung einfacher Funktionen nicht eindeutig ist, gibt es eine eindeutige Darstellung einfacher Funktionen, wenn wir die zulässigen Koeffizienten und Mengen geeignet einschränken.

Lemma 4.30: kanonische Darstellung einfacher Funktionen

Ist $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine einfache Funktion auf einem messbaren Raum $(X, \mathcal{A})$, so existiert eine eindeutig bestimmte Darstellung der Form

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und paarweise disjunkten Mengen $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \setminus \{\emptyset\}$.

Beweis. Der Beweis ist nachzulesen auf S. 93-94 in [Kü16] (Beweis von Lemma 4.5). □

Sehen wir uns zum Abschluss eine der bekanntesten einfachen Funktionen an, welche jedoch im Riemann'schen Sinne nicht integrierbar ist. Der Name „einfache Funktion" täuscht also, wenn man meint, diese Funktionen seien in jeder Hinsicht einfach zu behandeln. Benannt ist folgende Funktion nach dem deutschen Mathematiker Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859).

Beispiel 4.31 (Dirichlet'sche Funktion). *Betrachten wir die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, welche gegeben ist durch $f(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$, d.h.*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in [0,1] \text{ und rational ist,} \\ 0, & \text{falls } x \in [0,1] \text{ und irrational ist.} \end{cases}$$

Da $\mathbb{Q}$ eine Borel-Menge ist, ist auch $\mathbb{Q} \cap [0,1] \in \mathcal{B}([0,1])$, d.h. die Dirichlet'sche Funktion f ist Borel-messbar. Sie ist jedoch an keiner Stelle $x \in [0,1]$ stetig und sie ist nicht integrierbar im Riemann'schen Sinne (vergleiche Ober- und Untersumme).

4.4.2 Nichtnegative Borel-messbare Funktionen

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass jede nichtnegative Borel-messbare Funktion durch eine Folge einfacher Funktionen approximiert werden kann.

Satz 4.32

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und sei $f\colon X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine nichtnegative Borel-messbare Abbildung. Dann existiert eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einfacher Funktionen mit

(i) $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in X$

(ii) $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in X$.

Beweis. Da f Borel-messbar ist, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, \ldots, n2^n\}$

$$A_{k,n} := \left\{ x \in X \;\middle|\; \tfrac{k}{2^n} < f(x) \leq \tfrac{k+1}{2^n} \right\} \in \mathcal{A},$$
$$B_n := \left\{ x \in X \;\middle|\; f(x) > n + \tfrac{1}{2^n} \right\} \in \mathcal{A},$$

da sich die Mengen als Urbilder von Borel-Mengen schreiben lassen. Damit sind für $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n2^n} \tfrac{k}{2^n} \mathbb{1}_{A_{k,n}}(x) + n\mathbb{1}_{B_n}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

einfache Funktionen. Zudem gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x). \tag{4.4.1}$$

Zudem gilt die Abschätzung

$$|f_n(x) - f(x)|\, \mathbb{1}_{\{f \leq n\}}(x) \leq \tfrac{1}{2^n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mit $n \to \infty$ folgt hieraus

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall x \in \left\{ x' \in \mathbb{R} \,\middle|\, f(x') < \infty \right\}.$$

Andererseits gilt

$$f_n(x) = n, \quad \forall x \in \left\{ x' \in \mathbb{R} \,\middle|\, f(x') = \infty \right\},$$

d.h. auch Eigenschaft (ii) ist erfüllt. □

4.4.3 Approximation Borel-messbarer Funktionen

Abschließend wollen wir noch sagen, wie man eine beliebige Borel-messbare Funktion approximieren. Dafür erinnern wir an die Notationen für Positiv- und Negativteil von Funktionen $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f^-(x) := -\min\{f(x), 0\} = \begin{cases} -f(x), & \text{falls } f(x) \leq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit dieser Notation gilt $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und sowohl Positiv- als auch Negativteil sind nichtnegative Borel-messbare Funktionen – diese können wir also jeweils durch einfache Funktionen approximieren wie im vorherigen Abschnitt gesehen.

Fassen wir die Methode der maßtheoretischen Induktion, wie sie für Beweise und die Konstruktion des Lebesgue-Integrals verwendet wird, zusammen.

Maßtheoretische Induktion

Sei $\mathcal{M}(X)$ die Menge der Borel-messbaren Funktionen $f \colon X \to \mathbb{R}$, wobei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum sei. Eine Aussage $A(f)$, welche von einer Funktion $f \in \mathcal{M}$ abhängt, gilt für alle $f \in \mathcal{M}$, falls folgende Schritte durchgeführt werden können:

1. Aussage $A(f)$ gilt für alle Indikatorfunktionen aus $\mathcal{M}$;
2. Aussage $A(f)$ gilt für alle nichtnegativen einfachen Funktionen aus $\mathcal{M}$;
3. Aussage $A(f)$ gilt für alle nichtnegativen Funktionen aus $\mathcal{M}$;
4. Aussage $A(f)$ gilt für alle Funktionen $f \in \mathcal{M}$.

4.5 Aufgaben

Aufgabe 1. *Zeigen Sie die Äquivalenz (1) $\iff$ (3) aus Satz 4.4.*

Aufgabe 2. *Zeigen Sie, dass die Verknüpfung messbarer Abbildungen wieder messbar ist, d.h. Satz 4.7.*

Aufgabe 3. *Beweisen Sie die Gültigkeit von Gleichung* (4.2.2) *aus dem Beweis von Satz 4.9.*

Aufgabe 4. *Zeigen Sie folgende Aussagen aus Lemma 4.10 unter Beachtung der dort genannten Voraussetzungen:*

a) *Ist $f\colon X \to \mathbb{R}$ Borel-messbar und $c \in \mathbb{R}$ beliebig, so ist auch $c \cdot f$ Borel-messbar.*
b) *Sind $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ Borel-messbar, so ist auch $\max\{f, g\}$ Borel-messbar.*
c) *Ist $f\colon X \to \mathbb{R}$ Borel-messbar, so ist auch $|f|$ messbar.*

Hinweis: *Man kann den Betrag $|f|$ einer reellwertigen Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ auch mit Hilfe des Maximum formulieren und so Teil b) für c) verwenden.*

Aufgabe 5. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(Y, \mathcal{B})$ ein messbarer Raum und $f\colon X \to Y$ eine $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbare Abbildung. Für beliebige Mengen $B \in \mathcal{B}$ definieren wir eine Mengenfunktion $\mu^f\colon \mathcal{B} \to [0, \infty]$ via*

$$\mu^f(B) := \mu(f^{-1}(B)) = \mu(\{x \in X \mid f(x) \in B\}), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Zeigen Sie, dass μ^f ein Maß ist.

Aufgabe 6. *Sei $\mathcal{B} := \mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ und sei*

$$\overline{\mathcal{B}} := \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) := \sigma(\{B \cup M \mid B \in \mathcal{B}, M \subseteq \{\pm\infty\}\}).$$

Überprüfen Sie, dass

$$\overline{\mathcal{B}} = \{B \cup M \mid B \in \mathcal{B}, M \subseteq \{\pm\infty\}\}$$

gilt, d.h. diese Menge ist bereits eine σ-Algebra.

Aufgabe 7. *Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und sei $M \subseteq \Omega$ eine nichtleere Teilmenge von Ω. Überprüfen Sie, dass die sogenannte* Spur-σ-Algebra

$$\mathcal{A}|_M := \{M \cap A \mid A \in \mathcal{A}\}$$

tatsächlich eine σ-Algebra ist.
Hinweis: *Überlegen Sie sich, was die Urbild-σ-Algebra der Abbildung $f\colon M \to \Omega$ mit $f(\omega) = \omega$ ist, d.h. $f^{-1}(\mathcal{A})$.*

Bemerkung 4.33. *Aus den beiden vorherigen Aufgaben folgt, dass $\overline{\mathcal{B}}|_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}$ ist.*

Aufgabe 8. *In Definition 4.17 wurden Zylindermengen definiert. Seien $\Omega_k = \mathbb{R}$ für $k \in \{1, 2, 3\}$. Wie sehen dann folgende Zylindermengen bzw. Schnitte von Zylindermengen aus?*

a) $\pi_3^{-1}(\{0\})$
b) $\pi_1^{-1}([-1, 1]) \cap \pi_2^{-1}([-1, 1]) \cap \pi_3^{-1}([-1, 1])$

Aufgabe 9. *Geben Sie zu der folgenden einfachen Funktion die laut Lemma 4.30 eindeutige kanonische Darstellung an:*

$$f(x) = 2 \cdot \mathbb{1}_{\left[0, \frac{3}{4}\right]}(x) + 4 \cdot \mathbb{1}_{\left[\frac{1}{4}, 1\right]}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 10. *Überprüfen Sie, dass die Ungleichungen aus* (4.4.1) *aus dem Beweis von Satz 4.32 korrekt sind.*

4.6 English terminology

Borel-messbar	Borel measurable
Messbarkeitskriterium	measurability criterion
Satz	Theorem
Korollar	Corollary
stetig	continuous
Verkettung / Verknüpfung / Komposition	composition
vektorwertig	vector valued
Quader	cuboid
numerische Funktion	numerical function
faire Münze	fair coin
Würfel	dice
Zylindermenge	cylinder set
einfache Funktion	simple function
Obersumme	upper (Riemann/Darboux) sum
Untersumme	lower (Riemann/Darboux) sum
Positivteil	positive part
Negativteil	negative part
maßtheoretische Induktion	measure theoretic induction

Kapitel 5

Das Lebesgue-Integral

Ziele

- ☐ Die Konstruktion des Lebesgue-Integrals über maßtheoretische Induktion kennen
- ☐ die wichtigsten Eigenschaften des Lebesgue-Integrals kennen
- ☐ die Räume $\mathcal{L}^p$ und L^p kennen, sowie deren wichtigste Eigenschaften

5.1 Definition des Integrals

5.1.1 Das Integral einfacher Funktionen

Wir wollen ein Integral definieren, welches das Riemann-Integral erweitert. Ist $A = [a, b]$ ein Intervall der Länge[2] $\lambda(A) = b - a$. Dann ist im Riemann'schen Sinne $(\mathcal{R}) \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x)\mathrm{d}x = \int_a^b 1\mathrm{d}x = 1 \cdot (b - a) = b - a$. Das gibt uns den Start für die Definition des Lebesgue-Integrals über maßtheoretische Induktion vor.

Definition 5.1

Sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine einfache Funktion auf einem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$, d.h.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}(x), \quad x \in X,$$

für $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Dann nennen wir die reelle Zahl

$$\int_X f\mathrm{d}\mu := \int_X f(x)\mu(\mathrm{d}x) := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(A_k)$$

Integral von f über X bezüglich des Maßes μ.

Insbesondere gilt (indem man $n = 1$ setzt) für jede Menge $A \in \mathcal{A}$ damit $\int_X \mathbb{1}_A \mathrm{d}\mu = \mu(A)$.

Beispiel 5.2 (Dirichlet'sche Funktion). *Wie wir in Beispiel 4.31 gesehen haben, ist die Dirichlet'sche Funktion $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f := \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ nicht Riemann-Integrierbar. Im Sinne der obigen Definition gilt jedoch*

$$\int_{[0,1]} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \mathrm{d}\lambda = \lambda(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0.$$

[2] Ob ein Intervall offen, abgeschlossen oder halboffen spielt hierbei keine Rolle, da dies das Lebesgue-Maß des Intervalls nicht verändert.

Wir haben bereits gesehen, dass es verschiedene Darstellungsmöglichkeiten für einfache Funktionen gibt. Es wäre zunächst denkbar, dass für verschiedene Darstellungsformen verschiedene Werte des Integrals herauskämen – in diesem Fall wäre das Integral nicht *wohldefiniert*. Sehen wir uns dafür zunächst ein Beispiel an bevor wir zeigen, dass das bei dieser Definition tatsächlich nicht passieren kann.

Beispiel 5.3. *Betrachten wir folgende einfache Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:*

$$f(x) = 2 \cdot \mathbb{1}_{\left[0,\frac{3}{4}\right]}(x) + 4 \cdot \mathbb{1}_{\left[\frac{1}{4},1\right]}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nach Definition ist

$$\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\lambda = 2 \cdot \lambda\left(\left[0, \tfrac{3}{4}\right]\right) + 4 \cdot \lambda\left(\left[\tfrac{1}{4}, 1\right]\right) = 2 \cdot \tfrac{3}{4} + 4 \cdot \tfrac{3}{4} = \tfrac{9}{2}.$$

Die in Lemma 4.30 eingeführte kanonische Darstellung von f ist

$$f(x) = 2 \cdot \mathbb{1}_{\left[0,\frac{1}{4}\right)}(x) + 6 \cdot \mathbb{1}_{\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]}(x) + 4 \cdot \mathbb{1}_{\left(\frac{3}{4},1\right]}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\lambda &= \\ &= \end{aligned}$$

Lemma 5.4

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine einfache Funktion mit zwei verschiedenen Darstellungen, d.h.

$$f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k} = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mathbb{1}_{B_j}$$

für $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$ und $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \in \mathcal{A}$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(A_k) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(B_j),$$

d.h. das Integral einer einfachen Funktion aus Definition 5.1 ist unabhängig von der gewählten Darstellung der einfachen Funktion, es ist also wohldefiniert.

Beweis. Wir setzen zunächst

$$A_{n+1} := B_1, \dots, A_{n+m} := B_m$$

und definieren damit das Mengensystem

$$\mathcal{C} := \left\{ \bigcap_{k=1}^{n+m} M_k \;\middle|\; M_k \in \{A_k, A_k^c\}, k = 1, \dots, n+m \right\} =: \{C_1, \dots, C_r\}.$$

Diese Mengen sind paarweise disjunkt (da für jede zwei Mengen immer ein Index k existiert, so dass die eine Teilmenge von A_k und die andere von A_k^c ist) und sie liefern uns Zerlegungen von $A_1, \dots, A_n$ in paarweise disjunkte Mengen, denn für jedes $k \in K := \{1, \dots, n\}$ gilt mit der Notation $J := \{1, \dots, r\}$

$$A_k = \dot{\bigcup_{j \in J\colon C_j \subseteq A_k}} C_j.$$

Setzen wir

$$\gamma_j := \sum_{k \in K\colon C_j \subseteq A_k} \alpha_k \quad \text{für} \quad j \in J,$$

so erhalten wir die Darstellung

$$f = \sum_{j \in J} \gamma_j \mathbb{1}_{C_j}.$$

Zudem gilt nun

$$\sum_{j \in J} \gamma_j \mu(C_j) = \sum_{j \in J} \sum_{k \in K\colon C_j \subseteq A_k} \alpha_k \mu(C_j) = \sum_{k \in K} \alpha_k \sum_{j \in J\colon C_j \subseteq A_k} \mu(C_j) = \sum_{k \in K} \alpha_k \mu(A_k).$$

Eine analoge Argumentation für die Mengen $(B_k)_{k \in \{1,\dots,m\}}$ liefert das gewünschte Resultat. □

Bemerkung 5.5. *Sind $(A_k)_{k=1,\dots,n}$ und $(B_j)_{j=1,\dots,m}$ Zerlegungen von X in disjunkte Mengen, d.h. $A_k \cap A_i = \emptyset$ und $B_j \cap B_i = \emptyset$ für $k \neq i$ und $j \neq i$ und $X = \bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcup_{j=1}^m B_j$, so gibt es einen etwas einfacheren Beweis, der teilweise in der Literatur zu finden ist:*
Nach Konstruktion gelten für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ und $j \in \{1, \dots, m\}$ die disjunkten Zerlegungen

$$A_k = \bigcup_{j=1}^m (A_k \cap B_j) \quad \textit{und} \quad B_j = \bigcup_{k=1}^n (A_k \cap B_j).$$

Zudem ist für jedes $x \in A_k \cap B_j$ gerade $f(x) = \alpha_k = \beta_j$. Damit ist

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(A_k) =$$

$$= \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(B_j).$$

Beispiel 5.6 (Wahrscheinlichkeitsraum über einer endlichen Menge)**.** *Seien $\Omega = \{1, \dots, n\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω, d.h. ein Maß mit der zusätzlichen Eigenschaft $\mu(\Omega) = 1$. Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable, also eine messbare Funktion. (Messbarkeit ist wegen $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ für jede solche Abbildung gegeben.)*
Dann ist X eine einfache Funktion, denn X hat die Darstellung

$$X(\omega) = \sum_{k=1}^n X(k) \mathbb{1}_{\{k\}}(\omega).$$

Damit ist

$$\int_\Omega X \mathrm{d}\mathbb{P} = \sum_{k=1}^n X(k) \mathbb{P}(\{k\}).$$

Bevor wir von einfachen Funktionen zu nichtnegativen messbaren Funktionen übergehen können, müssen noch feststellen, ob Vielfache, Summen und Grenzwerte von Folgen einfacher Funktionen wieder einfach sind und wie sich diese Operationen auf das Integral auswirken.

Notation

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Dann bezeichnen wir mit

- $\mathcal{M} := \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ die Menge der Borel-mesbaren Funktionen von X nach $\mathbb{R}$;
- $\mathcal{E} := \mathcal{E}(X, \mathcal{A})$ die Menge der einfachen Funktionen auf $(X, \mathcal{A})$;
- $\mathcal{M}^+ := \mathcal{M}(X, \mathcal{A})^+$ die nichtnegativen Borel-messbaren Funktionen von X nach $\mathbb{R}_+$;
- $\mathcal{E}^+ := \mathcal{E}(X, \mathcal{A})^+$ die nichtnegativen einfachen Funktionen auf $(X, \mathcal{A})$.

Lemma 5.7

Seien $f, g \in \mathcal{E} := \mathcal{E}(X, \mathcal{A})$ einfache Funktionen auf einem messbaren Raum $(X, \mathcal{A})$. Dann gilt:

$$f + g,\ f \cdot g,\ \max\{f, g\},\ \min\{f, g\} \in \mathcal{E} \quad \text{und} \quad |f|,\ f^+,\ f^- \in \mathcal{E}^+.$$

Sind $f, g \in \mathcal{E}^+$ und $a, b \in [0, \infty]$, so sind auch

$$f \cdot g,\ af + bg \in \mathcal{E}^+.$$

Beweis. Die Messbarkeit der genannten Abbildungen haben wir bereits im vorherigen Abschnitt überprüft und die Darstellung als einfache Funktion ist klar. □

Satz 5.8

Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $f, g \in \mathcal{E} = \mathcal{E}(X, \mathcal{A})$.

1. Ist $c \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\int_X cf \mathrm{d}\mu = c \int_X f \mathrm{d}\mu \quad \text{und} \quad \int_X (f + g) \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu + \int_X g \mathrm{d}\mu.$$

2. Gilt $f \leq g$, d.h. $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in X$, dann ist

$$\int_X f \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \mathrm{d}\mu.$$

Bemerkung 5.9. *Es gibt diese Aussage in verschiedenen Fassungen – beispielsweise für beliebige einfache Funktionen auf einem endlichen Maßraum oder für nichtnegative einfache Funktionen auf einem beliebigen Maßraum (mit der Zusatzannahme $c \geq 0$). Je nachdem, welche Anforderungen wir haben, müssen wir darauf achten, dass keine nicht definierten Ausdrücke wie $(+\infty) \cdot (-\infty)$ oder $\infty - \infty$ auftauchen.*

Beweis. Wir zeigen nur 1. Sei $f \in \mathcal{E}$ mit Darstellung $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}$ für $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$(cf)(x) = \sum_{k=1}^n (c\alpha_k) \mathbb{1}_{A_k}(x), \quad x \in X$$

und somit

$$\int_X (cf) \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^n (c\alpha_k) \mu(A_k) = c \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(A_k) = c \int_X f \mathrm{d}\mu.$$

Seien nun $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}$ und $g = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbb{1}_{B_j}$. Da das Integral nicht von der Darstellung abhängt, können wir annehmen, dass jeweils $(A_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ und $(B_j)_{j\in\{1,\dots,m\}}$ Partitionen von X sind. Damit gilt dann

$$f + g = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha_k + \beta_j) \mathbb{1}_{A_k \cap B_j}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\int_X (f+g)\mathrm{d}\mu &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha_k + \beta_j)\mu(A_k \cap B_j) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_k \mu(A_k \cap B_j) + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \beta_j \mu(A_k \cap B_j) \\
&= \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu\left(\bigcup_{j=1}^m (A_k \cap B_j)\right) + \sum_{j=1}^m \beta_j \mu\left(\bigcup_{k=1}^n (A_k \cap B_j)\right) \\
&= \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(A_k) + \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(B_j) \\
&= \int_X f\mathrm{d}\mu + \int_X g\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

□

5.1.2 Das Integral nichtnegativer messbarer Funktionen

Laut Satz 4.32 können wir nichtnegative Borel-messbare Funktionen durch Folgen nichtnegativer einfacher Funktionen approximieren. Ist also auf einem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ $f \in \mathcal{M}^+$ und gilt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}^+$ mit $f_n \uparrow f$ (punktweise), so definieren wir

$$\int_X f\mathrm{d}\mu := \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu.$$

Bevor wir dies jedoch als Definition festhalten können, müssen wir feststellen, ob das Integral nichtnegativer Borel-messbarer Funktionen so wohldefiniert ist, d.h. ob die Definition von der Wahl der approximierenden Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig ist.

Lemma 5.10

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien $f \in \mathcal{E}^+$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}^+$ mit $g_n \leq g_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gilt $f \leq \lim_{n\to\infty} g_n$, so folgt daraus

$$\int_X f\mathrm{d}\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Sei $f = \sum_{k=1}^m \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}$ mit $\alpha_1, \dots, \alpha_m \geq 0$ und $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$. Die Beweisidee besteht darin, eine aufsteigende Folge von Mengen zu konstruieren, die gegen X strebt und dann die Stetigkeit (von unten) des Maßes μ zu verwenden. Für ein $\beta \in (0,1)$ setze

$$B_n := \{x \in X \mid g_n(x) \geq \beta \cdot f(x)\} \in \mathcal{A}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Es gilt $B_n \uparrow X$, d.h. $B_n \subseteq B_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = X$, denn

- ist $f(x) = 0$, dann ist $x \in B_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$;

- ist $f(x) > 0$, dann ist $\lim_{n\to\infty} g_n(x) \geq f(x) > \beta f(x)$, d.h. $x \in B_n$ für n groß genug.

Zudem gilt nach Konstruktion $g_n \geq \beta f \mathbb{1}_{B_n}$. Mit der Stetigkeit des Maßes μ von unten[1] (siehe Satz 3.13) folgt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_X g_n \mathrm{d}\mu \geq \lim_{n\to\infty} \int_X \beta f \mathbb{1}_{B_n} \mathrm{d}\mu = \beta \lim_{n\to\infty} \int_X f \mathbb{1}_{B_n} \mathrm{d}\mu \\ = \beta \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^m \alpha_k \mu(A_k \cap B_n) = \beta \sum_{k=1}^m \alpha_k \lim_{n\to\infty} \mu(A_k \cap B_n) \\ = \beta \sum_{k=1}^m \alpha_k \mu(A_k) = \beta \int_X f \mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Da $\beta \in (0,1)$ beliebig war, folgt mit $\beta \uparrow 1$ die Behauptung. □

Aus diesem Lemma können wir schlussfolgern, dass die Definition des Integrals nichtnegativer messbarer Funktionen als Grenzwert der Integrale einer Folge approximierender einfacher Funktionen unabhängig von der Folge der approximierenden Funktionen ist.

Korollar 5.11

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei wachsende Folgen in $\mathcal{E}^+$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ für alle $x \in X$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \mathrm{d}\mu$$

Beweis. Da beide Folgen wachsend sind, gilt insbesondere $f_k \leq \lim_{n\to\infty} g_n$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so dass wir aus dem vorherigen Lemma

$$\int_X f_k \mathrm{d}\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \mathrm{d}\mu, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

schlussfolgern können. Daraus folgt durch Grenzwertbildung auf der linken Seite

$$\lim_{k\to\infty} \int_X f_k \mathrm{d}\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \mathrm{d}\mu.$$

Vertauschen wir die Rollen der Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so erhalten wir die umgedrehte Ungleichung und somit die Behauptung. □

Definition 5.12

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $f \in \mathcal{M}^+$ eine nichtnegative messbare Funktion. Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}^+$ eine Folge einfacher Funktionen mit $f_n \uparrow f$, so nennen wir

$$\int_X f \mathrm{d}\mu := \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$$

das Integral von f über X bezüglich μ.

[1] Gilt $\mu(B_n) < \infty$ für alle n, so kann Satz 3.13 verwendet werden. Gilt $\mu(B_{n^*}) = \infty$ für ein $n^* \in \mathbb{N}$, so gilt wegen der Monotonie des Maßes $\mu(B_n) = \infty$ für alle $n \geq n^*$ und damit insbesondere $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \infty = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$, wenn man den Wert $+\infty$ als Wert der bestimmt divergenten Folge $(\mu(B_n))_{n\in\mathbb{N}}$ interpretiert.

Wie schon für einfache Funktionen sammeln wir wieder Eigenschaften des Integrals nichtnegativer messbarer Funktionen.

Satz 5.13

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien $f, g \in \mathcal{M}^+$ nichtnegative Borel-messbare Funktionen.

1. Sind $a, b \geq 0$, dann gilt
$$\int_X (af + bg) \mathrm{d}\mu = a \int_X f \mathrm{d}\mu + b \int_X g \mathrm{d}\mu.$$
2. Ist $f \leq g$, so ist $\int_X f \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \mathrm{d}\mu$.
3. Es gilt $\int_X f \mathrm{d}\mu = 0$ genau dann, wenn $\mu(\{f > 0\}) = 0$ ist.

Beweis.

1. Aus Kapitel 4 wissen wir bereits, dass $af + bg$ messbar, also auf Grund der Vorzeichen aller beteiligten Konstanten und Funktionen in $\mathcal{M}^+$ ist.

   Sind $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathcal{E}^+$ mit $f_n \uparrow f$ und $g_n \uparrow g$, so gilt auch $af_n + bg_n \uparrow af + bg$. Folglich gilt
$$\begin{aligned}\int_X (af + bg) \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X (af_n + bg_n) \mathrm{d}\mu &\overset{\text{Satz 5.8}}{=} \lim_{n\to\infty} \left(a \int_X f_n \mathrm{d}\mu + b \int_X g_n \mathrm{d}\mu \right) \\ &= a \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu + b \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \mathrm{d}\mu = a \int_X f \mathrm{d}\mu + b \int_X g \mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$
   wobei wir in der Anwendung von Satz 5.8 wegen der Nichtnegativität darauf verzichten können, dass der Maßraum endlich sein soll. Da $\infty + \infty = \infty$ und $\infty \cdot c = \infty$ für $c > 0$ definiert sind, gelten alle Ausdrücke auch dann, wenn der Wert $+\infty$ angenommen wird.
2. Setzen wir $h := (g - f)\mathbb{1}_{\{f<\infty\}} \in \mathcal{M}^+$, so ist $g = f + h$ und somit nach 1.
$$\int_X f \mathrm{d}\mu \leq \int_X f \mathrm{d}\mu + \int_X h \mathrm{d}\mu = \int_X g \mathrm{d}\mu.$$
3. Seien $A := \{f > 0\}$ und $A_n := \{f > \frac{1}{n}\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Damit gilt $A_n \uparrow A$ für $n \to \infty$.
   Ist $\int_X f \mathrm{d}\mu = 0$, so gilt wegen $\frac{1}{n}\mathbb{1}_{A_n} \leq f$ und 2. die Abschätzung
$$0 \leq \tfrac{1}{n}\mu(A_n) = \int_X \tfrac{1}{n}\mathbb{1}_{A_n} \mathrm{d}\mu \leq \int_X f \mathrm{d}\mu = 0,$$
   woraus $\mu(A_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt. Mit der Stetigkeit des Maßes μ von unten folgt wegen $A_n \uparrow A$
$$\mu(A) = 0.$$
   Gilt andererseits $\mu(A) = 0$, so folgt mit $f \leq \infty \cdot \mathbb{1}_A$ und 2.
$$0 \leq \int_X f \mathrm{d}\mu \leq \int_X \infty \cdot \mathbb{1}_A \mathrm{d}\mu = \infty \cdot \mu(A) = \infty \cdot 0 = 0,$$
   woraus $\int_X f \mathrm{d}\mu = 0$ folgt.

□

Satz 5.14: Satz von der monotonen Konvergenz

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge nichtnegativer Borel-messbarer Funktionen auf $(X, \mathcal{A})$ mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$, die punktweise gegen f konvergiert. Dann ist f eine Borel-messbare $\overline{\mathbb{R}}$-wertige Funktion und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu.$$

Bemerkung 5.15.

- *Eine Folge von Funktionen* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* punktweise *gegen* f*, wenn* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *für alle* $x \in X$ *gilt.*
- *Zugelassen ist dabei auch der Fall* $\int_X f \mathrm{d}\mu = \infty$.

Beweis. Sei $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in X$. Dann ist nach Voraussetzung $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ und das Supremum messbarer Funktionen ist nach Satz 4.14 selbst messbar, also ist $f \in \mathcal{M}^+$. Aus $f_n \leq f$ folgt mit dem vorherigen Satz $\int_X f_n \mathrm{d}\mu \leq \int_X f \mathrm{d}\mu$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Folglich haben wir

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu \leq \int_X f \mathrm{d}\mu.$$

Für die umgekehrte Abschätzung sei $(g_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}^+$ eine Folge nichtnegativer einfacher Funktionen mit $g_k \uparrow f$. Für festes $k \in \mathbb{N}$ und $\beta > 1$ definieren wir

$$A_n := \{x \in X \mid \beta f_n(x) \geq g_k(x)\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nach Konstruktion gilt $A_n \uparrow X$ und $\beta f_n \geq g_k \mathbb{1}_{A_n} \uparrow g_k$. Für die Integrale folgt somit

$$\int_X g_k \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_k \mathbb{1}_{A_n} \mathrm{d}\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X \beta f_n \mathrm{d}\mu = \beta \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu.$$

Da $\beta > 1$ beliebig war, folgt mit $\beta \downarrow 1$

$$\int_X g_k \mathrm{d}\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Mit $k \to \infty$ folgt wegen $g_k \uparrow f$ hieraus

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X g_k \mathrm{d}\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu.$$

□

Bemerkung 5.16. *Das Resultat werden wir später noch etwas verallgemeinern indem wir nur* $f_n \uparrow f$ μ*-fast überall fordern. Dieser Satz ist dann auch als* Satz von Beppo Levi *bekannt.*

Beispiel 5.17. *Auf die Monotonie kann man nicht verzichten. Dies kann man anhand des Beispiels* $f_n = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]}$ *auf* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ *überprüfen. Die Grenzfunktion ist gegeben durch*

$$f(x) = \qquad\qquad x \in \mathbb{R}.$$

Es gilt damit

$$\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\lambda =$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \mathrm{d}\lambda =$$

5.1.3 Das Integral messbarer Funktionen

Ist $f \in \mathcal{M}$ messbar, aber nicht notwendigerweise nichtnegativ, so gilt die Zerlegung $f = f^+ - f^-$ mit $f^+, f^- \in \mathcal{M}^+$. Damit können wir das Integral $\int_X f \mathrm{d}\mu$ wie folgt definieren:

Definition 5.18

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Borel-messbare Funktion. Falls $\int_X f^+ \mathrm{d}\mu < \infty$ und $\int_X f^- \mathrm{d}\mu < \infty$ sind, heißt f *integrierbar* (bezüglich μ) und wir definieren das Integral von f über X bezüglich μ als

$$\int_X f(x)\mu(\mathrm{d}x) := \int_X f \mathrm{d}\mu := \int_X f^+ \mathrm{d}\mu - \int_X f^- \mathrm{d}\mu.$$

Ist nur eines der beiden Integrale $\int_X f^+ \mathrm{d}\mu$, $\int_X f^- \mathrm{d}\mu$ endlich, so nennen wir f *quasi-integrierbar* (bezüglich μ).
Ist $\int_X f^- \mathrm{d}\mu < \infty$, aber $\int_X f^+ \mathrm{d}\mu = \infty$, so setzen wir $\int_X f \mathrm{d}\mu := \infty$.
Ist $\int_X f^+ \mathrm{d}\mu < \infty$, aber $\int_X f^- \mathrm{d}\mu = \infty$, so setzen wir $\int_X f \mathrm{d}\mu := -\infty$.

Notation

Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ Borel-messbar. Ist $A \in \mathcal{A}$ und ist $\mathbb{1}_A f$ integrierbar bezüglich μ, so schreiben wir

$$\int_A f \mathrm{d}\mu := \int_X \mathbb{1}_A f \mathrm{d}\mu.$$

Satz 5.19

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann sind folgende Aussagen über eine messbare Funktion $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ äquivalent:

(1) f ist integrierbar;
(2) f^+ und f^- sind integrierbar;
(3) es gibt integrierbare Funktionen $u, v \in \mathcal{M}^+$ mit $f = u - v$;
(4) es gibt eine integrierbare Funktion $g \in \mathcal{M}^+$ mit $|f| \leq g$;
(5) $|f|$ ist integrierbar.

Beweis. Nach Definition der Integrierbarkeit gilt (1) $\iff$ (2).

(2) $\Longrightarrow$ (3): Man setzt $u = f^+$ und $v = f^-$ und erhält die gewünschte Aussage.

(3) $\Longrightarrow$ (4): Gilt $f = u - v$ für integrierbare Funktionen $u, v \in \mathcal{M}^+$, so folgt

$$f = u - v \leq u + v \quad \text{und} \quad -f = v - u \leq v + u.$$

Setzt man $g = u + v$, so erhält man die gewünschte Aussage.

(4) $\Longrightarrow$ (5): Ist $f \in \mathcal{M}$, so ist $|f| \in \mathcal{M}^+$. Gilt nun $|f| \leq g$ für $|f|, g \in \mathcal{M}^+$, so folgt mit Satz 5.13 und der Integrierbarkeit von g

$$\int_X |f| \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \mathrm{d}\mu < \infty.$$

Folglich ist $|f|$ integrierbar.

(5) $\Longrightarrow$ (2): Aus $f^+ \leq |f|$, $f^- \leq |f|$ und der Integrierbarkeit von $|f|$ können wir mit Satz 5.13 folgern, dass

$$\int_X f^+ \mathrm{d}\mu \leq \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty \quad \text{und} \quad \int_X f^- \mathrm{d}\mu \leq \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$$

gilt. Folglich sind f^+ und f^- integrierbar.

□

Sehen wir uns als Beispiel die Integration bezüglich des Dirac-Maßes an.

Lemma 5.20

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und für $x^* \in X$ sei δ_{x^*} das Dirac-Maß zu x^*, d.h. für $A \in \mathcal{A}$ gilt

$$\delta_{x^*}(A) = \begin{cases} 1, & x^* \in A \\ 0, & x^* \notin A. \end{cases}$$

Dann ist jede reellwertige Funktion $f \in \mathcal{M}$ integrierbar und es gilt

$$\int_A f \mathrm{d}\delta_{x^*} = f(x^*)\delta_{x^*}(A), \quad A \in \mathcal{A}. \tag{5.1.1}$$

Zudem ist jede messbare Funktion f mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$ quasi-integrierbar und integrierbar genau dann, wenn $f(x^*) \in \mathbb{R}$ ist.

Beweis. Der Beweis erfolgt über maßtheoretische Induktion, d.h. der Wert des Integrals und im Zusammenhang damit die Frage der Integrierbarkeit wird für Indikatorfunktion, nichtnegative einfache Funktionen, nichtnegative messbare Funktionen und beliebige messbare Funktionen untersucht. Wir zeigen zunächst nur (5.1.1) für $A = X$ und zeigen die Formel für beliebiges $A \in \mathcal{A}$ im Anschluss.

1. Ist $A \in \mathcal{A}$ und $f = \mathbb{1}_A$, so gilt
$$\int_X f \mathrm{d}\delta_{x^*} = \int_X \mathbb{1}_A \mathrm{d}\delta_{x^*} = \delta_{x^*}(A) = \mathbb{1}_A(x^*) = f(x^*).$$
2. Ist $f \in \mathcal{E}^+$ mit Darstellung $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$ und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, so gilt
$$\int_X f \mathrm{d}\delta_{x^*} =$$
3. Ist $f \in \mathcal{M}^+$ und ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}^+$ mit $f_n \uparrow f$, dann gilt
$$\int_X f \mathrm{d}\delta_{x^*} =$$
4. Ist $f \in \mathcal{M}$, so gilt für Positiv- und Negativteil von f nach 3.
$$\int_X f^+ \mathrm{d}\delta_{x^*} = f^+(x^*) \quad \text{und} \quad \int_X f^- \mathrm{d}\delta_{x^*} = f^-(x^*).$$
Mindestens einer dieser Werte ist Null, daher ist f in jedem Fall quasi-integrierbar. Falls $|f(x^*)| = f^+(x^*) + f^-(x^*) < \infty$ ist, ist f integrierbar mit
$$\int_X f \mathrm{d}\delta_{x^*} =$$

Für beliebiges $A \in \mathcal{A}$ und $f \in \mathcal{M}$ gilt damit

$$\int_A f \mathrm{d}\delta_{x^*} = \int_X \mathbb{1}_A f \mathrm{d}\delta_{x^*} \overset{4.}{=} \mathbb{1}_A(x^*) f(x^*) = f(x^*)\delta_{x^*}(A).$$

□

Um die Eigenschaft einer Funktion, integrierbar bezüglich einem Maß über einer Menge zu sein, kürzer fassen zu können, führen wir die Menge der integrierbaren Funktionen ein.

Notation

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann bezeichnen wir die Menge der bezüglich μ integrierbaren reellwertigen Funktionen mit

$$\mathcal{L}^1 := \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) := \left\{ f \colon X \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \in \mathcal{M}, \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty \right\}.$$

Bemerkung 5.21.

- *Wir verwenden die Notation $\mathcal{L}^1$ statt $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, wenn der Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ aus dem Kontext bekannt ist.*
- *Man kann die Definition von $\mathcal{L}^1$ auf auf $\mathbb{C}$-wertige messbare Funktionen erweitern. Da wir uns in diesem Kurs jedoch bisher auf reellwertige Funktionen beschränkt haben, soll das vorerst genügen.*
- *Wir werden gleich feststellen, dass $\mathcal{L}^1$ ein Vektorraum ist. Dafür müssen wir überprüfen, dass zu $f, g \in \mathcal{L}^1$ auch $af + bg \in \mathcal{L}^1$ ist für $a, b \in \mathbb{R}$.*

Satz 5.22

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

1. Sind $f, g \in \mathcal{L}^1 := \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $a \in \mathbb{R}$, so sind auch $af, f + g \in \mathcal{L}^1$ und es gilt
$$\int_X (af) \mathrm{d}\mu = a \int_X f \mathrm{d}\mu \quad \text{und} \quad \int_X (f + g) \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu + \int_X g \mathrm{d}\mu.$$
2. Sind $f, g \in \mathcal{L}^1$ mit $f \leq g$, so gilt
$$\int_X f \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \mathrm{d}\mu.$$
3. Ist $f \in \mathcal{L}^1$, so gilt
$$\left| \int_X f \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu.$$
4. Sind $f \in \mathcal{L}^1$ und $A \in \mathcal{A}$, so gilt
$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \int_A f \mathrm{d}\mu + \int_{A^c} f \mathrm{d}\mu.$$

Beweis.

1. Ist $a \geq 0$, so ist $(af)^+ = af^+$ und $(af)^- = af^-$. Damit ist $af \in \mathcal{L}^1$, denn es gilt

$$\int_X af \mathrm{d}\mu = \int_X af^+ \mathrm{d}\mu - \int_X af^- \mathrm{d}\mu \overset{\text{Satz 5.13}}{=} a \left(\int_X f^+ \mathrm{d}\mu - \int_X f^- \mathrm{d}\mu \right) = a \int_X f \mathrm{d}\mu.$$

Für $a < 0$ folgt die analoge Aussage unter Verwendung der Beziehungen $(af)^+ = |a| f^+$ und $(af)^- = |a| f^-$.

Um die Integrierbarkeit von $f + g$ zu zeigen, betrachten wir die Funktionen $u := f^+ + g^+$ und $v := f^- + g^-$. Es gilt

$$f + g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-) = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-) = u - v$$

und der Konstruktion nach sind $u, v \in \mathcal{M}^+$. Nach Satz 5.13 sind zudem $u, v \in \mathcal{L}^1$ und aus

$$0 \leq (f+g)^+ \leq f^+ + g^+ = u \quad \text{und} \quad 0 \leq (f+g)^- \leq f^- + g^- = v$$

folgt mit Teil (4) von Satz 5.19

$$(f+g)^+, (f+g)^- \in \mathcal{L}^1, \quad \text{d.h.} \quad \int_X (f+g)^+ \mathrm{d}\mu < \infty \text{ und } \int_X (f+g)^- \mathrm{d}\mu < \infty.$$

Insgesamt folgt damit $f + g \in \mathcal{L}^1$. Zudem folgt aus $(f+g)^+ - (f+g)^- = f + g = u - v$ sofort $(f+g)^+ + v = (f+g)^- + u$ und somit, da alle Funktionen in $\mathcal{M}^+$ sind,

$$\int_X (f+g)^+ \mathrm{d}\mu + \int_X v \mathrm{d}\mu = \int_X (f+g)^- \mathrm{d}\mu + \int_X u \mathrm{d}\mu.$$

Hieraus folgt nun

$$\begin{aligned}
\int_X (f+g) \mathrm{d}\mu &= \int_X (f+g)^+ \mathrm{d}\mu - \int_X (f+g)^- \mathrm{d}\mu \\
&= \int_X u \mathrm{d}\mu - \int_X v \mathrm{d}\mu \\
&= \int_X (f^+ + g^+) \mathrm{d}\mu - \int_X (f^- + g^-) \mathrm{d}\mu \\
&= \int_X f^+ \mathrm{d}\mu - \int_X f^- \mathrm{d}\mu + \int_X g^+ \mathrm{d}\mu - \int_X g^- \mathrm{d}\mu \quad \text{(mit Satz 5.13)} \\
&= \int_X f \mathrm{d}\mu + \int_X g \mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

2. Der Beweis ist analog zu Teil 2 von Satz 5.13 mit $h := (g - f) \mathbb{1}_{\{f < \infty\}} \mathbb{1}_{\{g > -\infty\}}$.

3. Übungsaufgabe

4. Unter Verwendung von Teil 1 gilt

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \int_X f \cdot (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{A^c}) \, \mathrm{d}\mu \overset{1.}{=} \int_X f \mathbb{1}_A \mathrm{d}\mu + \int_X f \mathbb{1}_{A^c} \mathrm{d}\mu = \int_A f \mathrm{d}\mu + \int_{A^c} f \mathrm{d}\mu.$$

□

Bemerkung 5.23. *Viele Aussagen über integrierbare Funktionen lassen sich auf quasi-integrierbare Funktionen übertragen – beispielsweise Aussagen 2 und 3 von Satz 5.22. Bei Aussage 1 ist das jedoch nicht ohne Einschränkungen der Fall, da im Falle $\int_X f \mathrm{d}\mu = +\infty$ und $\int_X g \mathrm{d}\mu = -\infty$ das Integral $\int_X (f+g) \mathrm{d}\mu$ nicht existieren muss und wenn es existiert, beliebige Werte möglich sind.*

5.2 $\mathcal{L}^p$- und L^p-Räume

Verallgemeinern wir die bereits eingeführte Menge der integrierbaren Funktionen $\mathcal{L}^1$ wie folgt:

Definition 5.24

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $p \geq 1$. Dann bezeichnen wir mit $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ (oder kurz $\mathcal{L}^p(\mu)$ oder $\mathcal{L}^p$) die Menge der reellwertigen Borel-messbaren Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$ mit

$$\int_X |f(x)|^p \,\mu(\mathrm{d}x) = \int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu < \infty.$$

Für $f \in \mathcal{L}^p$ schreiben wir dann kurz

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Weiterhin definieren wir mit $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ die Menge der reellwertigen Borel-messbaren Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$ mit

$$\|f\|_\infty := \inf\{c > 0 \mid |f| \leq c \ \mu\text{-fast überall}\} < \infty.$$

Bemerkung 5.25.

1. *Man kann $\|f\|_\infty$ auch wie folgt beschreiben:*
$$\|f\|_\infty := \inf\{c > 0 \mid \mu(\{|f| > c\}) = 0\}.$$
2. *Während wir $\mathcal{L}^1$ als die Menge der integrierbaren Funktionen bezeichnen, bezeichnen wir $\mathcal{L}^2$ als die Menge der* quadratisch integrierbaren *(oder kurz* quadratintegrierbaren*) Funktionen, die Menge $\mathcal{L}^p$ als die Menge der* p-fach integrierbaren *Funktionen und $\mathcal{L}^\infty$ als die Menge der* essentiell/wesentlich beschränkten *Funktionen.*
3. *Falls $\sup_{x \in X} |f(x)| < \infty$ ist, dann ist insbesondere auch $\|f\|_\infty < \infty$.*

Wir werden sehen, dass $\|\cdot\|^p$ für $p \in [1, \infty]$ eine Norm definiert, sofern wir den zugehörigen $\mathcal{L}^p$-Raum geeignet einschränken. Dafür wiederholen wir, was Normen sind, sowie einige wichtige Eigenschaften von Normen.

5.2.1 Exkurs: Normen und Skalarprodukte

Definition 5.26: Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum

Gegeben sei ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit Nullvektor e_V. Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle\colon V \times V \to \mathbb{R}$ heißt *Skalarprodukt* auf V, falls gilt:

1. $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ für alle $v, w \in V$ (Symmetrie);
2. $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ (Homogenität);
3. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ für alle $u, v, w \in V$ (Additivität);
4. $\langle v, v \rangle \geq 0$ für alle $v \in V$ und $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = e_V$ (positive Definitheit).

Bemerkung 5.27. *Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle\colon V \times V \to \mathbb{C}$ auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V heißt Skalarprodukt, wenn Eigenschaften 2-4 der vorherigen Definition gelten und zudem die Hermitezität gilt, d.h. $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ für alle $v, w \in V$.*

Definition 5.28: Norm

Sei $(V, +, \cdot)$ ein reeller oder komplexer Vektorraum (d.h. $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) mit Nullvektor e_V. Eine nichtnegative reellwertige Funktion $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ heißt *Norm*, falls sie folgende Eigenschaften besitzt:

1. $\|v\| = 0$ impliziert $v = e_V$. (Definitheit)
2. $\|a \cdot v\| = |a| \cdot \|v\|$ für alle $a \in \mathbb{K}$ und $v \in V$. (absolute Homogenität)
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$. (Dreiecksungleichung)

Beispiel 5.29. *Auf dem Vektorraum $V = \mathbb{R}$ definiert die Betragsfunktion eine Norm. Zunächst einmal ist in der Tat $|v| \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}$. Das zeigen wir mit Hilfe einer Fallunterscheidung:*

- *Ist $v \geq 0$, so ist $|v| = v \geq 0$.*
- *Ist $v < 0$, so ist $|v| = -v > 0$. (Das gilt, da $\mathbb{R}$ die Anordnungsaxiome[1] erfüllt.)*

Definitheit: *Ist $v \neq 0$, so ist entweder $v > 0$ und somit $|v| = v > 0$ oder $v < 0$ und somit $|v| = -v > 0$. (Diese Fallunterscheidung gilt wieder dank der Anordnungsaxiome.) In beiden Fällen gilt also $|v| \neq 0$. Durch Kontraposition ist die Definitheit somit gezeigt.*

absolute Homogenität: *Für $V = \mathbb{R}$ lautet die zu zeigende Eigenschaft:*

$$|a \cdot v| = |a| \cdot |v|, \quad \forall a, v \in \mathbb{R}.$$

Dies kann mit Hilfe einer Fallunterscheidung in Bezug auf die Vorzeichen von a und v und durch mehrfache Anwendung der Anordnungsaxiome (bzw. der daraus abgeleiteten Eigenschaften) gezeigt werden. In Kurzform notiert: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $|x| = |-x|$. Wählen wir $a_0, v_0 \geq 0$ derart, dass $a = \pm a_0$ und $v = \pm v_0$ ist, so gilt

$$|a \cdot v| = |(\pm a_0) \cdot (\pm v_0)| = |\pm a_0 \cdot v_0| = |a_0 \cdot v_0| = a_0 \cdot v_0 = |a_0| \cdot |v_0| = |a| \cdot |v|.$$

Dreiecksungleichung: *Auch hier werden wieder die Anordnungsaxiome benötigt. Seien also $v, w \in \mathbb{R}$. Zunächst einmal gilt $|v| = \max\{v, -v\}$ und somit ist immer $-v \leq |v|$ und $v \leq |v|$ (und analog für w). Machen wir eine Fallunterscheidung:*

- *Ist $v + w < 0$, so ist $|v + w| = -(v + w) = (-v) + (-w) \leq |v| + |w|$, wobei wir wieder das Anordnungsaxiom benutzt haben.*
- *Ist $v + w \geq 0$, so ist analog $|v + w| = v + w \leq |v| + |w|$.*
- *Beide Punkte zusammen ergeben $|v + w| = \max\{-(v + w), v + w\} \leq |v| + |w|$.*

Definition 5.30

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dann heißt die Abbildung $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$, welche definiert ist durch

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}, \quad v \in V,$$

die *von dem Skalarprodukt induzierte Norm*.

[1] *Exkurs in die Analysis:* Ein Körper $\mathbb{K}$ heißt *angeordnet*, falls eine Relation $<$ existiert, für die gilt:

1. Für jedes $x \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der drei Aussagen: $x > 0$, $x = 0$ oder $x < 0$.
2. Gilt für $x, y \in \mathbb{K}$ sowohl $x > 0$ als auch $y > 0$, so gilt auch $x + y > 0$ und $x \cdot y > 0$.

Für mehr Details siehe beispielsweise [For16], Kapitel 3.

Die Notation und Bezeichnung signalisieren bereits, dass es sich bei der induzierten Norm um eine Norm handelt. Um das zu beweisen, benötigen wir jedoch zuerst ein Hilfsresultat. Es geht zurück auf die Mathematiker Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), Wiktor Jakowlewitsch Bunjakowski (1804-1889) und Hermann Amandus Schwarz (1843-1921), welche die Ungleichung in unterschiedlichen Räumen gezeigt hatten – Cauchy für Reihen, Bunjakowski und Schwarz hingegen für Funktionen.

Satz 5.31: Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und der Norm $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$. Dann gilt für alle $v, w \in V$ die Ungleichung

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|,$$

wobei die Gleichheit genau dann gilt, wenn ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $w = a \cdot v$ ist.

Beweis. Seien $v, w \in V$. Ist $w = e_V$, so folgt die Aussage sofort: Einerseits ist

$$|\langle v, e_V\rangle| = |\langle v, 0 \cdot v\rangle| = |0 \cdot \langle v, v\rangle| = |0| = 0.$$

Andererseits ist

$$\|v\| \cdot \|e_V\| = \|v\| \cdot 0 = 0.$$

Nehmen wir nun an, dass $w \neq e_V$ sei. Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt dank der Bilinearität und positiven Definitheit des Skalarproduktes

$$0 \leq \langle v - \lambda w, v - \lambda w\rangle = \langle v, v\rangle - 2\lambda \langle v, w\rangle + \lambda^2 \langle w, w\rangle. \tag{5.2.1}$$

Zudem folgt aus $w \neq e_V$ mit der positiven Definitheit $\langle w, w\rangle \neq 0$, d.h. wir können konkret $\lambda := \frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}$ setzen und erhalten somit

$$0 \leq \langle v, v\rangle - 2\frac{\langle v, w\rangle^2}{\langle w, w\rangle} + \frac{\langle v, w\rangle^2}{\langle w, w\rangle} \overset{\text{Def. Norm}}{=} \|v\|^2 - \frac{\langle v, w\rangle^2}{\|w\|^2}. \tag{5.2.2}$$

Durch Umstellen erhalten wir die Aussage

$$\langle v, w\rangle^2 \leq \|v\|^2 \cdot \|w\|^2. \tag{5.2.3}$$

Durch Wurzelziehen auf beiden Seiten ergeben sich die Ungleichungen

$$\langle v, w\rangle \leq \|v\| \cdot \|w\| \quad \text{und} \quad -\langle v, w\rangle \leq \|v\| \cdot \|w\|. \tag{5.2.4}$$

Da $|\langle v, w\rangle| = \max\{-\langle v, w\rangle, \langle v, w\rangle\}$ ist, folgt hieraus die behauptete Ungleichung. Gleichheit gilt in (5.2.1) genau dann, wenn $v - \lambda w = e_V$ ist, d.h. genau dann, wenn $v = \lambda w$ ist. Die Ungleichungen in (5.2.2), (5.2.3) und (5.2.4) werden auch genau in diesem einen Fall zu Gleichungen, so dass auch die zusätzliche Behauptung bewiesen ist. □

Die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung gilt analog für $\mathbb{C}$-Vektorräume.

Beispiel 5.32. *Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ und sei $\langle v, w\rangle = v_1 w_1 + \ldots, v_n w_n$. Dann lautet die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung:*

$$|\langle v, w\rangle| = |\sum_{k=1}^{n} v_k w_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} v_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} w_k^2},$$

bzw. äquivalent dazu (durch Quadrieren)

$$\left(\sum_{k=1}^{n} v_k w_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} v_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} w_k^2\right).$$

Satz 5.33

Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dann wird durch $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ eine Norm auf V definiert.

Beweis. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt. Wir überprüfen für diesen Fall, dass die induzierte Norm $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ in der Tat die Normeigenschaften erfüllt.

Wertebereich und Definitheit: Sei $v \in V$. Dann gilt

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \overset{\text{pos. Definitheit des SKP}}{\geq} 0$$

und

$$\|v\| = 0 \iff \langle v, v \rangle = 0 \overset{\text{pos. Definitheit des SKP}}{\iff} v = e_V .$$

absolute Homogenität: Seien $v \in V$ und $a \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|a \cdot v\| = \sqrt{\langle a \cdot v, a \cdot v \rangle} &\overset{\text{Hom. des SKP}}{=} \sqrt{a \langle v, a \cdot v \rangle} \overset{\text{Symmetrie des SKP}}{=} \sqrt{a \langle a \cdot v, v \rangle} \\ &\overset{\text{Hom. des SKP}}{=} \sqrt{a^2 \langle v, v \rangle} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{\langle v, v \rangle} = |a| \cdot \|v\| .\end{aligned}$$

Dreiecksungleichung: Seien $v, w \in V$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|v + w\| &= \sqrt{\langle v + w, v + w \rangle} \\ &\overset{\text{Add. des SKP}}{=} \sqrt{\langle v, v + w \rangle + \langle w, v + w \rangle} \\ &\overset{\text{Symm. des SKP}}{=} \sqrt{\langle v + w, v \rangle + \langle v + w, w \rangle} \\ &\overset{\text{Add. des SKP}}{=} \sqrt{\langle v, v \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle} \\ &\overset{\text{Symm. des SKP}}{=} \sqrt{\|v\|^2 + 2 \langle v, w \rangle + \|w\|^2} \\ &\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sqrt{\|v\|^2 + 2 \|v\| \|w\| + \|w\|^2} \\ &\overset{\text{Bin. Formel}}{=} \sqrt{(\|v\| + \|w\|)^2} \\ &\overset{(*)}{=} \|v\| + \|w\| ,\end{aligned}$$

wobei wir nach dem Radizieren in $(*)$ keinen Betrag schreiben müssen, da bereits gezeigt wurde, dass die induzierte Norm nichtnegativ ist.

Der Beweis für die induzierte Norm auf einem unitären Vektorraum funktioniert analog. □

5.2.2 Eigenschaften von $\|\cdot\|_p$ auf $\mathcal{L}^p$

Bevor wir zu der ersten nützlichen Ungleichung kommen, zeigen wir zunächst zwei Hilfsresultate.

Lemma 5.34

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Ist $f \in \mathcal{L}^\infty$, so gilt

$$|f| \leq \|f\|_\infty , \quad \mu\text{-f.ü.}$$

Beweis. Ist $\|f\|_\infty < \infty$, so gilt für jede Konstante $c > 0$, für die $\|f\|_\infty < c$ erfüllt ist, $\mu(|f| > c) = 0$. Folglich ist

$$\mu\left(|f| > \|f\|_\infty\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{|f| > \|f\|_\infty + \tfrac{1}{n}\}\right) = 0.$$

□

Bemerkung 5.35. *Die Aussage des Lemmas gilt sogar für $f \notin \mathcal{L}^\infty$, da in diesem Fall $\|f\|_\infty = \infty$ ist und somit nichts zu zeigen ist.*

Lemma 5.36

Für alle $a, b > 0$ und $\lambda \in (0,1)$ gilt

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda) b.$$

Beweis. Da die Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ konvex ist, gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in (0,1)$

$$e^{\lambda x + (1-\lambda) y} \leq \lambda e^x + (1-\lambda) e^y.$$

Mit der Wahl $a := e^x$ und $b := e^y$ folgt die Behauptung. □

Satz 5.37: Hölder-Ungleichung

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien $f \in \mathcal{L}^p$ und $g \in \mathcal{L}^q$ für $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ oder $p = 1$ und $q = \infty$. Dann gilt

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \,.$$

Beweis. Der Beweis für den Fall $p = 1$ und $q = \infty$ ist eine Übungsaufgabe. Seien nun $p, q \in (1, \infty)$ konjugiert, d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Gilt $\|f\|_p = 0$, so gilt $\mu(f \neq 0) = 0$ (vgl. Übungsaufgabe) und es folgt die Behauptung.

Nehmen wir also an, es gelte $\|f\|_p > 0$ und $\|g\|_q > 0$. Zunächst einmal wollen wir zeigen, dass $f \cdot g \in \mathcal{L}^1$ ist indem wir eine integrierbare Majorante finden. Dazu setzen wir

$$\widetilde{f}(x) := \frac{f(x)}{\|f\|_p}, \quad \widetilde{g}(x) := \frac{g(x)}{\|g\|_q}, \quad x \in X.$$

Dann gilt für alle $x \in X$ (mit $a = \widetilde{f}^p(x)$ und $b = \widetilde{g}^q(x)$)

$$\widetilde{f}(x)\widetilde{g}(x) \leq \tfrac{1}{p} \cdot \widetilde{f}^p(x) + \tfrac{1}{q} \cdot \widetilde{g}^q(x) = \frac{1}{p} \cdot \frac{f^p(x)}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{g^q(x)}{\|g\|_q^q}.$$

Da $f \in \mathcal{L}^p$ und $g \in \mathcal{L}^q$ ist, ist der Ausdruck auf der rechten Seite integrierbar – damit gibt es für $\widetilde{f} \cdot \widetilde{g}$ eine integrierbare Majorante. Also ist $\widetilde{f} \cdot \widetilde{g}$ und somit auch $f \cdot g$ in $\mathcal{L}^1$.

Integration über X bezüglich μ ergibt die Behauptung:

$$\begin{aligned}
\|fg\|_1 &= \int_X |fg| \,\mathrm{d}\mu = \|f\|_p \cdot \|g\|_q \cdot \int_X \left|\widetilde{f}\widetilde{g}\right| \,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \cdot \left(\frac{1}{p\,\|f\|_p^p} \int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{q\,\|g\|_q^q} \int_X |g|^q \,\mathrm{d}\mu\right) \\
&= \|f\|_p \cdot \|g\|_q \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \\
&= \|f\|_p \cdot \|g\|_q \,.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.38.

- *Mit der Konvention* $\frac{1}{\infty} = 0$ *gilt auch für* $p = 1$ *und* $q = \infty$ *die Beziehung* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
- *Verlangt man zusätzlich, dass der Maßraum* σ*-endlich ist, so kann man für* f *und* g *auch die Werte* $\pm\infty$ *zulassen.*
- *Für den Spezialfall* $p = q = 2$ *werden wir hieraus die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung für* $\langle f, g\rangle := \int_X fg \,\mathrm{d}\mu$ *erhalten. Letzteres müssen wir allerdings zuerst als Skalarprodukt auffassen und dafür müssen wir den* $\mathcal{L}^2$ *im nächsten Abschnitt geeignet einschränken.*

Folgende Ungleichung ist gerade die Dreiecksungleichung für die Abbildung $\|\cdot\|_p$, welche wir durch geeignete Einschränkung noch als Norm erkennen werden.

Satz 5.39: Minkowski-Ungleichung

Seien $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ für ein $p \in [1, \infty]$. Dann gilt

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \,.$$

Beweis. Für $p = 1$ folgt das sofort aus der Dreiecksungleichung für den Betrag (siehe Beispiel 5.29) und der Linearität des Integrals.
Für $p = \infty$ folgt die Ungleichung aus der Dreiecksungleichung für den Betrag kombiniert mit Lemma 5.34.
Sei nun $p \in (1, \infty)$.
Ist $\|f + g\|_p = 0$, $\|f\|_p = \infty$ oder $\|g\|_p = \infty$, so ist nichts zu zeigen. Nehmen wir daher an, dass

$$\|f\|_p < \infty, \quad \|g\|_p < \infty \quad \text{und} \quad \|f + g\|_p > 0$$

gilt. Mit der Abschätzung

$$|f + g|^p \leq (2\max\{|f|, |g|\})^p = 2^p \max\{|f|^p, |g|^p\} \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$$

erhalten wir

$$0 < \|f + g\|_p < \infty,$$

d.h. $f + g \in \mathcal{L}^p$.
Setzen wir $q := \frac{p}{p-1}$, so gilt $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und wir können die Hölder'sche Ungleichung anwenden:

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_p^p &= \int_X |f + g|^p \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_X |f + g| \cdot |f + g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \int_X |f| \cdot |f + g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu + \int_X |g| \cdot |f + g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu \\
&= \left\| f\,|f + g|^{p-1} \right\|_1 + \left\| g\,|f + g|^{p-1} \right\|_1 \\
&\leq \|f\|_p \left\| |f + g|^{p-1} \right\|_q + \|g\|_p \left\| |f + g|^{p-1} \right\|_q \\
&= \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \left(\int_X |f + g|^{(p-1)q} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \left(\int_X |f + g|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}\cdot\frac{p}{q}} \\
&= \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}}
\end{aligned}$$

Multiplizieren wir mit $\|f+g\|_p^{-\frac{p}{q}}$, so erhalten wir die Behauptung. □

Es ist offensichtlich, dass aus $f \in \mathcal{L}^p$ für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$ stets aus $cf \in \mathcal{L}^p$ folgt. Zusammen mit der Minkowski-Ungleichung ergibt sich, dass $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ ein Vektorraum[1] ist. Die Abbildung $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p \to [0, \infty]$ erfüllt, wie wir bei der Minkowski-Ungleichung gesehen haben, die Dreiecksungleichung und sie ist zudem, wie man leicht überprüfen kann, absolut homogen. Allerdings ist sie nicht positiv definit, wie wir uns anhand des folgenden Beispiels verdeutlichen.

Beispiel 5.40. *Sei* $V = \mathcal{L}^p([0,2], \mathcal{B}_{[0,2]}, \lambda)$ *für ein* $p \in [1, \infty]$. *Sei zudem* $f \colon [0,2] \to \mathbb{R}$ *gegeben durch*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x \neq 1. \end{cases}$$

Dann ist $\|f\|_p = 0$, *obwohl* f *nicht konstant Null und somit nicht der* Nullvektor *des Vektorraumes* $\mathcal{L}^p$ *ist.*

Es gilt allgemein $\|f\|_p = 0$ genau dann, wenn $\mu(f \neq 0) = 0$ ist. Um eine Norm zu erhalten, müssen all diese Funktionen also zu einer zusammengefasst werden – dazu bedienen wir uns einer Äquivalenzrelation.

5.2.3 L^p-Räume und deren Eigenschaften

Definition 5.41

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zwei Borel-messbare Abbildungen $f, g \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ heißen *äquivalent* zueinander, falls sie μ-fast überall übereinstimmen, d.h. falls $\mu(f \neq g) = 0$ gilt. Wir schreiben dann $f \overset{\mu}{\sim} g$. Die Äquivalenzklasse aller zu einer Borel-messbaren Funktion f äquivalenten Funktionen bezeichnen wir mit $[f]_\mu$. Eine Funktion $g \in [f]_\mu$ bezeichnen wir als *Repräsentanten* der Äquivalenzklasse.

In der Definition verwendeten wir bereits die Bezeichnungen einer Äquivalenzrelation. Es bleibt jedoch noch zu überprüfen, dass $\overset{\mu}{\sim}$ in der Tat eine Äquivalenzrelation (vgl. Definition 1.7) auf $\mathcal{M} = \mathcal{M}(X, \mathcal{A}, \mu)$ definiert.
Symmetrie und Reflexivität sind offensichtlich.

Lemma 5.42

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien f, g und h Borel-messbare Abbildungen. Gilt $f \overset{\mu}{\sim} g$ und $g \overset{\mu}{\sim} h$, dann gilt auch $f \overset{\mu}{\sim} h$.

Beweis. Wir müssen jeweils die Mengen betrachten, auf denen sich die Funktionen unterscheiden.

$$\begin{aligned} &\{x \in X \mid f(x) \neq h(x)\} \\ &= (\{x \in X \mid f(x) \neq h(x)\} \cap \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}) \\ &\quad \cup (\{x \in X \mid f(x) \neq h(x)\} \cap \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}) \\ &\subseteq \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\} \cup \{x \in X \mid g(x) \neq h(x)\}. \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\mu(f \neq h) \leq \mu(f \neq g) + \mu(g \neq h) = 0.$$

□

[1] Details sind unter dem Stichwort *Untervektorraumkriterium* Bestandteil der Vorlesung *Lineare Algebra*.

Den Raum L^p definieren wir nun basierend auf Definition 1.12 als Menge der Äquivalenzklassen bezüglich dieser Äquivalenzrelation.

Definition 5.43

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $1 \leq p \leq \infty$. Dann definieren wir $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ als Quotientenraum bezüglich der Äquivalenzrelation $\overset{\mu}{\sim}$ auf $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, d.h.

$$L^p := \mathcal{L}^p/_{\overset{\mu}{\sim}} = \{\, [f]_\mu \mid f \in \mathcal{L}^p \} \,.$$

Auf dem Vektorraum L^p wird durch $\|[f]_\mu\|_p := \|g\|_p$ für einen Repräsentanten $g \in [f]_\mu$ eine Norm definiert.

Wir schreiben ab sofort $f \in L^p$ statt $[f]_\mu \in L^p$, auch wenn Elemente von L^p eigentlich Äquivalenzklassen sind. Durch die Angabe des Raumes (L^p vs. $\mathcal{L}^p$) ist keine Verwechslung möglich.

Eine wichtige Eigenschaft des normierten Raumes $(L^p, \|\cdot\|_p)$ ist die *Vollständigkeit*. In folgender Definition fassen wir alle damit zusammenhängenden Begriffe zusammen.

Definition 5.44

Ist X eine beliebige Menge, so heißt eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ *Metrik* auf X, falls sie folgende Eigenschaften hat:

Positive Definitheit $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$ und $d(x, y) = 0 \iff x = y$

Symmetrie: $d(x, y) = d(y, x)$

Dreiecksungleichung: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ für alle $x, y, z \in X$.

Ist eine Menge X versehen mit einer Metrik, so nennt man (X, d) einen *metrischen Raum*.

Ein metrischer Raum (X, d) heißt *vollständig*, falls jede Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ in X bezüglich d konvergiert, d.h. gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n, m \geq N \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

so existiert ein Element $x \in X$ derart, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \quad d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Ist V ein Vektorraum und $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ eine Norm, so heißt $d(v, w) := \|v - w\|$ die durch $\|\cdot\|$ induzierte Metrik. Ein vollständiger normierter Raum heißt *Banach-Raum*.

Besitzt ein Vektorraum V ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) und ist V bezüglich der durch das Skalarprodukt induzierten Norm $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ vollständig, so nennt man V *Hilbertraum*.

Satz 5.45

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $p \in [1, \infty]$. Dann definiert $\|\cdot\|_p : L^p \to [0, \infty)$ eine Norm auf dem Vektorraum $L^p = L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Der normierte Vektorraum $(L^p, \|\cdot\|_p)$ ist *vollständig*, also ein Banach-Raum. Zudem wird durch $\langle f, g \rangle := \int_X fg \mathrm{d}\mu$ ein Skalarprodukt auf L^2 definiert. Da $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ die durch das Skalarprodukt induzierte Norm ist und der L^2 bezüglich dieser induzierten Norm vollständig ist, handelt es sich um einen Hilbert-Raum.

Beweis. **Normeigenschaften:** Überlegen wir uns zunächst, dass die Norm für $p \in [1, \infty)$ wohldefiniert ist: Ist $f \overset{\mu}{\sim} g$ für $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, so gilt für die Menge $\mathcal{N} := \{f \neq g\}$ nach Definition der Äquivalenzrelation $\mu(\mathcal{N}) = 0$. Damit gilt dann

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &= \int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \\ &= \int_{\mathcal{N}} |f|^p \, \mathrm{d}\mu + \int_{\mathcal{N}^c} |f|^p \, \mathrm{d}\mu \\ &= 0 + \int_{\mathcal{N}^c} |g|^p \, \mathrm{d}\mu \\ &= \int_X |g|^p \, \mathrm{d}\mu = \|g\|_p^p \,. \end{aligned}$$

Für $p = \infty$ ist diese Überlegung eine Übungsaufgabe.

Nichtnegativität und positive Homogenität der $\|\cdot\|_p$ sind für beliebige $p \in [1, \infty]$ leicht zu zeigen. Die Dreiecksungleichung ist Aussage der bereits bewiesenen Minkowski-Ungleichung (Satz 5.39). Die positive Definitheit folgt für $p = 1$ aus Übungsaufgabe 8 und für $p > 1$ analog dazu.

Skalarprodukteigenschaften: Sind $f, g \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$, so ist $\langle f, g \rangle := \int_X fg \mathrm{d}\mu$ offensichtlich symmetrisch, homogen und additiv. Das Skalarpodukt ist zudem wohldefiniert, denn

- Sind $f, g \in L^2$, so gilt, da die L^2-Norm durch das Skalarprodukt induziert ist, nach der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 < \infty$, d.h. insbesondere folgt indem man die Funktionen durch ihre Beträge $|f|$ und $|g|$ ersetzt $fg \in L^1$.
- Sind $f_1, f_2 \in [f]_\mu$ und $g_1, g_2 \in [g]_\mu$, d.h. $f_1 \overset{\mu}{\sim} f_2$ und $g_1 \overset{\mu}{\sim} g_2$, so gilt

$$\langle f_1, g_1 \rangle = \langle f_2, g_2 \rangle \,.$$

Um das zu sehen setzt man $\mathcal{N}_f := \{f_1 \neq f_2\}$ und $\mathcal{N}_g := \{g_1 \neq g_2\}$. Beide Mengen sind μ-Nullmengen. Damit ist dann

$$\begin{aligned} \langle f_1, g_1 \rangle &= \int_X f_1 g_1 \mathrm{d}\mu \\ &= \int_{\mathcal{N}_f \cup \mathcal{N}_g} f_1 g_1 \mathrm{d}\mu + \int_{\mathcal{N}_f^c \cap \mathcal{N}_g^c} f_1 g_1 \mathrm{d}\mu \\ &= 0 + \int_{\mathcal{N}_f^c \cap \mathcal{N}_g^c} f_2 g_2 \mathrm{d}\mu \\ &= \int_X f_2 g_2 \mathrm{d}\mu \\ &= \langle f_2, g_2 \rangle \,. \end{aligned}$$

Somit ist die Definition des Skalarproduktes unabhängig von der Wahl des Repräsentanten.

Vollständigkeit: Für diesen Beweis brauchen wir Sätze, die uns das Vertauschen von Limes und Integral ermöglichen – erst dann werden wir diesen Beweis führen.

□

Weder die Auswahl des Raumes noch die der Norm garantieren für sich genommen die Vollständigkeit. Sehen wir uns dafür der Illustration halber einen normierten nicht vollständigen Raum an.

Beispiel 5.46. *Der Vektorraum $C([0,1];\mathbb{R})$ der stetigen Abbildungen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ ist mit der Norm $\|\cdot\|_2$ nicht vollständig. Um das zu sehen, kann man überprüfen, dass folgende Folge von Funktionen bezüglich der 2-Norm eine Cauchy-Folge ist, sie besitzt jedoch keinen Grenzwert in $C([0,1];\mathbb{R})$:*

$$f_n(x) := \begin{cases} 1, & 0 \le x < \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} + \frac{n}{2}(\frac{1}{2} - x), & \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < x \le 1. \end{cases}$$

Wir haben im Beweis von Satz 5.45 bereits gezeigt, dass aus $f, g \in \mathcal{L}^2$ folgt, dass $f \cdot g \in L^1$ ist. Mit Hilfe der Jensen'schen Ungleichung werden wir die Ljapunow'sche Ungleichung beweisen, welche die Räume L^p und L^q für $p < q$ in Relation zueinander setzt.

Satz 5.47: Jensen'sche Ungleichung

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein normierter Maßraum (d.h. $\mu(X) = 1$). Sei weiterhin $f\colon X \to (a,b) \subseteq \mathbb{R}$ Borel-messbar mit $\int_X |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$. Dann ist $\int_X f \mathrm{d}\mu \in (a,b)$ und für jede konvexe Funktion $\varphi\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ gilt

$$\varphi\left(\int_X f \mathrm{d}\mu\right) \le \int_X \varphi \circ f \mathrm{d}\mu.$$

Der Beweis ist bereits aus Stochastik I bekannt (als Satz 3.21).

Bemerkung 5.48. *Es gibt auch eine Fassung der Jensen'schen Ungleichung, die sich nicht nur auf Wahrscheinlichkeitsmaße beschränkt. Folgende Fassung stammt aus Schilling [Sch05], dort als Satz 12.14:*
Sei $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ konvex und sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Ist $g \in \mathcal{L}^1_+$, so gilt für alle $f \in \mathcal{M}^+$

$$\varphi\left(\frac{\int_X f g \mathrm{d}\mu}{\int_X g \mathrm{d}\mu}\right) \le \frac{\int_X (\varphi \circ f) \cdot g \mathrm{d}\mu}{\int_X g \mathrm{d}\mu}.$$

Ist μ endlich, d.h. $\mu(X) < \infty$, so erhält man durch $g \equiv 1$

$$\varphi\left(\frac{1}{\mu(X)} \cdot \int_X f \mathrm{d}\mu\right) \le \frac{1}{\mu(X)} \cdot \int_X (\varphi \circ f) \mathrm{d}\mu.$$

Setzt man $\mu = \mathbb{P}$ (ein Wahrscheinlichkeitsmaß) so ist das gerade die Jensen'sche Ungleichung in der bekannten Form.

Beispiel 5.49. *Die Jensen'sche Ungleichung gilt nicht für beliebige Maßräume ohne die in der Bemerkung genannten Änderungen. Das sehen wir an folgendem Beispiel: Seien $X = [1,\infty)$, $\mu = \lambda|_X$ das Lebesguemaß auf X, $f(x) = \frac{1}{x}$ und $\varphi(x) = x^2$. Dann ist*

$$\varphi\left(\int_X f \mathrm{d}\mu\right) = \left(\int_1^\infty \tfrac{1}{x} \mathrm{d}x\right)^2 = \infty > \int_X (\varphi \circ f) \mathrm{d}\mu = \int_1^\infty \tfrac{1}{x^2} \mathrm{d}x = [-x^{-1}]_1^\infty = 1.$$

Satz 5.50: Ljapunow'sche Ungleichung

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein normierter Maßraum (d.h. $\mu(X) = 1$). Sei weiterhin $f\colon X \to \mathbb{R}$ Borel-messbar. Dann gilt für alle p, p' mit $1 \le p < p' \le \infty$ die Ungleichung

$$\|f\|_p \le \|f\|_{p'}.$$

Beweis. Ist $1 \leq p < p' < \infty$, so erhält man durch Anwenden der Jensen'schen Ungleichung auf die Funktion $|f|^p$ und $\varphi(x) = |x|^r$ mit $r := \frac{p'}{p} > 1$

$$\left|\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right|^r \leq \int_X ||f|^p|^r \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f|^{p'} \,\mathrm{d}\mu.$$

Durch Potenzieren folgt die Behauptung.
Für $1 \leq p < p' = \infty$ gilt wegen $(\mu(X))^{1/p} = \mu(X) = 1$

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_X \|f\|_\infty^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} = ((\|f\|_\infty)^p)^{1/p} \cdot \left(\int_X 1 \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} = \|f\|_\infty .$$

□

Aus der Ljapunow'schen Ungleichung folgt sofort $L^{p'} \subseteq L^p$ für $p < p'$. Die Ljapunow'sche Ungleichung lässt sich analog zur Jensen'schen Ungleichung für endliche Maßräume verallgemeinern, daher gilt die Einbettungsaussage auch in diesem Fall. Sie gilt jedoch nicht darüber hinaus.

Beispiel 5.51. *Seien $X = [1, \infty)$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$ und $\mu = \lambda|_X$, d.h. das Lebesguemaß auf X. Insbesondere ist also $\mu(X) = \infty$, d.h. der Maßraum ist nicht endlich. Für die Abbildung $f\colon X \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, gilt:*

$$\|f\|_1 = \int_1^\infty \tfrac{1}{x} \mathrm{d}x = [\ln x]_1^\infty = \infty,$$

d.h. $f \notin L^1(X)$. Allerdings ist

$$\|f\|_2^2 = \int_1^\infty \tfrac{1}{x^2} \mathrm{d}x = \left[-\tfrac{1}{x}\right]_1^\infty = 1,$$

d.h. $f \in L^2(X)$. Somit ist insbesondere $L^2(X) \not\subseteq L^1(X)$.

Zum Abschluss dieses Abschnittes sehen wir uns die Substitutionsregel an.

Satz 5.52: Substitutionsregel

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(Y, \mathcal{B})$ ein messbarer Raum. Seien zudem $f\colon X \to Y$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar und $g\colon Y \to \mathbb{R}$ Borel-messbar. Dann gilt: $g \in \mathcal{L}^1(Y, \mathcal{B}, \mu^f) \iff g \circ f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ und

$$\int_X g \circ f \mathrm{d}\mu = \int_Y g \mathrm{d}\mu^f. \tag{5.2.5}$$

Bemerkung 5.53. *$\mu^f = \mu \circ f^{-1}$ ist das durch eine Abbildung f und ein Maß μ induzierte Bildmaß und $\mathcal{B}$ ist hier eine beliebige σ-Algebra auf Y, also nicht notwendigerweise die Borel-σ-Algebra.*

Beweis. Der Beweis erfolgt durch maßtheoretische Induktion bezüglich g.

Indikatorfunktion: Ist $g = \mathbb{1}_B$ für eine Menge $B \in \mathcal{B}$, so ist g grundsätzlich integrierbar und es gilt

$$\begin{aligned}\int_Y g(y)\mathrm{d}\mu^f(y) = \mu^f(B) = \mu(f^{-1}(B)) = \int_X \mathbb{1}_{f^{-1}(B)}(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \mathbb{1}_B(f(x))\mathrm{d}\mu(x)\\ = \int_X g(f(x))\mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$

Einfache Funktion: Mit Hilfe der Linearität des Integrals erhalten wir für $g = \sum_{k=1}^n \beta_k \mathbb{1}_{B_k}$ (mit $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$)

$$\begin{aligned}\int_Y g(y)\mathrm{d}\mu^f(y) &= \int_Y \sum_{k=1}^n \beta_k \mathbb{1}_{B_k}(y)\mathrm{d}\mu^f(y) = \sum_{k=1}^n \beta_k \int_Y \mathbb{1}_{B_k}(y)\mathrm{d}\mu^f(y)\\ &= \sum_{k=1}^n \beta_k \mu^f(B_k) = \sum_{k=1}^n \beta_k \int_X \mathbb{1}_{B_k}(f(x))\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_X \sum_{k=1}^n \beta_k \mathbb{1}_{B_k}(f(x))\mathrm{d}\mu(x) = \int_X g(f(x))\mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$

Nichtnegative messbare Funktion: Zu $g \in \mathcal{M}^+$ sei $(g_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}^+$ eine aufsteigende Folge einfacher Funktionen mit $\lim_{k\to\infty} g_k(y) = g(y)$ für alle $y \in Y$. Dann ist auch $(g_k \circ f)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge einfacher Funktionen und es gilt mit dem Satz der monotonen Konvergenz (Satz 5.14).

$$\int_Y g(y)\mathrm{d}\mu^f(y) = \lim_{k\to\infty} \int_Y g_k \mathrm{d}\mu^f(y) = \lim_{k\to\infty} \int_X g_k(f(x))\mathrm{d}\mu(x) = \int_X g(f(x))\mathrm{d}\mu(x).$$

Messbare Funktion: Die Äquivalenz der Integrierbarkeitsaussagen folgt direkt aus folgender Rechnung, bei der bei Integrierbarkeit einer der Funktionen (g bzw. $g \circ f$) jeweils alle Integrale endlich sind.

$$\begin{aligned}\int_Y g(y)\mathrm{d}\mu^f(y) &= \int_Y g^+(y)\mathrm{d}\mu^f(y) - \int_Y g^-(y)\mathrm{d}\mu^f(y)\\ &= \int_X g^+(f(x))\mathrm{d}\mu(x) - \int_X g^-(f(x))\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_X g(f(x))\mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.54. *Formuliert man die Aussage des Satzes für Funktionen in $\mathcal{L}^1$, so ist es sinnvoll, hier die Konvergenz und Monotonie der Funktionenfolge im dritten Schritt in allen Stellen zu fordern. Formuliert man den Satz für Funktionen in L^1, so können wir die Werte nie genauer als bis auf eine Nullmenge bestimmen, so dass die Argumentation fast überall sinnvoll ist.*

Beispiel 5.55. *Die Substitutionsregel findet eine wichtige Anwendung in der Stochastik. Ist $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum (also ein normierter Maßraum) und ist $X\colon (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ eine Zufallsvariable (also eine $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}$-messbare Funktion), so gilt für jede messbare Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*

$$\int_\Omega f(X(\omega))\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \int_\mathbb{R} f(x)\mathrm{d}\mathbb{P}^X(x).$$

Insbesondere ist für den Ausdruck auf der rechten Seite die Kenntnis des konkreten Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und die konkrete Abbildungsvorschrift von $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ nicht nötig – alleine die Kenntnis über die Verteilung $\mathbb{P}^X$ genügt.

Der Erwartungswert einer Zufallsvariable $X \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ ist damit

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \int_\mathbb{R} x\mathrm{d}\mathbb{P}^X(x).$$

5.3 Aufgaben

Aufgabe 1. *Berechnen Sie* $\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\lambda$ *für folgende Funktionen* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*:*

a) $f(x) = 3\mathbb{1}_{[-2,1]}(x) + 5\mathbb{1}_{[0,2]}(x) - 2\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$

b) $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)$

c) $f(x) \equiv 0$

Aufgabe 2. *Für ein* $n \in \mathbb{N}$ *seien* $X = \{0, \ldots, n\}$*,* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ *und für einen festen Wert* $p \in (0,1)$ *sei*

$$\mu(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}.$$

Berechnen Sie $\int_X \mathbb{1}_{\{0,1\}} \mathrm{d}\mu$*.*

Aufgabe 3. *Zeigen Sie Teil 2 von Satz 5.8.*

Aufgabe 4. *Sei* $(X, \mathcal{A})$ *ein Maßraum. Die Indikatorfunktion* $\mathbb{1}_A$ *für* $A \in \mathcal{A}$ *und das Dirac-Maß* δ_x *für* $x \in X$ *tauchen in Lemma 5.20 abwechselnd und auf den ersten Blick austauschbar auf. Machen Sie sich den Unterschied zwischen beiden klar indem Sie für beide Abbildungen Definitions- und Wertebereich angeben.*

Mit der folgenden Aufgabe können Sie begründen, warum der längliche Beweis von Teil 1 von Satz 5.22 nötig war.

Aufgabe 5. *Zeigen Sie mit Hilfe eines geeigneten Beispiels, dass in der Regel* $(f+g)^+ \neq f^+ + g^+$ *und* $(f+g)^- \neq f^- + g^-$ *ist.*

Aufgabe 6. *Zeigen Sie Teil 3 von Satz 5.22 (unter Verwendung von Teil 1 und 2).*

Aufgabe 7. *Sei* $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ *die Dirichlet-Funktion. Bestimmen Sie* $\|f\|_\infty$ *und* $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ *und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Lemma 5.34.*

Aufgabe 8. *Sei* $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ *nichtnegativ. Zeigen Sie, dass aus* $\int_X f \mathrm{d}\mu = 0$ *genau dann gilt, wenn* $f = 0$ μ*-fast sicher erfüllt ist, d.h. wenn Folgendes gilt:*

$$\mu(f \neq 0) = 0.$$

Hinweis: Betrachten Sie $A := \{f > 0\}$ *und* $A_n := \{f > \frac{1}{n}\}$ *und deren Maße. Zeigen Sie zudem beide Richtungen der Äquivalenz-Aussage nacheinander.*

Aufgabe 9. *Beweisen Sie die Hölder-Ungleichung (Satz 5.37) für den Fall* $p = 1$ *und* $q = \infty$*.*

Hinweis: Lemma 5.34 kann hier verwendet werden.

Aufgabe 10. *Sei* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und seien* $f, g \in L^\infty$ *mit* $f \sim g$*. Zeigen Sie, dass* $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty$ *ist.*

Aufgabe 11. *Berechnen Sie den punktweisen Grenzwert der Funktionenfolge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *aus Beispiel 5.46. Liegt dieser in* $C([0,1];\mathbb{R})$*?*

5.4 English terminology

Dirichlet'sche Funktion	Dirichlet function
wohldefiniert	well defined
Darstellung	representation
Zerlegung, Partition	partition
Wahrscheinlichkeitsraum	probability space
Zufallsvariable	random variable
approximierende Folge	approximating sequence
Vorzeichen	sign
Satz	theorem
monotone Konvergenz	monotone convergence
punktweise Konvergenz	pointwise convergence
Grenzfunktion	limit function
integrierbar	integrable
Betrag $\lvert\cdot\rvert$	absolute value
Dirac-Maß	Dirac measure
Positiv-, Negativteil	positive, negative part
quadratisch integrierbar	square integrable
essentiell beschränkt	essentially bounded
Skalarprodukt	inner product
Homogenität / homogen	homogeneity / homogeneous
Hermitezität	conjugate symmetry
Dreiecksungleichung	triangle inequality
(an)geordneter Körper	ordered field
fast überall	almost everywhere
Majorantenkriterium	direct comparison test
Metrischer Raum	metric space
vollständiger Raum	complete space
Cauchy-Folge	Cauchy sequence
Nullmenge	nullset
Ljapunow'sche Ungleichung	Lyapunov inequality
Bildmaß	image measure

Kapitel 6

Vertauschen von Grenzprozessen

Ziele

- □ Grenzwertsätze kennen, die das Vertauschen von Integration und Limes ermöglichen
- □ den Satz von Fubini kennen und anwenden können

Es gibt verschiedene Grenzprozesse, die nicht immer sofort als solche zu erkennen sind. Einige Beispiele:

Beispiel 6.1.

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ *für* $x \in \mathbb{R}$*;*

ii) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$ *für* $x \in \mathbb{R}$*;*

iii) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ *für* $f \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$*;*

iv) $\int\limits_X f \mathrm{d}\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \mathrm{d}\mu$ *für* $f \in L^1_+(X,\mathcal{A},\mu)$ *und* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}^+$ *mit* $f_n \uparrow f$*.*

Grenzprozesse zu vertauschen kann zu veränderten Werten führen. Sehen wir uns dazu ein kleines Beispiel an.

Beispiel 6.2. *Für* $k, n \in \mathbb{N}_0$ *sei*

$$\delta_{k,n} := \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

das Kronecker-Delta*. Dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \delta_{k,n} = 0, \qquad \textit{jedoch} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{k,n} = 1.$$

Das Ziel dieses Kapitels ist es, hinreichende Bedingungen zu finden, die das Vertauschen der Integration mit anderen Grenzprozessen erlauben.

6.1 Vertauschen von Grenzwert und Integral

Wir haben bereits den Satz der monotonen Konvergenz (Satz 5.14) kennen gelernt. Durch Einführung der L^p-Räume können wir die Anforderungen nun etwas reduzieren. Der folgende Satz ist ebenfalls als Satz von der monotonen Konvergenz bekannt – zusätzlich jedoch auch als Satz von Beppo Levi (benannt nach dem italienischen Mathematiker Beppo Levi).

Satz 6.3: Beppo Levi

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Folge Borel-messbarer Funktionen, die folgende Eigenschaften erfüllen:

(1) $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ μ-fast überall, für alle $n \in \mathbb{N}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ μ-fast überall.

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu.$$

Bemerkung 6.4. *Der Satz gilt auch dann, wenn $\int_X f \mathrm{d}\mu = \infty$ ist.*

Beweis. Seien

$$\begin{aligned} N_1^c &:= \{x \in X \mid 0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x), \forall n \in \mathbb{N}\}, \\ N_2^c &:= \left\{x \in X \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\right\}, \\ N &:= N_1 \cup N_2. \end{aligned}$$

Dann gilt nach Voraussetzung $\mu(N) \leq \mu(N_1) + \mu(N_2) = 0$. Die Folge $g_n := f_n \mathbb{1}_{N^c}$ ist nichtnegativ, monoton wachsend und konvergiert (überall) punktweise gegen $g := f\mathbb{1}_{N^c}$. Nach Satz 5.14 gilt also

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n \mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} g_n \mathrm{d}\mu = \int_X g \mathrm{d}\mu.$$

Gleichzeitig gilt jedoch

$$\int_X f_n \mathrm{d}\mu = \int_N f_n \mathrm{d}\mu + \int_{N^c} f_n \mathrm{d}\mu = 0 + \int_{N^c} g_n \mathrm{d}\mu = \int_X g_n \mathrm{d}\mu,$$

sowie die analoge Rechnung für f und g statt f_n und g_n. Schlussendlich gilt auch

$$\begin{aligned} \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu &= \int_N \lim_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu + \int_{N^c} \lim_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu \\ &= \int_{N^c} f \mathrm{d}\mu + 0 \\ &= \int_X g \mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} g_n \mathrm{d}\mu, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. □

Lemma 6.5: Fatou

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge Borel-messbarer Funktionen auf X mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$. Falls $f_n \geq 0$ μ-fast überall gilt, $n \in \mathbb{N}$, dann gilt die Ungleichung

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu.$$

Bemerkung 6.6. *Es genügt für das Lemma bereits $f_n \geq g$ μ-fast überall für alle $n \in \mathbb{N}$ für eine Funktion $g \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Details dazu sind in [Kü16], Beweis von Satz 7.7 b) zu finden.*

Beweis. Sei $g_n := \inf_{k\geq n} f_k$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Funktionen g_n $(n \in \mathbb{N})$ sind Borel-messbar und es gilt $0 \leq g_n \leq g_{n+1}$ μ-fast überall für alle $n \in \mathbb{N}$. Zudem gilt

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} f_k = \liminf_{n\to\infty} f_n.$$

Des Weiteren gilt $0 \leq g_n \leq f_k$ μ-fast überall für $k \geq n$, woraus

$$0 \leq \int_X g_n \mathrm{d}\mu \leq \int_X f_k \mathrm{d}\mu, \quad k \geq n, \quad \text{also} \quad \int_X g_n \mathrm{d}\mu \leq \inf_{k\geq n} \int_X f_k \mathrm{d}\mu,$$

folgt. Durch Grenzübergang folgt nun (u.a. wegen der Monotonie der g_n)

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n \mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X g_n \mathrm{d}\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} \int_X f_k \mathrm{d}\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu.$$

Anwendung des Satzes von Beppo Levi liefert schlussendlich (dank der monotonen Folge g_n)

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} g_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu.$$

□

Der nächste Satz ist bekannt unter dem Namen *(Lebesgue's) Theorem der majorisierten Konvergenz*.

Satz 6.7: Lebesgue

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und f Borel-messbare Funktionen auf X mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ μ-fast überall. Gilt zudem $|f_n| \leq g$ μ-fast überall für eine Funktion $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, so sind $f, f_1, f_2, \ldots \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu.$$

Bemerkung 6.8. *Die Funktion g nennt man* integrierbare Majorante.

Beweis. Alle Aussagen, die nicht Integrale betreffen, seien im Folgenden μ-f.s. zu verstehen. Aus $|f_n| \leq g$ und $g \in \mathcal{L}^1$ folgt sofort $f_n \in \mathcal{L}^1$. Zudem folgt aus $|f| = \lim_{n\to\infty} |f_n| \leq g$ auch die Integrierbarkeit von f. Wir zeigen zunächst

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0. \tag{6.1.1}$$

Dazu betrachten wir $g_n := |f| + g - |f_n - f|$ $(n \in \mathbb{N})$. Es gilt

$$0 \leq g - |f_n| = g + |f| - |f| - |f_n| \leq |f| + g - |f_n - f| = g_n.$$

Folglich gilt mit dem Lemma von Fatou

$$\begin{aligned} \int_X (|f| + g)\mathrm{d}\mu &= \int_X \liminf_{n\to\infty} g_n \mathrm{d}\mu \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X g_n \mathrm{d}\mu \\ &= \liminf_{n\to\infty} \int_X (|f| + g - |f_n - f|) \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int_X (|f| + g)\mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt $\int_X(|f|+g)\mathrm{d}\mu < \infty$, d.h. wir können die Ungleichung umstellen und erhalten $0 \geq \limsup_{n\to\infty}\int_X |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu$. Hieraus folgt (6.1.1).
Mit Satz 5.22 folgt damit

$$\left|\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\mathrm{d}\mu - \int_X f\mathrm{d}\mu\right| = \left|\lim_{n\to\infty}\int_X (f_n - f)\mathrm{d}\mu\right| \leq \lim_{n\to\infty}\int_X |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu = 0,$$

also die Behauptung des Satzes. □

Sehen wir uns ein Beispiel an, bei dem leicht nachzuprüfen ist, dass Integral und Limes nicht vertauscht werden dürfen.

Beispiel 6.9. *Sei $(X,\mathcal{A},\mu) = ([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda|_{[0,1]})$ und sei $f_n = n\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ μ-fast überall. Allerdings gilt einerseits*

$$\int_{[0,1]} f_n\mathrm{d}\mu = \int_0^{\frac{1}{n}} n\,\mathrm{d}\lambda(x) = n\lambda\left([0,\tfrac{1}{n}]\right) = 1,$$

aber andererseits auch

$$\int_{[0,1]}\lim_{n\to\infty} f_n\mathrm{d}\mu = \int_0^1 0\mathrm{d}\lambda(x) = 0,$$

d.h. $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\mathrm{d}\mu \neq \int_X \lim_{n\to\infty} f_n\mathrm{d}\mu$.
In der Tat können weder der Satz über die monotone Konvergenz (Beppo Levi) noch der Satz über die majorisierte Konvergenz (Lebesgue) angewendet werden:

- *Für alle $x \in (\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]$ ist $f_{k-1}(x) < f_k(x)$ für $k \leq n$, aber $f_n(x) = n > f_{n+1}(x) = 0$, d.h. die Funktionenfolge ist auf einer Menge nicht monoton, deren Maß strikt positiv ist.*
- *Sei $g\colon X \to \mathbb{R}$ eine Majorante für $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d.h. $f_n = |f_n| \leq g$ μ-fast überall. Dann gilt insbesondere*

  $$n \leq g(x), \quad \text{für } \mu\text{-fast alle } x \in (\tfrac{1}{n+1},\tfrac{1}{n}].$$

  Daraus folgt jedoch

  $$\int_X g\mathrm{d}\mu = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}\lambda(x) \geq \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} = \infty,$$

  d.h. $g \notin L^1$.

Korollar 6.10

Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum und sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^+$. Dann gilt

$$\int_X\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\int_X f_k\mathrm{d}\mu. \tag{6.1.2}$$

Beweis. Die Folge der Partialsummen $s_n := \sum_{k=1}^{n} f_k \in \mathcal{M}^+$ $(n \in \mathbb{N})$ ist monoton wachsend. Die Gleichung (6.1.2) folgt mit dem Satz über die monotone Konvergenz. (Details: Übung) □

Das Korollar besagt nicht, dass die Ausdrücke in (6.1.2) endlich sind. Insbesondere ist $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ nicht notwendigerweise integrierbar.

Korollar 6.11

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$. Ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_X |f_k| \,\mathrm{d}\mu < \infty,$$

so konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ für μ-fast alle $x \in X$, die Reihe ist integrierbar und es gilt (6.1.2).

Beweis. Sei $g(x) := \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$. Die Funktion $g\colon X \to \mathbb{R}_+$ ist nichtnegativ, messbar und integrierbar, denn es gilt nach Korollar 6.10

$$\int_X g \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X |f_k| \,\mathrm{d}\mu < \infty.$$

Als integrierbare Funktion ist g μ-fast überall endlich, d.h. $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert (absolut) für μ-fast alle $x \in X$. Sei nun

$$f(x) := \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x), & \text{Reihe konvergent in } x, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Partialsummen sind dann beschränkt, denn $|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in X$. Folglich gilt mit dem Satz von Lebesgue

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \sum_{k=1}^{n} f_k \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_X f_k \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k \mathrm{d}\mu.$$

□

6.2 Der Satz von Fubini

In Abschnitt 4.3 haben wir die Produkt-σ-Algebra und das Produktmaß eingeführt. In diesem Abschnitt wollen wir klären, wann wir die Integration bezüglich des Produktmaßes durch wiederholte Integration bezüglich der Randmaße ersetzen können und im Zusammenhang damit, ob die Reihenfolge der Integration eine Rolle spielt.

6.2.1 Das Produktmaß und das zugehörige Integral

Lemma 6.12

Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ messbare Räume. Für alle $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ und $x \in X$ ist

$$C_x := \{y \in Y \mid (x, y) \in C\} \in \mathcal{B}$$

und für alle $y \in Y$ ist

$$C_y := \{x \in X \mid (x, y) \in C\} \in \mathcal{A}.$$

Beweis. Aus Symmetriegründen genügt es, den ersten Teil der Aussage zu beweisen. Sei dazu

$$\mathcal{C} := \{ C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \mid C_x \in \mathcal{B}, \forall x \in X \} .$$

Ziel ist es, $\mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ zu zeigen. Für zwei Mengen $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$ gilt stets

$$(A \times B)_x = \begin{cases} B, & \text{falls } x \in A, \\ \emptyset, & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

In beiden Fällen gilt also $(A \times B)_x \in \mathcal{B}$. Wenn wir zeigen können, dass $\mathcal{C}$ eine σ-Algebra ist, so folgt hieraus sofort

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\{ A \times B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}) \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B},$$

also $\mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, da der Halbring $\mathcal{H}_2 = \{ A \times B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ ein Erzeuger der Produkt-σ-Algebra ist. Überprüfen wir nun, ob $\mathcal{C}$ die Eigenschaften einer σ-Algebra besitzt:

(i) $X \times Y \in \mathcal{C}$, denn $(X \times Y)_x = Y \in \mathcal{B}$ für alle $x \in X$.

(ii) Ist $C \in \mathcal{C}$, so ist $C^c = (X \times Y) \setminus C \in \mathcal{C}$, denn für $x \in X$ ist $C_x \in \mathcal{B}$ und somit auch

$$\begin{aligned} ((X \times Y) \setminus C)_x &= \{ y \in Y \mid (x, y) \in (X \times Y) \setminus C\} \\ &= Y \setminus \{ y \in Y \mid (x, y) \in C\} \\ &= Y \setminus C_x \in \mathcal{B}. \end{aligned}$$

(iii) Sei $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$, d.h. $(C_n)_x \in \mathcal{B}$ für alle $x \in X$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \in \mathcal{C}$, denn

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \right)_x &= \left\{ y \in Y \,\middle|\, (x, y) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \right\} \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{ y \in Y \mid (x, y) \in C_n\} \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (C_n)_x \in \mathcal{B}. \end{aligned}$$

□

Im nächsten Schritt werden wir die Maße der Mengen C_x bzw. C_y aus dem vorherigen Lemma mit Hilfe von Integralen angeben.

Lemma 6.13

Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ zwei σ-endliche Maßräume. Für alle $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ gilt dann:

$$f_C \colon X \to \overline{\mathbb{R}}, \quad x \mapsto \nu(\{ y \in Y \mid (x, y) \in C\}) = \int_Y \mathbb{1}_C(x, y) \mathrm{d}\nu(y)$$

ist eine messbare Funktion, d.h. $f_C \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{A})$, und

$$g_C \colon Y \to \overline{\mathbb{R}}, \quad y \mapsto \mu(\{ x \in X \mid (x, y) \in C\}) = \int_X \mathbb{1}_C(x, y) \mathrm{d}\mu(x)$$

ist eine messbare Funktion, d.h. $g_C \in \mathcal{M}^+(Y, \mathcal{B})$.

Beweis. Wir skizzieren nur den Beweis der Messbarkeit von f_C für beliebiges $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

1. Sei $\nu(Y) < \infty$, d.h. ν ist nicht nur σ-endlich, sondern endlich. Dann ist
$$\mathcal{D} := \left\{ D \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \,\middle|\, f_D \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{A}) \right\}$$
ein Dynkin-System.
2. Es ist $\{ A \times B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B} \} \subseteq \mathcal{D}$.
3. Da $\{ A \times B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B} \}$ ein durchschnittsstabiler Erzeuger von $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ist, folgt $\mathcal{D} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.
4. Ist ν nur σ-endlich, so betrachte Folgen $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$ mit $\nu(B_n) < \infty$ und $B_n \uparrow Y$. Dann wird durch $\widetilde{\nu}_n(B) := \nu(B \cap B_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ ein endliches Maß auf $\mathcal{B}$ definiert.
5. Für $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist $f_C^n(x) := \widetilde{\nu}_n(C_x)$ eine messbare Abbildung auf $(X, \mathcal{A})$.
6. Für alle $x \in X$ gilt mit dem Satz der monotonen Konvergenz $\lim_{n\to\infty} f_C^n(x) = \int_Y \mathbb{1}_C(x, y)\mathrm{d}\nu(y) = f_C(x)$.
7. Als Limes messbarer Funktionen ist f_C selbst messbar.

$\square$

Mit Hilfe dieser Lemmata können wir das Produktmaß (vgl. Satz 4.24) mit Hilfe von Integralen ausdrücken.

Satz 6.14

Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ Maßräume mit σ-endlichen Maßen μ und ν. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Maß $\mu \otimes \nu$ auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, so dass
$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B) \tag{6.2.1}$$
für alle $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$ gilt. Für jede Menge $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ gilt dann
$$(\mu \otimes \nu)(C) = \int_Y \int_X \mathbb{1}_C(x, y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y) = \int_X \int_Y \mathbb{1}_C(x, y)\mathrm{d}\nu(y)\mathrm{d}\mu(x). \tag{6.2.2}$$

Beweis. Die Eindeutigkeit des Maßes $\mu \otimes \nu$ ist uns bereits aus Satz 4.24 bekannt. Es bleibt also lediglich zu zeigen, dass durch (6.2.2) in der Tat ein Maß auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ definiert wird, welches (6.2.1) erfüllt. Dann ist dies automatisch das Produktmaß.

Für $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ sei also
$$\pi(C) := \int_Y \left(\int_X \mathbb{1}_C(x, y)\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y).$$
Da das innere Integral nach Lemma 6.13 eine nichtnegative messbare Funktion ist, können wir diese bezüglich ν auf Y integrieren, d.h. π ist wohldefiniert.

- Für alle $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ist $\pi(C) \geq 0$, da in beiden Schritten eine nichtnegative Funktion integriert wird.
- Es ist
$$\pi(\emptyset) = \int_Y \int_X \mathbb{1}_\emptyset(x, y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y) = 0,$$
da $\mathbb{1}_\emptyset \equiv 0$ ist.

- σ-Additivität von π: Seien $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ paarweise disjunkte Mengen. Dann gilt

$$\mathbb{1}_{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{C_k}$$

  und mit Korollar 6.10 ist

$$\begin{aligned}\pi\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k\right) &= \int_Y \int_X \mathbb{1}_{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k}(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y)\\ &= \int_Y \int_X \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{C_k}(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_Y \int_X \mathbb{1}_{C_k}(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \pi(C_k).\end{aligned}$$

- Nachweis von (6.2.1): Seien $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\pi(A \times B) &= \int_Y \int_X \mathbb{1}_{A\times B}(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y)\\ &= \int_Y \int_X \mathbb{1}_A(x) \cdot \mathbb{1}_B(y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y)\\ &= \int_X \mathbb{1}_A(x)\mathrm{d}\mu(x) \cdot \int_Y \mathbb{1}_B(y)\mathrm{d}\nu(y)\\ &= \mu(A) \cdot \nu(B).\end{aligned}$$

- π ist σ-endlich: Da μ und ν σ-endlich sind, existieren Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ und $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$ mit $\mu(A_n), \nu(B_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A_n \uparrow X$, $B_n \uparrow Y$. Folglich ist $(A_n \times B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $\pi(A_n \times B_n) = \mu(A_n) \cdot \nu(B_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A_n \times B_n \uparrow X \times Y$.

Damit erfüllt π alle definierenden Eigenschaften des Produktmaßes. Wegen dessen Eindeutigkeit gilt also $\pi = \mu \otimes \nu$. □

6.2.2 Die Sätze von Fubini und Tonelli

Bevor wir eine Funktion, die bezüglich des Produktmaßes integrierbar ist, bezüglich der einzelnen Maße integrieren können, muss diese Funktion bezüglich der einzelnen Maße messbar sein.

Lemma 6.15

Seien $(X_1, \mathcal{A}_1)$ und $(X_2, \mathcal{A}_2)$ messbare Räume und sei $f \in \mathcal{M}(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$. Dann sind

$$\begin{aligned} &f_{x_1} \colon X_2 \to \overline{\mathbb{R}}, \quad x_2 \mapsto f(x_1, x_2) \qquad \text{und}\\ &f_{x_2} \colon X_1 \to \overline{\mathbb{R}}, \quad x_1 \mapsto f(x_1, x_2)\end{aligned}$$

für alle $x_1 \in X_1$ bzw. $x_2 \in X_2$ messbare Funktionen auf $(X_2, \mathcal{A}_2)$ bzw. $(X_1, \mathcal{A}_1)$.

Beweis. Für alle $x_1 \in X_1$ und $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ ist

$$\begin{aligned} f_{x_1}^{-1}(B) &= \{x_2 \in X_2 \mid f_{x_1}(x_2) \in B\} \\ &= \{x_2 \in X_2 \mid f(x_1,x_2) \in B\} \\ &= \left\{x_2 \in X_2 \,\middle|\, (x_1,x_2) \in f^{-1}(B)\right\} \in \mathcal{A}_2, \end{aligned}$$

da $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ ist (mit Lemma 6.12). □

Satz 6.16: Tonelli

Seien $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ Maßräume mit σ-endlichen Maßen und sei $f \in \mathcal{M}^+(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$. Dann sind

$$\begin{aligned} X_1 &\to \overline{\mathbb{R}}, \quad x_1 \mapsto \int_{X_2} f(x_1,x_2)\mathrm{d}\mu_2(x_2) \quad \text{und} \\ X_2 &\to \overline{\mathbb{R}}, \quad x_2 \mapsto \int_{X_1} f(x_1,x_2)\mathrm{d}\mu_1(x_1) \end{aligned}$$

in $\mathcal{M}^+(X_1, \mathcal{A}_1)$ bzw. $\mathcal{M}^+(X_2, \mathcal{A}_2)$ und es gilt

$$\begin{aligned} \int_{X_1 \times X_2} f(x_1,x_2)\mathrm{d}\mu_1 \otimes \mu_2(x_1,x_2) &= \int_{X_2}\int_{X_1} f(x_1,x_2)\mathrm{d}\mu_1(x_1)\mathrm{d}\mu_2(x_2) \\ &= \int_{X_1}\int_{X_2} f(x_1,x_2)\mathrm{d}\mu_2(x_2)\mathrm{d}\mu_1(x_1). \end{aligned}$$

Beweis. Die Messbarkeit und die Vertauschungsaussage zeigt man induktiv. Für Indikatorfunktionen ist dies bereits in Lemma 6.13 und 6.14 gezeigt worden. Der Übergang zu einfachen Funktionen erfolgt dank der Linearität des Integrals. Ist $f \in \mathcal{M}^+(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$, und gilt $f_n \uparrow f$ für einfache Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ über dem gleichen messbaren Raum, so ist

$$F_n\colon X_1 \to \overline{\mathbb{R}}, \quad F_n(x_1) := \int_{X_2} f_n(x_1,x_2)\mathrm{d}\mu_2(x_2)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ messbar und als Grenzfunktion messbarer Funktionen ist auch

$$F\colon X_1 \to \overline{\mathbb{R}}, \quad F(x_1) := \int_{X_2} f(x_1,x_2)\mathrm{d}\mu_2(x_2) = \lim_{n\to\infty} F_n(x_1)$$

messbar. Da nur nichtnegative Funktionen integriert werden, folgt mit den vorherigen Schritten der maßtheoretischen Induktion und dem Satz der monotonen Konvergenz

$$\begin{aligned} \int_{X_1 \times X_2} f(x_1,x_2)\mathrm{d}\mu_1 \otimes \mu_2(x_1,x_2) &= \lim_{n\to\infty} \int_{X_1 \times X_2} f_n(x_1,x_2)\mathrm{d}\mu_1 \otimes \mu_2(x_1,x_2) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{X_2}\int_{X_1} f_n(x_1,x_2)\mathrm{d}\mu_1(x_1)\mathrm{d}\mu_2(x_2) \\ &= \int_{X_2} \lim_{n\to\infty} \int_{X_1} f_n(x_1,x_2)\mathrm{d}\mu_1(x_1)\mathrm{d}\mu_2(x_2) \\ &= \int_{X_2}\int_{X_1} f(x_1,x_2)\mathrm{d}\mu_1(x_1)\mathrm{d}\mu_2(x_2), \end{aligned}$$

und da die Reihenfolge der Integration für jedes f_n beliebig ist, gilt dies auch für f. □

Im Gegensatz zum Satz von Tonelli erfordert der Satz von Fubini nicht, dass die zu integrierende Funktion nichtnegativ ist – dafür muss jedoch die Integrierbarkeit der Funktion gefordert werden.

Satz 6.17: Fubini

Seien $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ Maßräume mit σ-endlichen Maßen und sei $f \in \mathcal{L}^1(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$. Dann sind

$$X_1 \to \overline{\mathbb{R}}, \quad x_1 \mapsto \int_{X_2} f(x_1, x_2) \mathrm{d}\mu_2(x_2) \quad \text{und}$$
$$X_2 \to \overline{\mathbb{R}}, \quad x_2 \mapsto \int_{X_1} f(x_1, x_2) \mathrm{d}\mu_1(x_1)$$

in μ_1-fast überall bzw. μ_2-fast überall integrierbar und es gilt

$$\begin{aligned} \int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2) \mathrm{d}\mu_1 \otimes \mu_2(x_1, x_2) &= \int_{X_2} \int_{X_1} f(x_1, x_2) \mathrm{d}\mu_1(x_1) \mathrm{d}\mu_2(x_2) \\ &= \int_{X_1} \int_{X_2} f(x_1, x_2) \mathrm{d}\mu_2(x_2) \mathrm{d}\mu_1(x_1). \end{aligned}$$

Beweis. Zunächst einmal folgt die Integrierbarkeit direkt aus dem Satz von Tonelli, denn mit f ist auch $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu_1 \otimes \mu_2)$ und damit

$$\int_{X_1} \int_{X_2} |f(x_1, x_2)| \,\mathrm{d}\mu_2(x_2) \mathrm{d}\mu_1(x_1) = \int_{X_1 \times X_2} |f(x_1, x_2)| \,\mathrm{d}\mu_1 \otimes \mu_2(x_1, x_2) < \infty.$$

Eine integrierbare Funktion ist fast sicher endlich, d.h.

$$\int_{X_2} |f(x_1, x_2)| \,\mathrm{d}\mu_2(x_2) < \infty \quad \text{für } \mu_1\text{-fast alle } x_1 \in X_1.$$

Setzen wir nun

$$N_1 := \{x_1 \in X_1 \mid \, f(x_1, \cdot) \text{ ist nicht } \mu_2\text{-integrierbar}\}.$$

Da $f(x_1, \cdot)$ $\mathcal{A}_2$-messbar ist für alle $x_1 \in X_1$, ist

$$N_1 = \left\{ x_1 \in X_1 \,\middle|\, \int_{X_2} |f(x_1, x_2)| \,\mathrm{d}\mu_2(x_2) = \infty \right\} \in \mathcal{A}_1.$$

Definieren wir damit

$$h \colon X_1 \to \overline{\mathbb{R}}, \quad x_1 \mapsto \begin{cases} \int_{X_2} f(x_1, x_2) \mathrm{d}\mu_2(x_2), & x_1 \in N_1^c \\ 0, & x_1 \in N_1, \end{cases}$$

so ist wegen $\mu_1(N_1) = 0$

$$h(x_1) = \int_{X_2} f(x_1, x_2) \mathrm{d}\mu_2(x_2) \quad \text{für } \mu_1\text{-fast alle } x_1 \in X_1.$$

Auf N_1^c ist

$$\int_{X_2} f(x_1, x_2) \mathrm{d}\mu_2(x_2) = \int_{X_2} f^+(x_1, x_2) \mathrm{d}\mu_2(x_2) - \int_{X_2} f^-(x_1, x_2) \mathrm{d}\mu_2(x_2) \; < \infty.$$

Insgesamt gilt damit (mit dem Satz von Tonelli für Positiv- und Negativteil)

$$\begin{aligned}
&\int_{X_1\times X_2} f(x_1,x_2)\mathrm{d}\mu_1\otimes\mu_2(x_1,x_2)\\
&=\int_{X_1\times X_2} f^+(x_1,x_2)\mathrm{d}\mu_1\otimes\mu_2(x_1,x_2)-\int_{X_1\times X_2} f^-(x_1,x_2)\mathrm{d}\mu_1\otimes\mu_2(x_1,x_2)\\
&=\int_{X_1}\int_{X_2} f^+(x_1,x_2)\mathrm{d}\mu_2(x_2)\mathrm{d}\mu_1(x_1)-\int_{X_1}\int_{X_2} f^-(x_1,x_2)\mathrm{d}\mu_2(x_2)\mathrm{d}\mu_1(x_1)\\
&=\int_{N_1^c}\int_{X_2} f^+(x_1,x_2)\mathrm{d}\mu_2(x_2)\mathrm{d}\mu_1(x_1)-\int_{N_1^c}\int_{X_2} f^-(x_1,x_2)\mathrm{d}\mu_2(x_2)\mathrm{d}\mu_1(x_1)\\
&=\int_{N_1^c}\int_{X_2} f(x_1,x_2)\mathrm{d}\mu_2(x_2)\mathrm{d}\mu_1(x_1)\\
&=\int_{X_1}\int_{X_2} f(x_1,x_2)\mathrm{d}\mu_2(x_2)\mathrm{d}\mu_1(x_1).
\end{aligned}$$

Vertauscht man in allen bisherigen Beweisschritten die Indizes, so haben wir damit alles gezeigt. $\square$

Bemerkung 6.18. *Wir haben hier wiederholt verwendet, dass die Integrale zweier fast überall identischer Funktionen gleich sind. Die Werte der Funktionen auf einer Nullmenge spielen dabei keine Rolle.*

6.3 Aufgaben

Aufgabe 1. *Schreiben Sie den Beweis von Korollar 6.10 vollständig auf.*

Aufgabe 2. *Sei* $\mathbb{Q}=\{q_1,q_2,\dots\}$ *eine Abzählung der rationalen Zahlen und sei* $f_n\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ *gegeben durch* $f_n(x):=\mathbb{1}_{\{q_1,\dots,q_n\}}(x)$ *für* $x\in[0,1]$. *Berechnen Sie das Riemann-Integral* $\int_{[0,1]} f_n\mathrm{d}x$. *Begründen Sie, dass weder der Satz der monotonen Konvergenz noch der Satz der majorisierten Konvergenz für das Riemann-Integral gelten.*

Aufgabe 3. *Überprüfen Sie, ob Fatou's Lemma auf die Folge reellwertiger Funktionen* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathrm{Abb}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *mit* $f_n=-\frac{1}{n}\mathbb{1}_{[2,2+n]}$ *anwendbar ist und ob die Ungleichung gilt.*

Aufgabe 4. *Zeigen Sie Schritte 2 und 3 aus dem Beweis von Lemma 6.13.*

Aufgabe 5. *Sei* $(X,\mathcal{A},\mu)$ *ein Maßraum und sei* $f\in\mathcal{M}^+$ *eine (Borel-)messbare Funktion mit Werten in* $\mathbb{R}_+$. *Sei* $\mu\otimes\lambda$ *das Produktmaß auf* $(X\times\mathbb{R},\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, *wobei* λ *das Lebesgue-Maß sei. Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Tonelli* $(\mu\otimes\lambda)(A)$ *für die Menge*

$$A=\{\,(x,y)\in X\times\mathbb{R}\mid\ 0\le y\le f(x)\}\,.$$

Ergänzung: $(\mu\otimes\lambda)(A)$ kann interpretiert werden als der Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion $f|_A$. Wie kann man sich die beiden Formeln des Flächeninhaltes nach Tonelli anschaulich vorstellen?

Aufgabe 6. *Sei* $g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *wie folgt gegeben:*

$$g(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}, & 0<y<x<1,\\ -\frac{1}{y^2}, & 0<x<y<1,\\ 0, & \textit{sonst}.\end{cases}$$

Zeigen Sie:

a) $g \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$*, d.h. die (Lebesgue-)Integrale von Positiv- und Negativteil haben den Wert* $+\infty$*.*

b) Die Integrale bezüglich x *und* y *sind nicht vertauschbar, denn*

$$\int_0^1 \int_0^1 g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -1, \quad \textit{aber} \quad \int_0^1 \int_0^1 g(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 1.$$

6.4 English terminology

majorisierte Konvergenz	dominated convergence
Majorante	dominating function
Vertauschen von Grenzprozessen	interchange of limiting operations

Kapitel 7

Der Satz von Radon-Nikodým

Ziele

- ☐ Maße mit Hilfe von messbaren Funktionen auf einem Maßraum definieren
- ☐ wissen, was absolutstetige Maße sind, Charakterisierung (ε-δ-Kriterium) kennen
- ☐ Satz von Radon-Nikodým kennen
- ☐ die Radon-Nikodym-Dichte in konkreten Beispielen ansehen

7.1 Motivation

Ist eine nichtnegative messbare Funktion auf einem Maßraum gegeben, so kann man in folgender Weise ein neues Maß definieren:

Satz 7.1

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $f \in \mathcal{M}^+$. Dann wird durch

$$\nu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty], \quad A \mapsto \nu(A) := \int_A f \mathrm{d}\mu$$

ein Maß auf $\mathcal{A}$ definiert.

Beweis. Es ist $\nu(\emptyset) = 0$, denn

$$\nu(\emptyset) = \int_\emptyset f \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathbb{1}_\emptyset \mathrm{d}\mu = \int_X 0 \,\mathrm{d}\mu = \mu(\emptyset) = 0.$$

Des Weiteren ist $\nu(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Schlussendlich seien $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ paarweise disjunkte Mengen mit $A := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Dann gilt mit Korollar 6.10

$$\nu(A) = \int_A f \mathrm{d}\mu = \int_X f \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_k} \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f \mathbb{1}_{A_k} \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k).$$

Somit ist ν in der Tat ein Maß auf $\mathcal{A}$. $\square$

Die Frage, die wir in diesem Kapitel beantworten wollen, ist, ob bzw. unter welchen Bedingungen auch die Umkehrung möglich ist. Mit anderen Worten: Kann man (unter gewissen Voraussetzungen) zu zwei Maßen μ und ν eine Funktion f finden, damit obige Beziehung gilt?

7.2 Absolutstetige Maße

Definition 7.2

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und seien μ und ν zwei Maße auf $\mathcal{A}$. ν heißt *absolutstetig* bezüglich μ, falls für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\mu(A) = 0 \quad \Longrightarrow \nu(A) = 0.$$

Wir schreiben in diesem Fall $\nu \ll \mu$.

Beispiel 7.3 (Ein Gegenbeispiel). *Seien $X = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1])$, $\mu := \lambda|_{[}0,1]$ das Lebesgue-Maß auf $\mathcal{A}$ und $\nu := \delta_0$ das Dirac-Maß im Punkt 0. Dann gilt $\mu \not\ll \nu$ und $\nu \not\ll \mu$, denn es gilt beispielsweise*

- $\lambda(\{0\}) = 0$, *aber* $\delta_0(\{0\}) = 1$;
- $\delta_0([\frac{1}{2}, 1]) = 0$, *aber* $\lambda([\frac{1}{2}, 1]) = \frac{1}{2}$.

Für zwei endliche Maße gibt es folgende Charakterisierung der Absolutstetigkeit:

Satz 7.4

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und seien μ und ν endliche Maße auf $\mathcal{A}$. Dann ist $\nu \ll \mu$ genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle Mengen $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \delta$ stets $\nu(A) < \varepsilon$ gilt.

Beweis. In Kurzschreibweise wollen wir zeigen:

$$\nu \ll \mu \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0\colon \mu(A) < \delta \Rightarrow \nu(A) < \varepsilon)$$

„$\Longleftarrow$“: Sei $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$, d.h. insbesondere $\mu(A) < \delta$ für alle $\delta > 0$. Dann gilt nach Voraussetzung $\nu(A) < \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$, d.h. $\nu(A) = 0$. Folglich ist $\nu \ll \mu$.

„$\Longrightarrow$“: Wir zeigen die Kontraposition, d.h. wir nehmen an, dass das ε-δ-Kriterium nicht erfüllt sei. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ mit

$$\mu(A_n) < 2^{-n} \quad \text{und} \quad \nu(A_n) \geq \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Seien nun

$$A := \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \quad \text{und} \quad B_n := \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m.$$

Da $B_n \downarrow A$ gilt, folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mu(A) \leq \mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) \leq \sum_{m=n}^{\infty} \mu(A_m) \leq \sum_{m=n}^{\infty} 2^{-m} = 2^{-(n-1)}.$$

Folglich ist $\mu(A) = 0$. Andererseits gilt wegen der Stetigkeit des Maßes von oben (gilt nach Satz 3.13 wegen ν endlich)

$$\nu(A) = \lim_{n\to\infty} \nu(B_n) \geq \limsup_{n\to\infty} \nu(A_n) \geq \varepsilon > 0,$$

d.h. $\nu \not\ll \mu$.

□

Bemerkung 7.5. *Mit dem aus Stochastik I bekannten Satz von Borel-Cantelli hätte man $\mu(A) = 0$ sofort schlussfolgern können. Da wir Borel-Cantelli in dieser Veranstaltung nicht bewiesen haben, ist der Beweis hier ohne diesen Satz geführt.*

7.3 Der Satz von Radon-Nikodým

Satz 7.6: Radon-Nikodým

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit einem σ-endlichen Maß μ. Ist ν ein weiteres Maß auf $\mathcal{A}$, so sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $\nu \ll \mu$

(2) $\exists f \in \mathcal{M}^+ \colon \nu(A) = \int_A f \mathrm{d}\mu, \ \forall A \in \mathcal{A}$.

Die Funktion f wird als *Radon-Nikodým-Dichte* oder *-Ableitung* bezeichnet und sie ist μ-fast überall eindeutig bestimmt.

Notation

Ist $\nu \ll \mu$ für zwei σ-endliche Maße μ und ν auf einem messbaren Raum $(X, \mathcal{A})$, so schreibt man für die Radon-Nikodým-Dichte auch $f = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$. Damit ist

$$\nu(A) = \int_A \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \mathrm{d}\mu, \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Beweis. Der Beweis von (2) $\Rightarrow$ (1) ist unter Beachtung von Satz 7.1 nicht lang und ist Inhalt einer Übungsaufgabe.

Der Beweis von (1) geht über den Anspruch dieser Veranstaltung hinaus. Quellen für diesen Beweis sind beispielsweise Abschnitt 2 in Kaptitel VII in [Els11] oder Kapitel 8 in [Hen19]. Die Idee besteht darin, zunächst die Dichte für den Fall $\nu \leq \mu$ zu zeigen und anschließend zu zeigen, dass ν und μ absolutstetig bezüglich $\nu + \mu$ sind. Somit existieren Dichten von ν bezüglich $\nu + \mu$ und von μ bezüglich $\nu + \mu$ und der Quotient dieser beiden Dichten (bzw. 0 wann immer durch 0 geteilt werden würde) ist die Dichte von ν bezüglich μ. □

Beispiel 7.7 (Standardnormalverteilung). *Seien $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $\mu = \lambda|_{\mathbb{R}}$. Sei weiterhin*

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dann wird durch

$$\mathbb{P} \colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}, \quad A \mapsto \mathbb{P}(A) := \int_A f(x) \mathrm{d}x$$

ein (Wahrscheinlichkeits-)Maß auf der Borel-σ-Algebra definiert, wobei $\int \cdot \mathrm{d}x = \int \cdot \mathrm{d}\lambda(x)$ die Integration bezüglich des Lebesgue-Maßes beschreibt. Nach Konstruktion ist $\mathbb{P} \ll \lambda$, d.h. das Maß der Standardnormalverteilung ist absolutstetig bezüglich des Lebesgue-Maßes.

Beispiel 7.8 (Binomialverteilung). *Seien $X = \{0, \ldots, n\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ (die Potenzmenge) und μ das Zählmaß auf $\mathcal{A}$, d.h.*

$$\mu(A) := |A|, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Für ein $p \in (0, 1)$ sei weiterhin $f \colon X \to \mathbb{R}_+$ wie folgt gegeben:

$$f(x) := \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x \in X.$$

Dann wird durch

$$\mathbb{P}(A) := \int_A f \mathrm{d}\mu = \sum_{k \in A} f(k) = \sum_{k \in A} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad A \in \mathcal{A},$$

ein Maß auf $\mathcal{A}$ definiert, welches absolutstetig bezüglich des Zählmaßes ist – das Wahrscheinlichkeitsmaß der Binomialverteilung.

Sehen wir uns nun ein Beispiel für die Richtung (1) ⇒ (2) an, d.h. wie kann man konkret eine solche Radon-Nikodým-Dichte konstruieren?

Beispiel 7.9 (Absolutstetige Maße auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$)**.** *Sei $(X, \mathcal{A}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ und seien $\nu \ll \mu$ zwei Maße auf $\mathcal{A}$. Seien zudem $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ derart, dass $\mu(A) = \sum_{k \in A} p_k$ und $\nu(A) = \sum_{k \in A} q_k$ ist für alle $A \in \mathcal{A}$. In dieser Situation impliziert $\nu \ll \mu$*

$$p_k = 0 \quad \Longrightarrow q_k = 0.$$

Folglich gilt für alle $A \in \mathcal{A}$

$$\nu(A) = \sum_{k \in A} q_k = \sum_{k \in A, p_k \neq 0} \frac{q_k}{p_k} \cdot p_k.$$

Setzen wir also

$$f(k) := \frac{q_k}{p_k} \cdot \mathbb{1}_{\{p_k \neq 0\}},$$

so ist für alle $A \in \mathcal{A}$

$$\nu(A) = \sum_{k \in A} f(k) p_k = \int_A f \mathrm{d}\mu.$$

Bemerkung 7.10 (Absolutstetige Maße und Funktionen)**.** *Den Begriff der Absolutstetigkeit gibt es auch für Funktionen – siehe Definition B.25 im Anhang. Für endliche Maße μ auf einem messbaren Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $\mu \ll \lambda$

(2) die Verteilungsfunktion $F(x) := \mu((-\infty, x])$ ($x \in \mathbb{R}$) ist absolutstetig.

Die Dichte ist in diesem Fall λ-fast überall gegeben durch $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda} = F'$ – siehe Hauptsatz der Analysis (Satz B.26).

7.4 Aufgaben

Aufgabe 1. *Zeigen Sie die Implikation (2) ⇒ (1) im Satz von Radon-Nikodým.*

Aufgabe 2. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f \in \mathcal{M}^+$ und $\nu(A) := \int_A f \mathrm{d}\mu$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass für jede Funktion $g \in \mathcal{M}^+$ gilt:*

$$\int_X g \mathrm{d}\nu = \int_X g f \mathrm{d}\mu.$$

Hinweis: *Maßtheoretische Induktion bezüglich g.*

Aufgabe 3. *Sei $p \in (0,1)$ und sei $\mathbb{P}_n$ das Maß zu $\mathrm{Bin}(n,p)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Für welche $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathbb{P}_n \ll \mathbb{P}_m$? Wie lautet die Dichte für $n = m$, d.h. $\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_n}{\mathrm{d}\mathbb{P}_n}$?*

7.5 English terminology

absolutstetig	absolutely continuous
(Zähl-)Dichte	(counting) density

Anhang A

Grundlagen der Logik und Mengenlehre

A.1 Grundlagen der Logik

Die Mathematik ist dem Namen nach die *Kunst des Lernens*. Zwar gibt es keine allgemeingültige Definition der Mathematik selbst, jedoch ist ein fundamentaler Aspekt der Mathematik die Verwendung logischer Argumente um den Wahrheitsgehalt von Aussagen zu überprüfen. Das Beweisen ist somit ein elementarer Bestandteil aller Bereiche der Mathematik.

Beispiel A.1. *Sind folgende Deduktionen korrekt?*

(i) Elefanten sind Säugetiere. Dumbo ist ein Elefant. Also ist Dumbo ein Säugetier.

(ii) Dozenten stehen an der Tafel. Frau Bielagk steht an der Tafel. Also ist Frau Bielagk Dozent(in).

(iii) Berlin liegt in Deutschland, Deutschland liegt in Europa, also liegt Berlin in Europa.

(iv) Einige Pflanzen sind Fleischfresser. Einige Fleischfresser sind Katzen. Also sind einige Pflanzen Katzen.

Um richtige und falsche Schlussweisen besser unterscheiden und selbst korrekte Beweise führen zu können, befassen wir uns zunächst mit elementarer Logik.

A.1.1 Aussagen und Logische Verknüpfungen

Unter Aussagen verstehen wir Sätze, deren Wahrheitsgehalt in einem gegebenen Kontext stets mit wahr oder falsch angegeben werden kann.

Beispiel A.2.

- *„Dienstag ist ein Wochentag“ und „$1 = 1$“ sind wahre Aussagen.*
- *„Dienstag ist ein Monat“ und „$1 = 2$“ sind falsche Aussagen.*
- *„Was bedeutet das? “ ist zwar ein sinnvoller Satz, jedoch keine Aussage. Ebenso ist „$1 + 3$“ keine Aussage. „$x - 3 = 4$“ ist ebenfalls keine Aussage (sondern eine* Aussageform*), „wenn $x = 7$ ist, dann ist $x - 3 = 4$“ hingegen schon.*

Man kann verschiedene Aussagen durch sogenannte *Junktoren* verknüpfen. Dies wollen wir an einem Beispiel verdeutlichen:

	Die Sonne scheint	**und**	die Kinder spielen im Garten.
	A	$\wedge$	B
	Die Sonne scheint	**oder**	die Kinder spielen im Garten.
	A	$\vee$	B
Wenn	die Sonne scheint,	**dann**	spielen die Kinder im Garten.
	A	$\Longrightarrow$	B
Genau dann wenn	die Sonne scheint,	(dann)	spielen die Kinder im Garten.
	A	$\Longleftrightarrow$	B

Zudem können wir eine Aussage immer negieren: Ist A die Aussage „die Sonne scheint", so ist $\neg A$ die Aussage „die Sonne scheint nicht".
Formal können wir diese Verknüpfungen wie folgt einführen:

Konjunktion Die Konjunktion $A \wedge B$ zweier Aussagen A und B ist genau dann wahr, wenn beide Aussagen wahr sind.

Disjunktion Die Disjunktion $A \vee B$ zweier Aussagen A und B ist genau dann falsch, wenn beide Aussagen falsch sind.

Konditional Die Aussage $A \Rightarrow B$ ist genau dann falsch, wenn A wahr und B falsch ist.

Äquivalenz Zwei Aussagen A und B sind genau dann logisch äquivalent ($A \iff B$), wenn sie unter den gleichen Bedingungen wahr oder falsch sind.

Negation Die Negation $\neg A$ ist genau dann wahr, wenn A falsch ist.

Bemerkung A.3. *Hat man eine wahre Aussage $A \Rightarrow B$ vorliegen, so sagt man, A sei* hinreichend *für B bzw. B sei* notwendig *für A.*

Abhängig davon, ob Aussagen A und B wahr (w) oder falsch (f) sind, kann man den Wahrheitsgehalt der verknüpften Aussagen bestimmen:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \iff B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Satz A.4: De Morgan'sche Regeln der Aussagenlogik

Seien A und B beliebige Aussagen. Dann gelten folgende Regeln:

$$\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B,$$
$$\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B.$$

Bevor wir uns ansehen, wie eine solche Aussage bewiesen werden kann, wollen wir uns anhand eines Beispiels die Aussage dieser Regeln verdeutlichen.

Beispiel A.5. *Betrachten wir zwei Aussagen und die daraus entstehenden zusammengesetzten Aussagen:*

$$\begin{aligned}
A &= \text{„Die S-Bahn kommt pünktlich."} \\
B &= \text{„Der Bus kommt pünktlich."} \\
A \wedge B &= \text{„Die S-Bahn und der Bus sind pünktlich."} \\
\neg(A \wedge B) &= \text{„S-Bahn und Bus sind nicht beide pünktlich."} \\
\neg A &= \text{„Die S-Bahn kommt nicht pünktlich."} \\
\neg B &= \text{„Der Bus kommt nicht pünktlich."} \\
\neg A \vee \neg B &= \text{„Die S-Bahn oder der Bus oder beide kommen nicht pünktlich."}
\end{aligned}$$

Sowohl $\neg(A \wedge B)$ als auch $\neg A \vee \neg B$ sagen also aus, dass mindestens eines der beiden Verkehrsmittel unpünktlich kommt.

Beweis von Satz A.4.
Wir zeigen an dieser Stelle nur die erste der beiden Aussagen. Die Beweismethode ist für die zweite Aussage identisch. Um zu zeigen, dass zwei Aussagen identisch sind, müssen wir mit Hilfe von Wahrheitstafeln alle möglichen Fälle untersuchen.

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	f	w	f	w	w
f	w	f	w	w	f	w
f	f	f	w	w	w	w

Da in allen Fällen $\neg(A \wedge B)$ und $\neg A \vee \neg B$ die gleichen Wahrheitswerte haben, sind beide Aussagen äquivalent. □

A.1.2 Grundlegende Beweistechniken

Satz A.6

Seien A, B und C beliebige Aussagen. Dann gelten folgende Regeln:

1. $A \iff B$ ist äquivalent zu $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$;
2. $A \Rightarrow B$ ist äquivalent zu $\neg B \Rightarrow \neg A$ (Kontraposition);
3. $A \Rightarrow B$ ist äquivalent zu $\neg(A \wedge \neg B)$ (Widerspruchsbeweis);
4. $A \wedge (A \Rightarrow B)$ impliziert B (Abtrennregel);
5. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ impliziert $A \Rightarrow C$ (Kettenregel).

Die Aussagen dieses Satzes sind die Grundpfeiler mathematischer Beweise. Es gibt noch weitere Beweismethoden (vollständige Induktion, Beweis durch Fallunterscheidung, Diagonalverfahren, Schubfachprinzip, ...), die jedoch besser an entsprechender Stelle dieser oder anderer Vorlesungen vorgestellt werden.

Bemerkung A.7. *Insbesondere ist im Gegensatz zur Kontraposition $A \Rightarrow B$ nicht äquivalent zu $B \Rightarrow A$. Ist eine Aussage vom Typ „aus A folgt B" zu zeigen, d.h. eine Aussage vom Typ $A \Rightarrow B$, so nennt man A* Prämisse *(oder* Voraussetzung*) und B* Konklusion *(oder* Schlussfolgerung*). Bei Beweisaufgaben ist es sinnvoll, zunächst Voraussetzungen und Schlussfolgerungen zu identifizieren Fehlschlüsse zu vermeiden.*

Bemerkung A.8.
Betrachten wir die Aussageformen A „$x+1$ ist eine gerade Zahl“ und B „x ist eine ungerade Zahl“.

1. *Die Äquivalenz von Aussagen A und B kann gezeigt werden, indem sowohl die „Hinrichtung“ $A \Rightarrow B$ als auch die „Rückrichtung“ $A \Leftarrow B$ (bzw. $B \Rightarrow A$) bewiesen werden. In diesem Fall zeigt man also:*
   - *$A \Rightarrow B$: „Wenn $x+1$ gerade ist, dann ist x ungerade.“*
   - *$B \Rightarrow A$: „Wenn x ungerade ist, dann ist $x+1$ gerade.“*
2. *Äquivalent zu $A \Rightarrow B$ ist die Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$, d.h. „Wenn x nicht ungerade ist, dann ist $x+1$ nicht gerade.“*
3. *Ebenfalls äquivalent zu $A \Rightarrow B$ ist die Aussage $\neg(A \wedge \neg B)$, d.h. „Es gilt nicht gleichzeitig, dass $x+1$ gerade ist und x nicht ungerade ist.“*
4. *Die vierte Aussage sagt uns: Wenn Aussage A wahr ist und aus Aussage A Aussage B folgt, dann ist Aussage B wahr. Lässt man die Überprüfung der Wahrheit von A weg, so kann man alles Mögliche schlussfolgern. Beispielsweise ist die Aussage „wenn 2 ungerade ist, dann ist 3 gerade“ wahr. Sinnvoll angewandt wird eine Implikation $A \Rightarrow B$ also nur dann, wenn wir mit einer wahren Aussage starten, z.B. „4 ist gerade und der Vorgänger einer geraden Zahl ist ungerade, folglich ist 3 ungerade.“*
5. *Die fünfte Aussage erlaubt es uns, eine Implikation durch Aneinanderreihung mehrerer bekannter Implikationen zu zeigen. Zudem können wir diese Methode nutzen um die Äquivalenz mehrerer Aussagen zu zeigen. Zum Beispiel folgt aus $A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow A$, dass die Aussagen A, B und C äquivalent sind. Der Unterschied zwischen Aussagen (iii) und (iv) im Einführungsbeispiel A.1, die beide scheinbar diese Form haben, werden wir im nächsten Abschnitt erarbeiten.*

Folgerung A.9: Die Beweismethoden Kontraposition & Widerspruchsbeweis

Wenn $A \Rightarrow B$ gezeigt werden soll, d.h. aus der Gültigkeit von A folgt die Gültigkeit von B, so kann man an Stelle eines direkten Beweisen eine der folgenden Beweisstrategien wählen:

Kontraposition: Man nimmt an, dass $\neg B$ wahr ist und zeigt, dass dies die Gültigkeit von $\neg A$ impliziert.

Widerspruchsbeweis: Mann nimmt an, dass A und $\neg B$ wahr sind und kommt durch logische Argumente zu einem Widerspruch.

Beispiel A.10. *Als Beispiel wollen wir zeigen, dass aus $x = y$ folgt, dass $x^2 = y^2$ ist.*

Indirekter Beweis: *Nehmen wir an, dass $x^2 \neq y^2$ ist. Dann ist $0 \neq x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$. Da ein Produkt genau dann Null ist, wenn einer der Faktoren Null ist, impliziert das, dass $x - y \neq 0$ und $x + y \neq 0$ ist, d.h. insbesondere ist $x \neq y$.* □

Widerspruchsbeweis: *Nehmen wir an, dass $x = y$ und $x^2 \neq y^2$ gelten. Dann ist $0 \neq x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 0 \cdot (x+y) = 0$, d.h. $0 \neq 0$. Dies ist ein Widerspruch. Folglich kann die Annahme nicht stimmen.* □

Beweis von Satz A.6.

Beweis von Aussage 1:

A	B	$A \iff B$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f
f	w	f	w	f	f
f	f	w	w	w	w

Beweis von Aussage 2:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
w	w	w	f	f	w
w	f	f	f	w	f
f	w	w	w	f	w
f	f	w	w	w	w

Beweis von Aussage 3:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge \neg B)$
w	w	w	f	f	w
w	f	f	w	w	f
f	w	w	f	f	w
f	f	w	w	f	w

Beweis von Aussage 4:
In diesem Fall ist keine Äquivalenz zwischen Aussagen zu zeigen, sondern es muss nachgewiesen werden, dass die Aussage $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ immer wahr ist.

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \wedge (A \Rightarrow B)$	$A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	f	w
f	f	w	f	w

Beweis von Aussage 5:

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow B) \wedge$ $(B \Rightarrow C)$	$A \Rightarrow C$	$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C))$ $\Rightarrow (A \Rightarrow C)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	f	w	f	w	f	w	w
f	w	w	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f	f	w
w	f	f	f	w	f	f	w
f	w	f	w	f	f	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

□

A.1.3 Rechnen mit Quantoren

Neben den bisher genannten Aussagen, die meist ein einzelnes Objekt betrafen, gibt es auch Aussagen, die eine ganze Klasse von Objekten betreffen. Einige Beispiele:

- „Nachts sind alle Katzen grau.“
- „Es gibt natürliche Zahlen a, b und c, die die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen.“
- „Es gibt Vierecke, deren Seiten alle gleich lang sind.“
- „Es gibt keine lineare Gleichung, die genau zwei Lösungen hat.“

Wir führen für die Quantoren „für alle“ und „es gibt“ Schreibweisen ein, die zwei Vorteile haben. Zum einen ist es so möglich, Sätze durch Zeichenfolgen stark verkürzt darzustellen. Zum anderen ist es auf diese Art leichter, die Negation von Aussagen systematisch zu lernen.

$\forall x\colon A(x)$	bedeutet	„für alle x ist $A(x)$ wahr“
$\exists x\colon A(x)$	bedeutet	„es existiert ein x, für das $A(x)$ wahr ist“
$\nexists x\colon A(x)$	bedeutet	„es existiert kein x, für das $A(x)$ wahr ist“
$\exists! x\colon A(x)$	bedeutet	„es existiert genau ein x, für das $A(x)$ wahr ist“

Bemerkung A.11. *Das Symbol $\forall$ nennt man* Allquantor*, das Symbol $\exists$ nennt man* Existenzquantor.

Beispiel A.12.
Die Aussage „Zu jeder Zahl x existiert eine Zahl y, so dass $x+y=0$ ist, lässt sich wie folgt übersetzen:

$$\forall x\, \exists y : x + y = 0.$$

Die Reihenfolge der Quantoren ist dabei entscheidend, was wir an folgendem Beispiel exemplarisch sehen.[1]

Beispiel A.13. *Die Variablen m und s sollen alle Menschen und Obstsorten bezeichnen. Sei $A(m,s)$ die Aussage, dass m die Obstsorte s gern isst. Dann sind folgende Aussagen grundverschieden:*

- $\forall\, m\, \exists\, s : A(m,s)$ *bedeutet „für alle Menschen existiert (mindestens) eine Obstsorte, die dieser Mensch gerne isst“.*
- $\exists\, s\, \forall\, m : A(m,s)$ *bedeutet „es existiert eine Obstsorte, die alle Menschen gern essen.“*

Kommen wir nun zur Negation von Aussagen.

Merkregel A.14: Negation von Aussagen mit Quantoren

Die Verneinung einer Existenzaussage ist eine Allaussage und die Verneinung einer Allaussage ist eine Existenzaussage.

$$\neg(\exists x\colon A(x)) \iff \forall x\colon \neg A(x)$$
$$\neg(\forall x\colon A(x)) \iff \exists x\colon \neg A(x)$$

An einem Beispiel wollen wir zeigen, wie man systematisch eine beliebige Aussage, die Quantoren enthält, negieren kann. Wir betrachten dazu folgende Aussage: „Alle Rosen sind verwelkt oder teuer.“

[1] Die Reihenfolge kann nur dann ignoriert werden, wenn mehrere Quantoren der gleichen Art hintereinander stehen, z.B. ist $\forall x \forall y$ gleichbedeutend mit $\forall y \forall x$ und wird somit auch zu $\forall x, y$ abgekürzt.

Mathematisierung: Sei x eine freie Variable, die für jede beliebige Rose stehen kann. Für ein festes x formulieren wir zwei Aussagen:

$$A(x) = \text{„Die Rose ist verwelkt."}$$
$$B(x) = \text{„Die Rose ist teuer."}$$

Kritische Betrachtung: Bei der Mathematisierung nehmen wir an, dass wir wissen, auf welche Gesamtheit an Rosen die Aussage zutreffen soll (in einem bestimmten Blumenladen, am Valentinstag in jedem Blumenladen Deutschlands oder gar in jedem Blumenladen überall in der Welt). Zudem müssen wir ein gemeinsames Verständnis dafür haben, wann eine Rose als *verwelkt* oder *teuer* gilt.

Formulierund der Aussage: $\forall x\colon (A(x) \vee B(x))$

Negation der Aussage: $\exists x\colon \neg(A(x) \vee B(x))$

Vereinfachung der negierten Aussage: Mit Hilfe der De Morgan'schen Regeln kann man die negierte Aussage umformulieren:

$$\exists x\colon (\neg A(x) \wedge \neg B(x))$$

Rückübersetzung: „Es gibt (mindestens) eine Rose, die weder verwelkt noch teuer ist."

Folgerung A.15

Um eine Allaussage zu widerlegen, genügt es, ein einziges Gegenbeispiel zu finden.

Beispiel A.16. *Die Behauptung, alle Primzahlen seien ungerade, lässt sich durch Angeben der Primzahl 2 widerlegen. Um als Beweis zu gelten, muss dabei gezeigt werden, dass 2 eine gerade Zahl ist und dass es eine Primzahl ist.*

A.2 Mengen

> Unter einer 'Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die 'Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen.
>
> Georg Cantor (1915)

Beispiel A.17 (Beispiele für Mengen).

- $\{0, 1\}$ *ist die endliche Menge, die nur die Zahlen 0 und 1 enthält;*
- $\{\square, \pentagon, \hexagon\}$ *ist eine Menge, die drei Polyeder enthält, nämlich ein Vier-, ein Fünf- und ein Sechseck.*
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ *ist die Menge der natürlichen Zahlen;*
- $\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ reelle Zahl}\}$ *bezeichnet die Menge der reellen Zahlen;*

Ob Elemente zu einer Menge dazugehören oder nicht[1], können wir wie folgt verkürzt schreiben:

[1]Eine grundlegende Forderung an Mengen ist in diesem Sinne, dass feststellbar sein muss, ob Elemente zu einer Menge gehören oder nicht. Aus diesem Grund spricht man auch nicht von *der Menge aller Mengen*, da es sonst zu Widersprüchen kommen kann. In diesem Zusammenhang spricht man stattdessen von *Klassen*. Andernfalls müsste man sich mit dem Paradoxon befassen, welche Menge als die Menge aller Mengen, die sich nicht nicht selbst enthalten, beschrieben werden kann. Etwas anschaulicher: Definieren wir den Barbier als denjenigen, der genau all die Menschen rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Und wer rasiert den Barbier?

Notation

Ist x Element der Menge A, so schreiben wir $x \in A$; andernfalls schreiben wir $x \notin A$.

Aus den Beispielen sehen wir, dass es unterschiedliche Arten gibt, Mengen zu notieren. Diese können wir wie folgt kategorisieren:

1. Eine endliche Menge wird üblicherweise durch Aufzählung ihrer Elemente dargestellt, z.B. $A = \{1, 2, 3\}$.
2. Auch unendliche Mengen können durch Aufzählung notiert werden, sofern sie durch logische Fortsetzung eindeutig identifiziert werden können:
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$
ist die Menge der ganzen Zahlen. Wenn es jedoch eine Möglichkeit gibt, diese möglicherweise nicht eindeutige Form zu umgehen, so ist diese Form zu wählen.
3. Ist eine Aufzählung der Elemente einer Menge nicht möglich oder erscheint dies als zu kompliziert, so kann man eine Menge beschreiben, zum Beispiel ist
$$[0, 1] = \{\, x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1 \,\}$$
ist das abgeschlossene Intervall von 0 bis 1.

Bei allen Notationen mit Mengenklammern (geschweiften Klammern, d.h. $\{\dots\}$) spielt die Reihenfolge der Elemente für die Menge keine Rolle. Insbesondere bezeichnen $\{0, 1\}$ und $\{1, 0\}$ die gleiche Menge. Es ist eine übliche Konvention, dass jedes Element einer Menge nur einmal aufgezählt wird.

Beispiel A.18 (Weitere Beispiele für Mengen)**.**

- $\mathbb{Q}$ *bezeichnet die Menge der rationalen Zahlen;*
- $(0, 1) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \,\}$ *ist das offene Intervall von 0 bis 1;*
- $\emptyset$ *bzw.* $\{\}$ *ist die* leere Menge*;*
- $2\mathbb{Z} = \{\, z \in \mathbb{Z} \mid z$ *ist durch 2 teilbar*$\,\}$ *ist die Menge der geraden Zahlen.*

Definition A.19: Teilmenge

Eine Menge A heißt *Teilmenge* einer Menge B, falls aus $x \in A$ auch $x \in B$ folgt.

Notation

- $A \subset B$ oder $A \subsetneq B$ für echte Teilmengen, d.h. A ist eine Teilmenge von B und es existiert mindestens ein $x \in B$ mit $x \notin A$;
- $A \subset B$ oder $A \subseteq B$ für einfache Teilmenge, d.h. A ist eine Teilmenge von B, möglicherweise ist sogar $A = B$.

Kurzschreibweise der Definition:
$$A \subseteq B \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Beispiel A.20 (Beispiele für Teilmengen und solche, die es nicht sind)**.**

- $\{1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{N}$*;*
- $-1 \notin \mathbb{N}$*, also ist* $\{-1, 1\} \not\subseteq \mathbb{N}$*;*

Satz A.21

Für jede Menge M gilt sowohl $M \subseteq M$ als auch $\emptyset \subseteq M$.

Beweis. Sei M eine beliebige Menge. Beweisen wir zunächst die erste Aussage durch direkte Anwendung der Definition.

$$x \in M \quad \Longrightarrow \quad x \in M$$

ist gültig für jede Menge M. Daraus folgt, dass $M \subseteq M$ ist.

Die zweite Aussage beweisen wir durch Annahme des Gegenteils und Herleitung eines Widerspruchs: Nehmen wir an, es existiere eine Menge M mit der Eigenschaft dass $\emptyset \not\subseteq M$. Dann gilt (mit den Regeln zur Negation einer Aussage), dass ein $x \in \emptyset$ existiert mit $x \notin M$. Da die leere Menge allerdings keine Elemente enthält, kann sie insbesondere kein Element mit dieser Eigenschaft enthalten, d.h. wir haben einen Widerspruch. Es kann also keine Menge M geben mit der Eigenschaft $\emptyset \not\subseteq M$. Im Umkehrschluss heißt das also, dass jede Menge M die leere Menge enthält, was gerade die zu behauptende Aussage ist. □

Beispiel A.22 (Mengen von Mengen). *Ob ein Objekt Element oder Teilmenge einer Menge ist, ist unter Umständen vom Kontext abhängig. Betrachten wir dazu folgende Menge von Mengen, welche man daher auch als* Mengensystem *bezeichnet:*

$$M = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\},$$

d.h. die Elemente *von M sind die natürlichen, die ganzen, die rationalen und die reellen Zahlen. Man schreibt damit*

$$\mathbb{N} \in M, \quad \textit{aber} \quad \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}.$$

Definition A.23: Gleichheit von Mengen

Zwei Mengen A und B heißen *gleich*, in Zeichen $A = B$, wenn A Teilmenge von B und B Teilmenge von A ist.

Kurzschreibweise der Definition:

$$A = B \quad \Longleftrightarrow \quad ((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)) \quad \Longleftrightarrow \quad ((x \in A) \iff (x \in B))$$

Beispiel A.24. *Wir haben bereits behauptet, dass die Mengen $A = \{0, 1\}$ und $B = \{1, 0\}$ gleich sind. Überzeugen wir uns, dass dies auch nach der Definition der Mengengleichheit der Fall ist:*

- *Einerseits kann man über die gegenseitige Inklusion argumentieren: Für alle $x \in A$ (nämlich 0 und 1) gilt auch $x \in B$, d.h. $A \subseteq B$. Mit dem gleichen Argument gilt auch die Umkehrung.*
- *Andererseits kann man über die Elemente von A und B und die Äquivalenzaussage argumentieren. Einerseits gilt $x \in A \Rightarrow x \in B$, wie wir schnell für die einzigen beiden Elemente, 0 und 1, überprüfen. Andererseits gilt auch die Umkehrung: $x \in B \Rightarrow x \in A$. Daraus folgt die behauptete Äquivalenz.*

Definition A.25: Mengenoperationen

1. Sind A und B Mengen, so bezeichnet man die Menge der Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind, als *Durchschnitt* von A und B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$$

2. Sind A und B Mengen, so bezeichnet man die Menge der Elemente, die entweder in A oder in B oder in beiden enthalten sind, als *Vereinigung* von A und B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

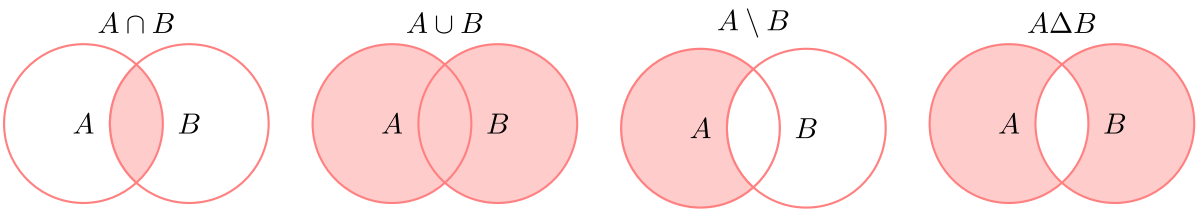
3. Sind A und B Mengen, so bezeichnet man die Menge der Elemente, die in A, aber nicht in B enthalten sind, als *Differenz* von A und B.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\} = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

4. Sind A und B Mengen, so bezeichnet man die Menge der Elemente, die entweder in A oder in B enthalten sind, als *symmetrische Differenz* von A und B.

$$A \Delta B = \{x \mid x \in A \setminus B \text{ oder } x \in B \setminus A\}$$

Diese Definitionen kann man sich mit Hilfe von **Venn-Diagrammen** verdeutlichen:



Beispiel A.26. *Seien* $A = \{1, 2, 3\}$ *und* $B = \{3, 4\}$. *Dann gilt:*

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{1, 2, 3\} \cap \{3, 4\} = \{3\}, \\ A \cup B &= \{1, 2, 3\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}, \\ A \setminus B &= \{1, 2, 3\} \setminus \{3, 4\} = \{1, 2\}, \\ A \Delta B &= \{1, 2, 3\} \Delta \{3, 4\} = \{1, 2, 4\}. \end{aligned}$$

Satz A.27: Rechengesetze für Durchschnitte und Vereinigungen von Mengen

Für beliebige Mengen A, B und C gelten die *Kommutativgesetze*

$$A \cap B = B \cap A \qquad \text{und} \qquad A \cup B = B \cup A,$$

die *Assoziativgesetze*

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad \text{und} \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

und die Distributivgesetze

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{und} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Beweis. Beginnen wir mit dem Kommutativgesetz für Schnittmengen:

Es ist $x \in A \cap B$ genau dann, wenn $x \in A$ und $x \in B$ ist, d.h.

$$x \in A \cap B \iff (x \in A) \wedge (x \in B). \tag{A.2.1}$$

Da die Konjunktion ($\wedge$) zweier Aussagen symmetrisch bezüglich der Aussagen ist, d.h. da $A \wedge B$ äquivalent ist zur Aussage $B \wedge A$, gilt also

$$(x \in A) \wedge (x \in B) \iff (x \in B) \wedge (x \in A). \tag{A.2.2}$$

Setzen wir wieder die Definition der Schnittmenge ein, so erhalten wir

$$(x \in B) \wedge (x \in A) \iff x \in B \cap A. \tag{A.2.3}$$

Aus der Kette von Äquivalenzen in (A.2.1), (A.2.2) und (A.2.3) folgt $A \cap B = B \cap A$.

Etwas kompakter zeigen wir noch das erste der beiden Distributivgesetze, wobei wir das entsprechende Distributivgesetz für die logischen Junktoren $\wedge$ und $\vee$ benutzen:

$$\begin{aligned}
x \in A \cap (B \cup C) &\iff (x \in A) \wedge (x \in (B \cup C)) \\
&\iff (x \in A) \wedge ((x \in B) \vee (x \in C)) \\
&\iff ((x \in A) \wedge (x \in B)) \vee ((x \in A) \wedge (x \in C)) \\
&\iff (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C) \\
&\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).
\end{aligned}$$

Die übrigen Aussagen zeigt man analog. $\square$

Auf Grund der Kommutativ- und Assoziativgesetze für Vereinigungen und Schnitte von Mengen können wir Vereinigungen und Schnittmengen von mehr als zwei Mengen definieren ohne auf die Reihenfolge oder Klammern achten zu müssen.

Für Vereinigungen und Schnittmengen von mehr als zwei Mengen gibt es eine geeignete Notation:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup \{ A_i \mid i \in I \} \qquad \text{bzw.} \qquad \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap \{ A_i \mid i \in I \},$$

wobei I eine beliebige Indexmenge sein kann. Man nennt i in diesem Fall den *Index* der Menge A_i.

Beispiel A.28 (Vereinigungen und Schnittmengen)**.**

- *endliche Vereinigung:* $\bigcup_{i=1}^{3} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3$*;*
- *endlicher Schnitt:* $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ *(mit* $n \in \mathbb{N}$*);*
- *(abzählbar) unendliche Vereinigung:* $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\} = \mathbb{N}$*;*
- *(abzählbar) unendlicher Schnitt:* $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[0, \frac{1}{n}\right] = \{0\}$*;*
- *(überabzählbar) unendliche Vereinigung:* $\bigcup_{x \in [0,1]} \{x\} = \{ x \mid x \in [0,1]\} = [0,1]$.

Während bei den bisherigen Mengen die Reihenfolge der Aufzählung keine Rolle gespielt hat und auch wiederholt aufgezählte Elemente die Menge nicht verändern, gibt es auch die Möglichkeit, Mengen nach ihrer Sortierung zu unterscheiden.

Während $\{a, b\}$ die Menge ist, die die Elemente a und b enthält, verstehen wir unter (a, b) das *geordnete Paar* der Elemente a und b. Während Elemente einer Menge nach Cantors Definition *wohlunterschieden* sein sollen, dürfen die Komponenten eines geordneten Paars durchaus gleich sein.

Definition A.29: kartesisches Produkt

Sind A und B zwei Mengen, so heißt die Menge

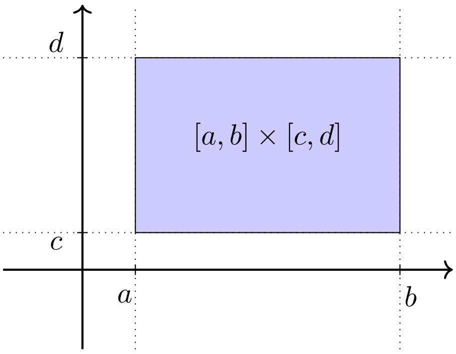
$$A \times B := \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$$

das *kartesische Produkt* der Mengen A und B.

Beispiel A.30 (kartesisches Produkt zweier Intervalle).

Seien $[a, b]$ und $[c, d]$ zwei Intervalle von reellen Zahlen, d.h. $[a, b], [c, d] \subset \mathbb{R}$. Dann ist das kartesische Produkt beider Intervalle ein Rechteck:

$$[a, b] \times [c, d] = \{ (x, y) \mid x \in [a, b], y \in [c, d] \}$$



Bemerkung A.31. *Das Beispiel zeigt, dass das kartesische Produkt zweier Mengen im Allgemeinen nicht kommutativ ist, d.h. es gilt $A \times B \neq B \times A$. So beschreibt $[1, 5] \times [1, 3]$ nicht das gleiche Rechteck wie $[1, 3] \times [1, 5]$.*

Verallgemeinern wir dieses Konzept gleich auf mehr als zwei Komponenten:

Analog definiert man Tripel, Quadrupel oder allgemeine n-*Tupel*:

$$A_1 \times \ldots \times A_n := \{ (a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n \} .$$

Damit können wir die übliche Schreibweise $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ oder den allgemeinen Fall für $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n-\text{mal}},$$

einführen.

Achtung!

Je nach Art der Klammer können unterschiedliche Objekte gemeint sein:

- $\{a, b, c, \ldots\}$ kennzeichnet eine unsortierte Menge von Objekten;
- $(a, b, c, \ldots)$ kennzeichnet ein Tupel, d.h. eine geordnete Menge – auch: Vektor oder Zahlenfolge;
- (a, b) oder $]a, b[$ kennzeichnet das offene Intervall zwischen zwei Zahlen a, b, wohingegen $[a, b]$ das abgeschlossene Intervall kennzeichnet – Achtung! Ob mit (a, b) ein offenes Intervall oder ein Tupel gemeint ist, erkennt man nur aus dem Zusammenhang heraus.
- In der Regel drückt $(\cdot)$ beim Rechnen die Reihenfolge von Operationen aus, z.B. in $(1+2)\cdot 3$; bei mehreren Klammern werden bisweilen auch eckige und geschweifte Klammern benutzt um die Lesbarkeit zu verbessern, z.B. $[(1 + 2) \cdot 3]^2 = 81$.

Notation

Für n-Tupel (bzw. Vektoren) gibt mehrere Schreibweisen:

Tupel: $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Zeilenvektor: $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$

Spaltenvektor: $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

Anhang B

Relevante Inhalte der Analysis

Das Wissen aus Analysis I und Analysis II wird für diesen Kurs weitestgehend vorausgesetzt. Ihre Lücken können Sie selbständig während des Semesters mit entsprechender Literatur, beispielsweise [Tim03] und [Tim02], schließen. Im Folgenden werden die wichtigsten Definitionen und Resultate zum Nachschlagen angegeben.

B.1 Fakultät und Binomialkoeffizient

Für die Kombinatorik benötigen wir die Begriffe *Fakultät* und *Binomialkoeffizient*.

Definition B.1

Die Fakultät einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist definiert als

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k$$

und man setzt $0! := 1$.

Die Fakultät gibt uns die Anzahl möglicher Anordnungen der Elemente der Menge $\{1, \ldots, n\}$.

Definition B.2

Seien $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann ist der Binomialkoeffizient x *über* k definiert als

$$\binom{x}{k} := \frac{x(x-1) \cdot \ldots \cdot (x-n+1)}{n!}.$$

Zudem setzen wir $\binom{x}{0} := 1$.

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt uns für $n, k \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl Möglichkeiten, k Elemente aus einer Menge von n Elementen auszuwählen ohne Beachtung der Reihenfolge und ohne Zurücklegen.

Folgende Eigenschaften sind wichtig für das Rechnen mit Binomialkoeffizienten.

Satz B.3

1. Sind $n, k \in \mathbb{N}_0$, so gilt
$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{falls } n \geq k, \\ 0, & \text{falls } n < k. \end{cases}$$
2. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\binom{x}{1} = x$.
3. Erfüllen $n, k \in \mathbb{N}_0$ die Bedingung $n \geq k$, so ist $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
4. Es gilt
$$\binom{x}{k} + \binom{x}{k+1} = \binom{x+1}{k+1}$$
für alle $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$.

Insbesondere gilt als Verallgemeinerung der binomischen Formeln der binomische Lehrsatz, welcher mit Hilfe vollständiger Induktion bewiesen wird.

Satz B.4: Binomischer Lehrsatz

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}.$$

Zudem gilt folgendes Additionstheorem für Binomialkoeffizienten.

Satz B.5

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} \binom{y}{n-k} = \binom{x+y}{n}.$$

B.2 Folgen, Reihen, Funktionenfolgen und Konvergenzbegriffe

Definition B.6

Eine Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ heißt konvergent, falls ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq k_0 \colon\ |a_k - a| < \varepsilon.$$

Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt *Nullfolge*. Eine Folge in $\mathbb{R}$ heißt *Cauchy-Folge*, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, n \in \mathbb{N}\ \forall k, j \geq n \colon\ |a_k - a_j| < \varepsilon.$$

Wichtige Folgen

- $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für alle $a > 0$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

Satz B.7: Konvergenzkriterien

1. Jede reelle Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.
2. Jede monoton wachsende (fallende), nach oben (unten) beschränkte Folge ist konvergent.
3. Wenn $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ konvergent ist, dann ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Mit Hilfe der Konvergenz von Folgen kann man Grenzwerte von Funktionen definieren.

Definition B.8

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $M \subset \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ besitzt in $a \in \mathbb{R}^n$ den (uneigentlichen) Grenzwert $g \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, falls

1. eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M \setminus \{a\}$ existiert mit $\lim_{k\to\infty} x_k = a$ und
2. für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M \setminus \{a\}$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = a$ gilt $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = g$.

Notation: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = g$.

Der einseitige Grenzwert ist wie folgt definiert:

Definition B.9

Seien $f\colon M \to \mathbb{R}$ mit $M \subset \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

Betrachtet man in Definition B.8 nur Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n < a$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so nennt man g *linksseitigen Grenzwert* von f in a und schreibt

$$f(a_-) = \lim_{x\to a_-} f(x) = \lim_{x\nearrow a} f(x) = \lim_{x\uparrow a} f(x) = g.$$

Betrachtet man in Definition B.8 nur Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n > a$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so nennt man g *rechtsseitigen Grenzwert* von f in a und schreibt

$$f(a_+) = \lim_{x\to a_+} f(x) = \lim_{x\searrow a} f(x) = \lim_{x\downarrow a} f(x) = g.$$

Für die Konvergenz von Reihen benötigt man noch den Begriff des Häufungspunktes einer Folge:

Definition B.10

Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt (HP) einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ die Ungleichung $|a - a_n| < \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Der größte HP einer Folge heißt Limes Superior, der kleinste HP heißt Limes Inferior und man schreibt $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ bzw. $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$

Bevor wir zu Reihen kommen, gibt es ein paar sehr nützliche Summenformeln:

Wichtige Summenformeln

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \qquad \text{für alle } x \neq 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Definition B.11

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine Folge. Dann heißt die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche gegeben ist durch

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad n \in \mathbb{N},$$

Reihe mit den Gliedern a_k, $k \in \mathbb{N}$. Die Reihe heißt *konvergent* (in $\mathbb{R}$), falls $s := \lim_{n\to\infty} s_n$ (in $\mathbb{R}$) existiert. Andernfalls heißt die Reihe *divergent*. Man schreibt für die Reihe auch kurz $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Die Reihe heißt *absolut konvergent*, falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist.

Folgende Reihen muss man kennen.

Wichtige Reihen

- geometrische Reihe: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} ax^k = \frac{a}{1-x}$ für $|x| < 1$
- (verallgemeinerte) harmonische Reihe: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \infty$ für $\alpha \leq 1$
- Exponentialreihe: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Satz B.12: Konvergenzkriterien für Reihen

Leibniz-Kriterium: Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine monoton fallende Nullfolge, so konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k a_k$.

Quotientenkriterium: Sei $a_k \neq 0$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\text{Ist } \limsup_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1, \text{ dann konvergiert } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ absolut,}$$

$$\text{Ist } \liminf_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} > 1, \text{ dann divergiert } \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Wurzelkriterium:

$$\text{Ist } \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1, \text{ dann konvergiert } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ absolut,}$$

$$\text{Ist } \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1, \text{ dann divergiert } \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Wenn der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \in \mathbb{R}$ existiert, dann existiert auch der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \in \mathbb{R}$ und beide Grenzwerte sind gleich. Die Umkehrung gilt nicht.

Anders als bei endlichen Summen dürfen bei Reihen die Summanden nicht einfach beliebig umgeordnet werden – es sei denn, die Reihe ist absolut konvergent.

Definition B.13: Umordnung

Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe und $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektive, dann heißt die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}$ *Umordnung* von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Satz B.14: Umordnungssatz

Konvergiert eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut, so konvergiert auch jede Umordnung $\sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}$ und die Werte stimmen überein: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}$.

Für Funktionenfolgen gibt es verschiedene Konvergenzbegriffe, deren Unterschied man sich an folgendem Beispiel überlegen kann.

Beispiel B.15. *Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktionenfolge*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le n \\ 1, & x > n \end{cases}$$

punktweise konvergent gegen die Funktion $f \equiv 0$, aber sie ist nicht gleichmäßig konvergent im Sinne der folgenden Definition.

Definition B.16

Für $n \in \mathbb{N}$ und $D \subseteq \mathbb{R}$ seien $f_n \colon D \to \mathbb{R}$ Funktionen.

1. Man sagt, f_n konvergiert *punktweise* gegen $f \colon D \to \mathbb{R}$, wenn
$$\forall \varepsilon > 0 \; \forall x \in D \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

2. Man sagt, f_n konvergiert *gleichmäßig* (in D) gegen $f \colon D \to \mathbb{R}$, wenn
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall x \in D \; \forall n \geq N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

B.3 Stetigkeit, Differenzierbarkeit

Definition B.17: Stetigkeit 1

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Weiterhin erfülle $a \in \mathbb{R}^n$ Bedingung 1 aus Definition B.8. Eine Funktion $f \colon M \to \mathbb{R}$ heißt *stetig im Punkt* a, falls $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Die Funktion heißt *stetig*, falls f stetig in jedem Punkt ihrer Definitionsmenge ist.

Eine Funktion heißt zudem stetig in jedem isolierten Punkt ihres Definitionsbereiches. Des Weiteren gibt es folgende ε-δ-Definition für Stetigkeit einer reellwertigen Funktion.

Definition B.18: Stetigkeit 2

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Eine Abbildung $f \colon M \to \mathbb{R}$ heißt *stetig in* $a \in M$ genau dann, wenn
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \quad x \in M, |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

f heißt *stetig in* M, falls f in allen Punkten $a \in M$ stetig ist.

Es gibt auch stärkere Begriffe als Stetigkeit, beispielsweise gleichmäßige Stetigkeit, Hölder-Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit, welche wir hier kurz vorstellen.

Definition B.19: gleichmäßige Stetigkeit

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Eine Abbildung $f \colon M \to \mathbb{R}$ heißt *stetig in* M genau dann, wenn
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \forall x, x' \in D : \quad |x - x'| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Bemerkung B.20. *Gleichmäßige Stetigkeit ist stärker als (punktweise) Stetigkeit in M, da δ bei punktweiser Stetigkeit von ε und der ausgewählten Stelle a abhängig ist, d.h. $\delta = \delta(\varepsilon, a)$, wohingegen δ bei gleichmäßiger Stetigkeit nur von ε abhängig ist, d.h. $\delta = \delta(\varepsilon)$.*

Beispiel B.21. *Die Funktion $f \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, welche gegeben ist durch $f(x) = x^2$, ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.*

Definition B.22: Hölder-Stetigkeit

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen und sei $0 < \alpha \leq 1$. Eine Abbildung $f\colon U \to \mathbb{R}$ heißt *Hölder-stetig zum Exponenten* α (bzw. α-Hölder-stetig) (auf U), wenn eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass gilt:

$$\left|f(x) - f(x')\right| \leq C \left|x - x'\right|^{\alpha}, \quad \forall x, x' \in U.$$

Lipschitz-Stetigkeit ist der Spezialfall der Hölder-Stetigkeit mit $\alpha = 1$:

Definition B.23: Lipschitz-Stetigkeit

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen. Eine Abbildung $f\colon U \to \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig* (auf U), wenn eine Konstante $L > 0$ existiert, so dass gilt:

$$\left|f(x) - f(x')\right| \leq L \cdot \left|x - x'\right|, \quad \forall x, x' \in U.$$

L nennt man in diesem Fall *Lipschitz-Konstante*.

Bemerkung B.24. *Lipschitz-stetige Funktionen sind fast überall differenzierbar. Andersherum gilt für differenzierbare Funktionen, dass sie Lipschitz-stetig sind, falls ihre Ableitung (auf dem interessierenden Intervall) beschränkt ist.*

Definition B.25: Absolute Stetigkeit von Funktionen

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Abbildung $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt *absolut stetig*, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass zu endlich vielen disjunkten Intervallen $J_k = (a_k, b_k) \subseteq I$ mit Gesamtlänge $\sum_k |J_k| < \delta$ stets $\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$ gilt.

Es gilt folgender Zusammenhang zwischen den verschiedenen Arten der Stetigkeit:

$$f \text{ Lipschitz-stetig} \implies f \text{ absolut stetig} \implies f \text{ gleichmäßig stetig} \implies f \text{ stetig.}$$

Absolut stetige Funktionen sind fast überall differenzierbar mit endlicher Ableitung. Damit gilt der Hauptsatz der Analysis in folgender Form:

Satz B.26: Hauptsatz der Analysis

Sei $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ absolut stetig. Dann ist F fast überall differenzierbar, die Ableitung F' ist integrierbar und es gilt

$$\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Definition B.27: Differenzierbarkeit (1-dimensional)

Seien $M \subset \mathbb{R}$, $f\colon M \to \mathbb{R}$ und $a \in M$. Falls der Grenzwert

$$g := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$$

existiert, dann heißt f *differenzierbar in* a und g ist die *Ableitung von* f *in* a.

Ableitungsregeln

Sei $M \subset \mathbb{R}$ und seien $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ in $a \in M$ differenzierbar und $h\colon f(M) \to \mathbb{R}$ in $f(a)$ differenzierbar. Dann gilt für die Ableitungen:

Produktregel: $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;

Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$ falls $g(a) \neq 0$;

Kettenregel: $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

Satz B.28

Sei $M \subset \mathbb{R}$ und sei $f\colon M \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei zudem $f\colon M \to f(M)$ invertierbar mit Umkehrfunktion f^{-1}. Sei $y \in f(M)$ derart, dass $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$. Dann ist f^{-1} in y differenzierbar, und es gilt

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Folgende Ableitungsregeln werden als bekannt vorausgesetzt:

Ableitungen wichtiger Funktionen

$$(ax^b)' = abx^{b-1} \qquad (e^x)' = e^x \qquad (a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Definition B.29: partielle Ableitung

Seien $n \in \mathbb{N}$, $M \subset \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in M$ und $f\colon M \to \mathbb{R}$ gegeben. Wenn für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \ldots, a_n) - f(a)}{h} =: g \in \mathbb{R}$$

existiert, so heißt f *partiell differenzierbar in Richtung von* x_j (oder in der j-ten Komponente) und g heißt *partielle Ableitung von* f *in Richtung von* x_j.

Notation: $g = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \partial_{x_j} f(a) = f_{x_j}(a)$ oder auch verkürzt $\partial_j f(a)$.

Definition B.30: Gradient

Ist $f\colon M \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $a \in M$, so heißt der Vektor v mit

$$v^T = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

Gradient von f *in* a.

B.4 Integrationsregeln

Während es für eine Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nur einen Begriff für Differenzierbarkeit gibt, existieren verschiedene Integral-Begriffe – die wichtigsten sind das Riemann- und das Lebesgue-Integral. Auf die genauen Definitionen muss hier nicht eingegangen werden, da die Rechenregeln übereinstimmen. Die im Folgenden genannten Regeln und Stammfunktionen sind diejenigen, die als bekannt vorausgesetzt werden.

Definition B.31: Stammfunktion

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine differenzierbare Funktion $F\colon I \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion von* f, wenn $F'(x) = f(x)$ gilt für alle $x \in I$. Das *unbestimmte Integral* $\int f(x)\mathrm{d}x$ ist die Menge aller Stammfunktionen von f.

Satz B.32: partielle Integration

Die Funktionen $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar und $f \cdot g'$ besitze eine Stammfunktion. Dann gilt:

$$\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x + f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Satz B.33: Substitution

Die Funktion $g\colon [a,b] \to I \subset \mathbb{R}$ sei differenzierbar und $f\colon I \to \mathbb{R}$ besitze eine Stammfunktion. Dann gilt:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\mathrm{d}y.$$

Wichtige Stammfunktionen

Für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ und $a > 0$ gilt:

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, \qquad \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C,$$

$$\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C, \qquad \int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C, \qquad \int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C.$$

Es können auch Integrale über 2- oder 3-dimensionalen Mengen auftauchen. Wie diese zu berechnen sind, wiederholen wir jetzt.

Definition B.34: Normalbereich

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ für $n \in \{2,3\}$. Die Menge A heißt *Normalbereich*, falls

$n = 2$: $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ und stetige Funktionen $a_2, b_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existieren, so dass

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a_1 \le x \le b_1, a_2(x) \le y \le b_2(x) \right\}.$$

$n = 3$: $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$, stetige Funktionen $a_2, b_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a_3, b_3 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ existieren, so dass

$$A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a_1 \le x \le b_1, a_2(x) \le y \le b_2(x), a_3(x,y) \le z \le b_3(x,y) \right\}.$$

Satz B.35

Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \{2,3\}$) ein Normalbereich und $f \colon A \to \mathbb{R}$ über A integrierbar, so berechnet man das Integral $\int_A f(x)\mathrm{d}x$ wie folgt:

$n = 2$: Ist $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a_1 \le x \le b_1, a_2(x) \le y \le b_2(x) \right\}$, so ist

$$\int_A f(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2(x)}^{b_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

$n = 3$: Ist $A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a_1 \le x \le b_1, a_2(x) \le y \le b_2(x), a_3(x,y) \le z \le b_3(x,y) \right\}$, so ist

$$\int_A f(x,y,z)\mathrm{d}(x,y,z) = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2(x)}^{b_2(x)} \left(\int_{a_3(x,y)}^{b_3(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Beispiel B.36. *Sei* $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \le 1 \right\}$. *Dies ist ein Normalbereich, denn*

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1 \le x \le 1, -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \right\}.$$

Integrieren wir über A *die konstante Funktion* $f(x) \equiv 1$, *so ist (mit Substitution* $x = \sin u$, $\mathrm{d}x = \cos u \mathrm{d}u$*)*

$$\begin{aligned}
\int_A f(x,y)\mathrm{d}(x,y) &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1-x^2} - (-\sqrt{1-x^2}) \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_{\arcsin(-1)}^{\arcsin(1)} 2\sqrt{1-(\sin u)^2} \cos u \,\mathrm{d}u \\
&= \int_{\arcsin(-1)}^{\arcsin(1)} 2(\cos u)^2 \mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Man berechnet eine Stammfunktion als

$$\int (\cos u)^2 \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(u + \sin u \cos u \right)$$

und erhält (mit $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$*,* $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ *und* $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$*)*

$$\begin{aligned}\int_A f(x,y)\mathrm{d}(x,y) &= [u + \sin u \cos u]_{\arcsin(-1)}^{\arcsin(1)} \\ &= \arcsin(1) - \arcsin(-1) + 1 \cdot \cos(\arcsin(1)) - (-1) \cdot \cos(\arcsin(-1)) \\ &= 2\arcsin(1) + \cos(\arcsin(1)) + \cos(\arcsin(-1)) \\ &= 2\arcsin(1) + \sqrt{1-1^2} + \sqrt{1-(-1)^2} \\ &= \pi.\end{aligned}$$

Dies ist der Flächeninhalt des Einheitskreises.

Satz B.37: Transformationssatz

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene Menge und sei $g\colon B \to g(B) \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Diffeomorphismus, d.h. eine bijektive, stetig differenzierbare Abbildung mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung. Dann ist eine Abbildung f auf $g(B)$ genau dann integrierbar, wenn $f \circ g \cdot |\det(Dg)|$ auf B integrierbar ist und in diesem Fall ist

$$\int_B f(y)\mathrm{d}y = \int_{g(B)} f(g(x))\,|\det(Dg(x))|\,\mathrm{d}x.$$

Dieser Satz wird angewendet, wenn bei der Integration die Transformation zu Polar-, Zylinder- oder Kugelkoordinaten gemacht wird.

Koordinatentransformation

Die Funktionaldeterminanten $D := \det(g)$ zu den wichtigsten Tranformationen:

Polarkoordinaten: $D = r$ für

$$g(r,\phi) := \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix}, \quad (r,\phi) \in [0,\infty) \times [0,2\pi)$$

Zylinderkoordinaten: $D = r$ für

$$g(r,\phi,z) := \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \\ z \end{pmatrix}, \quad (r,\phi,z) \in [0,\infty) \times [0,2\pi) \times \mathbb{R}$$

Kugelkoordinaten: $D = r^2 \sin\theta$ für

$$g(r,\theta,\phi) := \begin{pmatrix} r\cos(\phi)\sin\theta \\ r\sin(\phi)\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}, \quad (r,\theta,\phi) \in [0,\infty) \times [0,\pi) \times [0,2\pi)$$

Literaturverzeichnis

[BK19] BROKATE, Martin ; KERSTING, Götz: *Mathematik Kompakt*. Bd. 0: *Maß und Integral*. 2. Auflage. Basel : Springer Basel, 2019

[Els11] ELSTRODT, Jürgen: *Maß- und Integrationstheorie*. 7., korrigierte und aktualisierte Auflage. Berlin, Heidelberg, 2011 (Springer-Lehrbuch)

[For13] FORSTER, Otto: *Analysis 2: Differentialrechnung im IRn, gewöhnliche Differentialgleichungen*. Wiesbaden : Springer Fachmedien Wiesbaden, 2013 (Grundkurs Mathematik)

[For16] FORSTER, Otto: *Analysis 1: Differential-und Integralrechnung einer Veränderlichen*. Springer-Verlag, 2016

[Hen19] HENZE, Norbert: *Stochastik: Eine Einführung mit Grundzügen der Maßtheorie Inkl. zahlreicher Erklärvideos*. Berlin, Heidelberg, 2019

[Kü16] KÜCHLER, Uwe: *Maßtheorie für Statistiker. Grundlagen der Stochastik*. 1. Auflage. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2016 (Statistik und ihre Anwendungen)

[Sch05] SCHILLING, René L.: *Measures, integrals and martingales*. Cambridge University Press, 2005

[Tim02] TIMMANN, Steffen: *Repetitorium der Analysis. Teil 2*. Binomi, 2002

[Tim03] TIMMANN, Steffen: *Repetitorium der Analysis. Teil 1*. 2. Auflage. Binomi, 2003