

Aufgaben für die Übungen Analysis I*

Serie 1

- 1) Beweisen Sie die Bernoulli'sche Ungleichung:

Für $n \in \mathbb{N}$ und $a > -1$ gilt:

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

- 2) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ folgende Aussage gilt:

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2.$$

- 3) Sei

$$K := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Wir führen folgende Addition und Multiplikation ein:

$$\begin{cases} (a, b) + (a', b') & := (a + a', b + b'), \\ (a, b) \cdot (a', b') & := (aa' + 2bb', ab' + ba'), \end{cases}$$

für $(a, b), (a', b') \in K$. Zeigen Sie, dass $(K, +, \cdot)$ ein Körper ist.

- 4) Zeigen Sie, dass für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$ folgende Regel gilt:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc.$$