Prof. Dr. Ulrich Horst
Jana Bielagk

WiSe 2017/18

Aufgaben für die Übungen

Analysis I*

Serie 2

1) Zeigen Sie, dass zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ eine eindeutig bestimmte ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ existiert, welche $k \leq x < k+1$ erfüllt.

   Bemerkung: Wir schreiben $k = [x]$ und nennen $[x]$ die Gaußklammer von x.

   Beweis:

   Sei $x \in \mathbb{R}$ Nach der Archimedischen Eigenschaft der reellen Zahlen gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$ und eine (ggf. andere) natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $-m < x$. Damit ist die Menge

$$A = \{k \in \mathbb{Z} | k \leq x\}$$

   nichtleer (da sie m enthält) und nach oben beschränkt (dank n). Nach Folgerung 1.3 besitzt A also ein Maximum k^*. Für dieses gilt $k^* \leq x < k^* + 1$.

   Zur Eindeutigkeit: Sei $K \in \mathbb{Z}$ eine von k^* verschiedene, ganze Zahl, die $K \leq x < K+1$ erfüllt. O.B.d.A. nehmen wir $k^* < K$ an. Dann gilt

$$k^* < K \leq x < k^* + 1,$$

   also insbesondere $k^* < K < k^* + 1$, was im Widerspruch zu $k^*, K \in \mathbb{Z}$ steht.

2) Beweisen Sie, dass in jedem offenen Intervall $(x, y) \subset \mathbb{R}$ eine **irrationale** Zahl liegt.

   Beweis:

   Wir wissen aus der Vorlesung, dass jedes Intervall eine *rationale* Zahl enthält. Insbesondere ex. also ein $q \in (x, y) \cap \mathbb{Q}$. Wir zeigen nun, dass es eine irrationale Zahl in $(q, y) \subset (x, y)$ gibt..

   Wir gehen dazu wie folgt vor: Wir wissen, dass die rationalen Zahlen abzählbar sind, die rellen Zahlen hingegen überabzählbar. Also muss es mindestens eine irrationale Zahl geben (sogar überabzählbar viele, aber eine genügt uns hier). Insbesondere gibt es eine positive irrationale Zahl, denn wenn wir eine negative finden, so wählen wir ihr additives Inverses, welches positiv sein muss. Wir nennen diese positive irrationale Zahl a.
   Nach dem Archimedischen Axiom der rellen Zahlen gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$

sodass $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Wenn wir nun $\delta := y - q$ setzen und $\varepsilon = \frac{\delta}{a}$, so finden wir insbesondere ein $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon = \frac{\delta}{a} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \frac{a}{n} < \delta.$$

Wir wählen nun $z := q + \frac{a}{n}$. Dann liegt $z \in (x, y)$, da einerseits $0 < \frac{a}{n}$ und somit

$$x < q < q + \frac{a}{n} = z$$

und andererseits $\frac{a}{n} < \delta$ und somit

$$z = q + \frac{a}{n} < q + \delta = q + (y - q) = y.$$

Weiterhin ist z irrational. Um dies zu zeigen nehmen wir an, dass z rational sei. Da $\mathbb{Q}$ ein Körper ist und $q \in \mathbb{Q}$, ist dann auch $\frac{a}{n} = z - q$ rational und damit auch $a = n\frac{a}{n}$, was absurd ist. Also muss z irrational sein.

Wir haben also ein irrationale Zahl $z \in (x, y)$ gefunden.

3) Es seien B_k, $k \in \mathbb{N}$, abzählbare Mengen. Entscheiden Sie, ob

$$B := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$$

abzählbar oder überabzählbar ist (mit Beweis).

Lösung:

Behauptung: Es seien B_k, $k \in \mathbb{N}$, abzählbare Mengen. Dann ist

$$B := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$$

abzählbar.

Beweis: Da alle B_k abzählbar sind existieren Bijektionen $f_k \colon \mathbb{N} \to B_k$. Wir setzen

$$F \colon \mathbb{N}^2 \to \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$$
$$(i, k) \longmapsto f_k(i)$$

Sind die Mengen B_n alle disjunkt, so ist dies eine Bijektion: F ist injektiv, denn ist $F(i, k) = F(\mu, \nu)$, so folgt $f_i(k) = f_\mu(\nu)$. Da die B_n alle als disjunkt vorausgesetzt sind, folgt $i = \mu$ und somit $f_i(k) = f_i(\nu)$. Da die f_i aber alle Bijektionen sind impliziert dies, dass $k = \nu$, insgesamt also $(i, k) = (\mu, \nu)$.

Sei andererseits $m \in \bigcup_n B_n$, so ex. ein n_0, dass $m \in B_{n_0}$. Da aber die f_k alle Bijektionen sind ex. ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $m = f_{n_0}(k) = F(n_0, k)$ und f ist somit surjektiv.

Somit ist die Vereinigung gleichmächtig zu $\mathbb{N}^2$, was nach Aufgabe 3.i) vom 2. Aufgabenblatt abzählbar ist.

Es bleibt der Fall zu betrachten, dass die Mengen B_n nicht alle disjunkt sind. Man kann nun argumentieren, dass dies die Vereinigungsmenge höchstens kleiner macht und somit auch in diesem Fall die Vereinigung aller B_ns abzählbar ist. Will man auch für diesen Fall eine Bijektion angeben, so müssen wir die Menge $\mathbb{N}^2$ verkleinern. Für jedes $m \in \bigcup_n B_n$ setzen wir $(t \geq 0)(m) = \min\{j \in \mathbb{N} \mid m \in B_j\}$ und wählen unter alle Indexpaaren in $\mathbb{N}^2$ nur diejenigen aus, für die der erste Index gerade diese Minimalitätseigenschaft erfüllt, d.h.

$$N := \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 | \ (t \geq 0)(f_i(j)) = i\}$$

Dann ist die Abbildung $F : N \to \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ mit der selben Abbildungsvorschrift wie oben nach Konstruktion eine Bijektion. Anderseits ist N als Teilmenge einer abzählbaren Menge höchstens abzählbar (das wurde in den Übungen behandelt). N kann aber nicht endlich sein, da die abzählbare Menge $\{(1,j)|j \in \mathbb{N}\}$ komplett in N liegt, somit muss N abzählbar sein und damit auch $\bigcup_n B_n$.

4) Zeigen Sie mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes:

Für jede reelle Zahl $x \geq 0$ und jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt:

$$(1+x)^n \geq \frac{n^2}{4} x^2.$$

Hinweis: Überzeugen Sie sich, dass $\binom{n}{2} \geq \frac{n^2}{4}$ ist für $n \geq 2$.

Beweis: Für $x \geq 0$ und $n \geq 2$ gilt nach dem Binomischen Lehrsatz

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k 1^{n-k} \geq \binom{n}{2} x^2,$$

da alle Summanden nichtnegativ sind. Außerdem gilt

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \geq \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{n^2}{4},$$

da $n - 1 \geq \frac{n}{2}$ für $n \geq 2$. Damit folgt insgesamt

$$(1+x)^n \geq \frac{n^2}{4} x^2.$$