Prof. Dr. Ulrich Horst
Jana Bielagk

WiSe 2017/18

Übungen zur Vorlesung

Analysis I*

<u>Serie 2</u>

1) (2 Punkte) Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere, endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass A ein kleinstes und ein größtes Element enthält, d.h. es existieren $x_{min} \in A$ und $x_{max} \in A$, so dass $x_{min} \leq x \leq x_{max}$ für alle $x \in A$.

   Hinweis: Induktion über die Anzahl der Elemente von A.

2) (6 Punkte)

   a) Untersuchen Sie, ob die Menge
   $$M := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ mit } nx = n^2 + 1\}$$
   nach oben bzw. nach unten beschränkt ist und bestimmen Sie ggf. das Supremum bzw. das Infimum. Sind dies Maxima bzw. Minima von M?

   b) Seien $A, B \subset \mathbb{R}^+$ beschränkte Mengen positiver reeller Zahlen und sei
   $$A \cdot B := \{a \cdot b \quad | \, a \in A,\ b \in B\}.$$
   Zeigen Sie
   $$\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B.$$

   c) Seien $A_i \subset \mathbb{R}$, $i \in \Lambda$, beliebig viele beschränkte Mengen und sei $\bigcup\limits_{i \in \Lambda} A_i \subset \mathbb{R}$ ebenfalls beschränkt. Wie verhalten sich die Suprema
   $$\sup \{ \sup A_i \mid i \in \Lambda\} \qquad \text{und} \qquad \sup\Big(\bigcup_{i \in \Lambda} A_i\Big)$$
   zueinander?

3) (4 Punkte)

   i) Wir betrachten n abzählbare Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ und setzen
   $$A := A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \ \mid \ a_j \in A_j,\ j = 1, 2, \ldots, n\}.$$
   Entscheiden Sie, ob A abzählbar oder überabzählbar ist (mit Beweis).

ii) Sei M eine unendliche Menge. Zeigen Sie, dass eine abzählbare Menge $M_0 \subset M$ existiert, so dass $M \setminus M_0$ zu M gleichmächtig ist.

4) (4 Punkte) Zeigen Sie:

i) Für alle $x \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{Z}$, $m, r \in \mathbb{N}$ gilt: $(\sqrt[rm]{x})^{rn} = (\sqrt[m]{x})^n = \sqrt[m]{x^n}$.

ii) Für alle $x \in \mathbb{R}^+$, $q, p \in \mathbb{Q}$ gilt: $x^q x^p = x^{q+p}$ und $(x^q)^p = x^{qp}$.

iii) Für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$, $q \in \mathbb{Q}$ gilt: $x^q y^q = (xy)^q$.

iv) Für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sqrt[n]{x+y} \leq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$.

Bitte schreiben Sie die Lösung jeder Aufgabe auf ein extra Blatt und versehen Sie jedes Blatt mit Ihren Namen und Ihren Matrikel-Nummern.