Prof. Dr. Ulrich Horst
Jana Bielagk

WiSe 2017/18

Übungen zur Vorlesung

Analysis I*

Serie 4

1) (4 Punkte) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Zeigen Sie:

   a) $Int(A)$ ist die 'größte' offene Menge, die in A enthalten ist, d.h. es gilt:

   $$Int(A) = \bigcup_{\substack{U \subset A \\ U \text{ offen}}} U \ .$$

   b) $cl(A)$ ist die 'kleinste' abgeschlossene Menge, die A enthält, d.h. es gilt:

   $$cl(A) = \bigcap_{\substack{A \subset F \\ F \text{ abgeschlossen}}} F \ .$$

2) (4 Punkte) Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \longrightarrow Y$ eine Isometrie. Zeige folgende Aussagen:

   i) f ist injektiv.

   ii) Das Inverse f^{-1} von f ist eine Isometrie.

   iii) Die Verkettung von Isometrien ist eine Isometrie, d.h. ist (Z, d_Z) ein metrischer Raum und $g : Y \longrightarrow Z$ eine weitere Isometrie, dann ist $g \circ f : X \longrightarrow Z$, gegeben durch $x \mapsto g(f(x))$, eine Isometrie.

   iv) Gegeben seien die beiden Intervalle

   $$I_1 := [a_1, b_1] \subset \mathbb{R} \text{ und } I_2 := [a_2, b_2] \subset \mathbb{R} \text{ mit } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}, \text{s.d. } a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2.$$

   Die jeweilige Einschränkung der Metrik $d(x, y) = |x - y|$ für $x, y \in \mathbb{R}$ auf I_i, bezeichnet mit d_{I_i}, definiert auf diesen eine Metrik. Wann sind die beiden metrischen Räume (I_1, d_{I_1}) und (I_2, d_{I_2}) isometrisch?

3) (4 Punkte)

   i) Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Zeigen Sie, dass die Menge der Häufungspunkte von A sowie der Rand von A abgeschlossen sind. Gilt dies auch für die Menge der isolierten Punkte von A?

   ii) Wir betrachten $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik $d(x, y) := |x - y|$. Zeigen Sie:

a) Ist $A \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt, so gilt $sup(A) \in cl(A)$.

b) Ist $A \subset \mathbb{R}$ nach unten beschränkt, so gilt $inf(A) \in cl(A)$.

Unter welchen Bedingungen ist $sup(A)$ im Fall a) bzw. $inf(A)$ im Fall b) ein Häufungspunkt bzw. ein Randpunkt von A?

4) (4 Punkte) Sei (X, d) ein metrischer Raum und d^* die Metrik $d^*(x, y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ auf X. Sei des Weiteren (x_n) eine Folge in X und $x \in X$. Zeigen Sie:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{in} \quad (X, d) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{in} \quad (X, d^*)$.

ii) Die Menge der Häufungspunkte der Folge (x_n) stimmt für beide Metriken überein.

iii) Die Menge der Häufungspunkte einer Folge in einem metrischen Raum ist abgeschlossen.

Bitte schreiben Sie die Lösung jeder Aufgabe auf ein extra Blatt und versehen Sie jedes Blatt mit Ihren Namen und Ihren Matrikel-Nummern. Schrieben Sie auch die Gruppe auf das Blatt, in welcher Sie Ihre Lösung abholen wollen.