

# Mathematik I – WiSe 2017/18

Jana Bielagk

## Notation

$\emptyset$	die leere Menge, auch $\{\}$
$\{a, b, c, \dots\}$	ungeordnete Menge, z.B. $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$
$(a, b, c, \dots)$	geordnete Menge, Tupel, Vektor
$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen $\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Q}$	rationale Zahlen
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen
$\mathbb{R}_{>0}$	positive reelle Zahlen
$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen
$A \times B$	kartesisches Produkt von $A$ und $B$ , z.B. $\{1, 2, 3\} \times \{4, 5\} = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$
$A \cap B$	Schnittmenge von $A$ und $B$ , z.B. $\{0, 1\} \cap \{1, 2\} = \{1\}$
$A \cup B$	Vereinigung von Mengen $A$ und $B$ , z.B. $\{0, 1\} \cup \{1, 2, 3\} = \{0, 1, 2, 3\}$
$A \subset B$	Menge $A$ ist in Menge $B$ enthalten, z.B. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
$A \setminus B$	Menge von Elementen, die in $A$ , aber nicht in $B$ sind
$a \in A$	$a$ ist ein Element der Menge $A$ , z.B. $5 \in \mathbb{N}$
$\forall$	für alle, z.B. $\forall n \in \mathbb{N} \dots$ heißt, für alle natürlichen Zahlen $n \dots$
$\exists$	es existiert, z.B. $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}: m > n$ , d.h. für alle natürlichen Zahlen existiert eine noch größere natürliche Zahl
$f: A \rightarrow B$	eine Funktion $f$ von $A$ nach $B$ , $A$ ist Definitions- und $B$ Wertebereich
$a \mapsto b$	Element $a$ wird auf $b$ abgebildet, z.B. $f(x) = x^2$ entspricht $x \mapsto x^2$
$A := B$	definiere $A$ als $B$ , z.B. $A := \{1, 2, 3\}$
$A \Rightarrow B$	Implikation (aus der Aussage $A$ folgt Aussage $B$ ), z.B. $a > 0 \Rightarrow a^2 > 0$
$A \Leftrightarrow B$	Aussage $A$ ist äquivalent zu $B$ , d.h. $A$ stimmt genau dann, wenn $B$ stimmt, z.B. $a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$
$(x_k)_{k=1, \dots, n}$	$n$ -dimensionaler Vektor
$(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$	Folge $x_1, x_2, x_3, \dots$
$x \rightarrow a$	Grenzwertbetrachtung, lasse $x$ gegen $a$ gehen
$x \rightarrow a_+$	einseitige Grenzwertbetrachtung von rechts
$x \rightarrow a_-$	einseitige Grenzwertbetrachtung von links
$f(x_+)$	Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_+} f(x)$
$[a, b]$	abgeschlossenes Intervall von $a$ bis $b$ , z.B. $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$
$(a, b)$	offenes Intervall von $a$ bis $b$ , z.B. $(3, 5) = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 5\}$

Im Allgemeinen nennt man  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  ein  $n$ -Tupel. Für  $n = 2, 3, 4$  sind auch die Bezeichnungen *geordnetes Paar*, *Tripel* und *Quadrupel* üblich.

# 1 Funktionen, Folgen und Grenzwerte

## 1.1 Abbildungen, Funktionen und ihre Eigenschaften

Seien  $A$  und  $B$  Mengen, d.h. Zusammenfassungen von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten. Durch die eindeutige Zuordnung  $f: A \rightarrow B, a \mapsto f(a)$  (mit  $a \in A, f(a) \in B$ ) wird eine Abbildung explizit angegeben.

$A$  ist dabei der *Definitionsbereich* der Funktion,  $B$  ihr *Wertebereich*.

**Beispiel 1.1.** a)  $f: [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1]$  mit  $x \mapsto f(x) = \sin x$  hat den Definitionsbereich  $DF_f = [0, 2\pi]$  und den Wertebereich  $WB_f = [-1, 1]$ .

b)  $f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 2]$  mit  $(x, y) \mapsto f(x, y) = x + y$  hat den Definitionsbereich  $DB_f = [0, 1] \times [0, 1] = [0, 1]^2$  und den Wertebereich  $WB_f = [0, 2]$ .

Ist  $A \subset \mathbb{R}^n$  für  $n \in \mathbb{N}$  und  $B = \mathbb{R}$ , dann heißt die Abbildung *reelle Funktion*. Elemente  $a \in A$  werden in diesem Zusammenhang auch als *Argumente* von  $f$  bezeichnet.

Das *Bild* eines Elementes  $a \in A$  ist das eindeutige Element  $b \in B$  mit  $f(a) = b$ . Das Bild einer Menge  $M \subset A$  ist die Vereinigung aller Bilder der Elemente von  $M$ :

$$f(M) := \{f(a) \mid a \in M\} = \bigcup_{a \in M} \{f(a)\} \subset B.$$

Alternativ kann man sagen:

$$f(M) = \{b \in B \mid \text{Es existiert ein } a \in M \text{ mit } f(a) = b\}.$$

Das *Urbild* eines Elementes  $b \in B$  ist definiert als  $f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$ , das Urbild einer Menge  $\widetilde{M} \subset B$  ist analog dazu definiert als

$$f^{-1}(\widetilde{M}) := \left\{ a \in A \mid f(a) \in \widetilde{M} \right\}.$$

Je nach Kontext bezeichnet man das Urbild auch als Niveaumenge/-linie/-fläche oder Höhenlinie und nutzt die Notation  $N_f(c) := \{a \in A \mid f(a) = c\}$  für  $c \in f(A), f: A \rightarrow B$ .

**Beispiel 1.2.** Sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Dann ist für  $c > 0$  die Niveaulinie  $N_f(c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = c\}$  gerade der Kreis um  $(0, 0)$  mit Radius  $\sqrt{c}$ .

**Beispiel 1.3** (Fortsetzung von 1.1). Sei wieder  $f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 2]$  mit  $(x, y) \mapsto f(x, y) = x + y$ . Dann ist

- $f(0.3, 0.5) = 0.8$ ,
- $f([0, 0.1] \times [0, 0.2]) = [0, 0.3]$ ,
- $f^{-1}(1) = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x + y = 1\} = N_f(1) = \{(x, 1 - x) \mid x \in [0, 1]\}$ .

**Bemerkung 1.4.** Das Urbild ist nicht notwendigerweise einelementig, so ist zum Beispiel bei  $f(x) = x^2$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) das Urbild von 4 zwei-elementig:  $f^{-1}(4) = \{-2, 2\}$ . Das Urbild von  $-1$  hingegen ist die leere Menge, sofern wir uns auf die reellen Zahlen beschränken:  $f^{-1}(-1) = \emptyset$ .<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Mit anderem DB ist das Ergebnis ein anders:  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(x) = x^2$  hat Urbild  $g^{-1}(-1) = \{-i, i\}$ .

Falls

- das Bild von  $f$  mit dem Wertebereich übereinstimmt, d.h.  $f(A) = B$  (man nennt  $f$  dann auch *surjektiv*), und
- alle Urbilder **höchstens** einelementig sind, d.h. jedem Bildelement kann man **entweder** ein eindeutiges Urbild zuordnen **oder das Urbild ist die leere Menge** (man nennt  $f$  dann auch *injektiv*),

dann ist  $f$  *umkehrbar* (oder *invertierbar/bijektiv*). Man bezeichnet die *Umkehrfunktion* (oder *Inverse*) von  $f$  dann mit  $f^{-1}$ .

**Beispiel 1.5.**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) := x^2$  ist nicht surjektiv, da  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$  ist.  $f$  ist auch nicht injektiv, denn  $f^{-1}(9) = \{-3, 3\}$ .

**Bemerkung 1.6.** Mit dem Wertebereich  $WB_f = f(DB_f)$  wird jede Funktion  $f$  surjektiv.

Eine Funktion  $f: A \rightarrow B$  mit  $A, B \subset \mathbb{R}$  heißt

- *nach oben beschränkt*, falls es eine Zahl  $M \in \mathbb{R}$  gibt, so dass für alle  $x \in A$  gilt:  $f(x) \leq M$ ;
- *nach unten beschränkt*, falls es eine Zahl  $m \in \mathbb{R}$  gibt, so dass für alle  $x \in A$  gilt:  $f(x) \geq m$ ;
- *beschränkt*, falls  $f$  sowohl nach unten als auch nach oben beschränkt ist;
- *monoton wachsend*, falls für alle  $x, y \in A$  mit  $x < y$  gilt:  $f(x) \leq f(y)$ ;
- *monoton fallend*, falls für alle  $x, y \in A$  mit  $x < y$  gilt:  $f(x) \geq f(y)$ ;
- *streng monoton wachsend*, falls für alle  $x, y \in A$  mit  $x < y$  gilt:  $f(x) < f(y)$ ;
- *streng monoton fallend*, falls für alle  $x, y \in A$  mit  $x < y$  gilt:  $f(x) > f(y)$ ;
- *periodisch mit einer Konstanten  $p > 0$* , falls für alle  $x \in A$  auch  $x + p \in A$  und  $f(x) = f(x + p)$  gilt. Die kleinste positive Zahl  $p$  mit dieser Eigenschaft heißt *Periode* von  $f$ .

**Beispiel 1.7.**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) := x^2$  ist nach unten beschränkt, nach oben unbeschränkt, auf  $(-\infty, 0)$  streng monoton fallend und nicht insgesamt, aber auf  $(-\infty, 0)$  (bzw.  $(0, \infty)$ ) invertierbar mit  $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$  für  $x \in (-\infty, 0)$  (bzw.  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$  für  $x \in (0, \infty)$ ).

**Satz 1.8.** Seien  $A, B \subset \mathbb{R}$ . Falls eine Funktion  $f: A \rightarrow B$  strikt monoton auf ihrem ganzen Definitionsbereich ist, dann ist sie injektiv. Ist zudem  $B = f(A)$ , dann ist sie auch surjektiv und damit invertierbar.

Der Graph einer Funktion  $f: A \rightarrow B$  ist definiert als

$$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset A \times B.$$

**Beispiel 1.9.**  $f: [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1]$  mit  $x \mapsto f(x) = \sin x$  hat den Graphen

$$\Gamma(f) = \{(x, \sin x) \mid x \in [0, 2\pi]\}.$$

Man kann auch mehrere Abbildungen verknüpfen, also hintereinander ausführen:

**Definition 1.10.** Seien  $A, B, C$  nichtleere Mengen und  $f: A \rightarrow B, x \mapsto f(x)$  sowie  $g: B \rightarrow C, y \mapsto g(y)$  Abbildungen, dann nennt man die Abbildung

$$g \circ f: A \rightarrow C, \quad x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

die Komposition von  $f$  und  $g$ .

**Beispiel 1.11** ( $f \circ g \neq g \circ f$ ). Seien  $A = B = C = \mathbb{R}$  und  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := x^2$  und  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(x) := x - 1$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x - 1) = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1, \quad \text{aber} \\(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 1.\end{aligned}$$

Also ist z.B.  $(f \circ g)(2) = 1$  und  $(g \circ f)(2) = 3$ .

## 1.2 Folgen und Konvergenz

Wir führen die Notationen  $\forall$  (für alle) und  $\exists$  (es existiert) ein.

Beispiel:  $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}: m > n$ , d.h. für jede beliebige natürlichen Zahl  $n$  existiert eine natürliche Zahl  $m$ , die größer ist als  $n$ .

**Definition 1.12.** Eine (reelle) Folge ist eine Abbildung  $\mathbf{a}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , die jeder natürlichen Zahl  $n \in \mathbb{N}$  eine reelle Zahl  $a_n \in \mathbb{R}$  zuordnet.

Notation:  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Ist  $a_n$  das  $n$ -te Glied der Folge, so nennt man  $n$  den Index von  $a$ .

**Definition 1.13.** Ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  eine Folge und  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  streng monoton wachsend, so wird durch  $b_n := a_{g(n)}$  für  $n \in \mathbb{N}$  eine Teilfolge von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definiert.

**Beispiel 1.14.**  $a_n := n$  für  $n \in \mathbb{N}$  definiert eine Folge (nämlich alle natürlichen Zahlen). Beispiele von Teilfolgen sind

- $(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ , die geraden Zahlen;
- $(a_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ , die ungeraden Zahlen;
- $(a_{g(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  für  $g(1) := 1, g(2) := 2$  und  $g(n) := g(n-1) + g(n-2)$  für  $n \geq 3$ , die Folge der Fibonacci-Zahlen.

**Definition 1.15.** Eine Zahl  $a \in \mathbb{R}$  heißt Grenzwert (GW) einer Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}: \forall n \geq N_\varepsilon \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Notation:  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  oder  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ .

Sprechweise: Die Folge konvergiert gegen  $a$ . ( $a$  ist der Limes der Folge für  $n$  gegen Unendlich.)

**Satz 1.16.** *Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.*

*Beweis.* Angenommen für  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  gilt sowohl  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  als auch  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig gewählt. Nach Voraussetzung ex.  $N_a, N_b \in \mathbb{N}$  so dass

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq N_a \quad \text{und} \quad |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq N_b.$$

Sei jetzt  $n \geq \max\{N_a, N_b\}$ . Dann gilt

$$|a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq |a - a_n| + |a_n - b| \leq \varepsilon.$$

Da  $\varepsilon$  beliebig klein gewählt werden kann, muss gelten:  $|a - b| = 0$ , also  $a = b$ . □

Was heißt dann  $n \rightarrow \infty$ ?

**Definition 1.17.** *Das Symbol  $\infty$  heißt uneigentlicher Grenzwert der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ , falls gilt:*

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists N_K \in \mathbb{N}: \forall n \geq N_K \ a_n > K.$$

*Das Symbol  $-\infty$  heißt uneigentlicher Grenzwert der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ , falls gilt:*

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists N_K \in \mathbb{N}: \forall n \geq N_K \ a_n < K.$$

Notation:  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  bzw.  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$ .

Sprechweise: Die Folge *divergiert bestimmt* gegen Unendlich / Minus Unendlich.

Ist eine Folge weder konvergent noch bestimmt divergent, so nennt man sie *unbestimmt divergent*.

**Definition 1.18.** *Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  (d.h. mit Grenzwert Null) nennt man Nullfolge.*

**Definition 1.19.** *Eine Zahl  $a \in \mathbb{R}$  heißt Häufungspunkt (HP) einer Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , falls für ein beliebiges  $\varepsilon > 0$  die Ungleichung  $|a - a_n| < \varepsilon$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$  erfüllt ist.*

Eine Folge heißt *alternierend*, falls sie mehrere Häufungspunkte hat.

**Beispiel 1.20.** Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $a_n := (-1)^n$ . Diese Folge hat die Häufungspunkte  $-1$  und  $+1$ , ist also *alternierend*.

**Definition 1.21.** Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  heißt beschränkt, falls eine Zahl  $M \in \mathbb{R}$  existiert, so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $|a_n| < M$ .

**Definition 1.22.** Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  heißt

- monoton wachsend, falls  $a_{n+1} \geq a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ;
- monoton fallend, falls  $a_{n+1} \leq a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Die Begriffe *streng monoton wachsend* und *streng monoton fallend* werden analog definiert mit  $>$  statt  $\geq$  und  $<$  statt  $\leq$ .

**Satz 1.23.** Seien  $a \in \mathbb{R}$  und  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ . Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |a - a_n| = 0.$$

**Satz 1.24 (Bolzano-Weierstraß).** Es gelten die folgenden äquivalenten Aussagen:

1. Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt (mindestens) eine konvergente Teilfolge.
2. Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt (mindestens) einen Häufungspunkt.

**Satz 1.25.** Jede konvergente Zahlenfolge ist beschränkt.

**Satz 1.26.** Jede monotone beschränkte Zahlenfolge ist konvergent.

Beide Eigenschaften müssen erfüllt sein. So ist definiert  $a_n = n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) eine monotone unbeschränkte Folge, die tatsächlich nicht konvergiert. Andererseits ist die schon erwähnte Folge  $a_n = (-1)^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) zwar beschränkt, aber nicht monoton und sie konvergiert ebenfalls nicht.

**Satz 1.27 (Grenzwertsätze / Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen).** Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  konvergente Folgen mit  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  und  $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ . Dann gilt:

i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b$ ;

ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b$ ;

iii) Falls  $b \neq 0$  und für alle  $n \in \mathbb{N}$  auch  $b_n \neq 0$ , dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b}$ ;

iv) Ist  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine TF von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , so ist auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ .

Mit folgenden Konventionen können obige Regeln auch für uneigentliche Grenzwerte  $\pm\infty$  angewendet werden:

$\infty + x = \infty$ für $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$	und	$-\infty + x = -\infty$ für $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
$\infty \cdot x = \infty$ für $x \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{\infty\}$	und	$\infty \cdot x = -\infty$ für $x \in \mathbb{R}_{<0} \cup \{-\infty\}$
$\frac{\infty}{x} = \infty$ für $x \in \mathbb{R}_{>0}$	und	$\frac{\infty}{x} = -\infty$ für $x \in \mathbb{R}_{<0}$
$(-\infty) \cdot x = \infty \cdot (-x)$	und	$\frac{-\infty}{x} = \frac{\infty}{-x}$

Die Terme  $\infty - \infty$ ,  $(\pm\infty) \cdot 0$  und  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$  sind nicht definiert.

**Methode zum Berechnen von  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$  mit Potenzen in Zähler und Nenner:**  
größte Potenz von Zähler und Nenner ausklammern und kürzen.

**Beispiel dazu:**

$$\frac{5n^3 - n^2 + 2}{8n^4 + 3n^3 - 7n} = \frac{n^4(\frac{5}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^4})}{n^4(8 + \frac{3}{n} - \frac{7}{n^3})} = \frac{\frac{5}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^4}}{8 + \frac{3}{n} - \frac{7}{n^3}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{0 - 0 + 0}{8 + 0 - 0} = 0.$$

**Satz 1.28 (Sandwich-Lemma).** Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  konvergente Folgen mit gleichem Grenzwert  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ . Sei zudem  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  eine Folge, für die gilt:

$$\exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N \quad a_n \leq c_n \leq b_n.$$

Dann folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ .

**Beispiel 1.29 (Euler'sche Zahl).** Die Euler'sche Zahl ist  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ .

Konvergenz lässt sich auch auf Folgen im  $\mathbb{R}^n$  übertragen:

**Definition 1.30.** Eine Punktfolge im  $\mathbb{R}^n$  ist eine Abbildung  $\mathbf{a}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Das  $k$ -te Folgenglied ist dann  $\mathbf{a}(k) =: a_k = (a_{k,1}, \dots, a_{k,n}) \in \mathbb{R}^n$ .

**Definition 1.31.** Der Vektor  $b \in \mathbb{R}^n$  heißt Grenzwert der Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ , falls jede Komponente der Folge gegen die jeweilige Komponente von  $b$  konvergiert, d.h. falls  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k,i} = b_i$  für  $i = 1, \dots, n$ .

**Beispiel 1.32.** Für  $k \in \mathbb{N}$  sei  $a_k := (\frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k}, 2 + \frac{1}{k})$ . Dann gilt:  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = (0, 1, 2)$ .

### 1.3 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

**Definition 1.33.** Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Eine Funktion  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt in  $a \in \mathbb{R}^n$  den (uneigentlichen) Grenzwert  $g \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , falls

1. eine Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset M \setminus \{a\}$  existiert mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$  und
2. für jede Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset M \setminus \{a\}$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$  gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = g$ .

Notation:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$ .

Falls Bedingung 1 nicht erfüllt ist, nennt man  $a$  einen isolierten Punkt von  $M$ .

**Beispiel 1.34.** Betrachten wir die reelle Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Für die Folge  $x_n := \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , mit Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1$ .

Für die Folge  $y_n := -\frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , mit Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = 0$ .  
Folglich hat  $f$  in 0 keinen Grenzwert, sondern nur einen links- und einen rechtsseitigen Grenzwert.

**Definition 1.35** (einseitiger GW). Seien  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $M \subset \mathbb{R}$  und  $a \in \mathbb{R}$ . Betrachtet man in Definition 1.33 nur Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n < a$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so nennt man  $g$  linksseitigen Grenzwert von  $f$  in  $a$  und schreibt

$$f(a_-) = \lim_{x \rightarrow a_-} f(x) = \lim_{x \nearrow a} f(x) = \lim_{x \uparrow a} f(x) = g.$$

Betrachtet man in Definition 1.33 nur Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n > a$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so nennt man  $g$  rechtsseitigen Grenzwert von  $f$  in  $a$  und schreibt

$$f(a_+) = \lim_{x \rightarrow a_+} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} f(x) = g.$$

**Satz 1.36** (Grenzwertsätze / Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen). Für  $n \in \mathbb{N}$  seien  $M \subset \mathbb{R}^n$  und  $a \in \mathbb{R}^n$ . Es existiere eine Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset M \setminus \{a\}$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ . Weiter seien  $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen mit Grenzwerten  $F := \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  und  $G := \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ . Dann gelten folgende Rechenregeln:

- i)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = F \pm G$ ;
- ii)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = F \cdot G$ ;
- iii) falls  $g(x) \neq 0$  für  $x \in M$  und  $G \neq 0$ , dann ist  $\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{F}{G}$ ;
- iv)  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |F|$ .

Die Grenzwertbetrachtung wird erheblich angenehmer für stetige Funktionen:

**Definition 1.37.** Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Weiterhin erfülle  $a \in \mathbb{R}^n$  Bedingung 1 aus Definition 1.33. Eine Funktion  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt stetig im Punkt  $a$ , falls  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Die Funktion heißt stetig, falls  $f$  stetig in jedem Punkt ihrer Definitionsmenge ist.

Eine Funktion heißt zudem stetig in jedem isolierten Punkt ihres Definitionsbereiches. Alternative Definition der Stetigkeit:  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $a \in M$  genau dann wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \quad x \in M, |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

(Sprich: Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$ , so dass gilt:  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  für alle  $x \in M$  mit  $|x - a| < \delta$ .)

**Beispiel 1.38.** Die Funktionen  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = \cos x$ ,  $h(x) = \exp x = e^x$  sind stetig.

**Satz 1.39.** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Sind  $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in einem Punkt  $a \in M$ , so sind auch die Funktionen

$$f \pm g, \quad f \cdot g \quad \text{und} \quad |f|$$

stetig in  $a$ .

**Satz 1.40** (Verknüpfung stetiger Funktionen). Seien  $M \subset \mathbb{R}^n$  und  $a \in M$ . Ist  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $a$  und  $g: f(M) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $f(a)$ , so ist auch

$$h = g \circ f: M \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad h(x) = g(f(x)) \text{ für } x \in M$$

stetig in  $a$ .

**Satz 1.41** (Zwischenwertsatz von Bolzano). Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ . Die Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig und es gelte  $f(a) < 0$  und  $f(b) > 0$  (oder umgekehrt). Dann existiert eine Zahl  $x \in (a, b)$  mit  $f(x) = 0$ .

**Korollar 1.42.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ . Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann nimmt  $f$  jeden Wert zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  (mindestens einmal) an.

**Definition 1.43.** Ist  $A$  eine nichtleere Teilmenge von  $\mathbb{R}$ , dann heißt

- $M \in \mathbb{R}$  obere Schranke von  $A$ , falls  $a \leq M$  für alle  $a \in A$ ,
- $m \in \mathbb{R}$  untere Schranke von  $A$ , falls  $a \geq m$  für alle  $a \in A$ ,

Die kleinste obere Schranke von  $A$  nennt man Supremum von  $A$ , die größte untere Schranke ist das Infimum von  $A$ . Man schreibt  $\sup A$  bzw.  $\inf A$ . Falls  $\sup A \in A$ , dann nennt man diesen Wert Maximum von  $A$  und schreibt  $\max A$ . Falls  $\inf A \in A$ , dann nennt man diesen Wert Minimum von  $A$  und schreibt  $\min A$ .

**Satz 1.44** (Weierstraß). Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ . Ist  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, dann ist  $f$  auch beschränkt. Zudem existieren Minimum und Maximum von  $f$ , d.h.

$$\exists m, M \in [a, b] \quad : \quad f(m) = \min_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{und} \quad f(M) = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

**Bemerkung 1.45.** Wichtig ist nicht nur, dass die Funktion stetig ist, sondern auch, dass sie auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall definiert ist. So ist beispielsweise  $f(x) = \frac{1}{x}$  auf  $(0, 1)$  zwar stetig, aber nicht beschränkt, denn  $f(0_+) = +\infty$ .

## 2 Differentialrechnung I

### 2.1 Differenzierbarkeit von Funktionen in einer Variablen

**Definition 2.1.** Seien  $M \subset \mathbb{R}$ ,  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  und  $a \in M$ . Falls der Grenzwert

$$g := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$$

existiert, dann heißt  $f$  differenzierbar in  $a$  und  $g$  ist die Ableitung von  $f$  in  $a$ .

Notation<sup>2</sup>:  $f'(a) = g$ .

**Bemerkung 2.2.** Ersetzt man  $x - a$  durch  $h$ , so erhält man die alternative Darstellung

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

**Beispiel 2.3.** Betrachten wir  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x^2$ . Dann ist

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x + a) = 2a \quad \text{bzw.}$$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a + h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2a + h) = 2a.$$

Ist  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $a \in M$ , dann ist der Graph der Funktion

$$T_{f,a}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad T_{f,a}(x) := f(a) + f'(a)(x - a)$$

die Tangente von  $f$  in  $a$ .

**Satz 2.4.** Ist  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $a \in M$ , dann ist  $f$  auch stetig in  $a$ .

**Beweis.** Es ist  $f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)$ , also

$$f(x) = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a).$$

Durch Grenzübergang  $x \rightarrow a$  erhalten wir

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) + \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a).$$

Nach Voraussetzung ist  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$  (ein endlicher Wert) und  $\lim_{x \rightarrow a} (x - a) = 0$ , also erhalten wir  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a)$ , was genau die Stetigkeit beweist.  $\square$

**Definition 2.5.** Ist  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  in allen Punkten  $a \in M$  differenzierbar, so nennt man  $f$  differenzierbar in  $M$ . Die Funktion

$$f': M \rightarrow \mathbb{R}, \quad f'(a) := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

heißt Ableitung von  $f$ . Zudem nennt man die Abbildung

$$df(a): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad df(a)(h) := f'(a) \cdot h$$

Differential von  $f$  in  $a$ .

<sup>2</sup>In der Physik wird die Ableitung auch mit  $\dot{f}(t)$  bezeichnet, wenn  $t$  für die Zeit steht.

**Satz 2.6** (Ableitungsregeln). Sei  $M \subset \mathbb{R}$  und seien  $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$  in  $a \in M$  differenzierbar. Dann sind auch  $f \pm g$ ,  $f \cdot g$  und  $\frac{f}{g}$  (falls  $g(a) \neq 0$ ) differenzierbar in  $a$  und es gilt:

$$i) (f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a),$$

$$ii) (f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

$$iii) \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2},$$

$$iv) \text{ f\"ur } c \in \mathbb{R} \text{ gilt } (cf)'(a) = c \cdot f'(a).$$

**Satz 2.7** (Kettenregel). Sei  $M \subset \mathbb{R}$  und sei  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  in  $a \in M$  differenzierbar. Sei weiterhin  $g: f(M) \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $f(a)$ . Dann ist  $g \circ f$  in  $a$  differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

**Beispiel 2.8.** Gesucht ist die Ableitung von  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $h(x) = (3x^2 + 4)^5$ . In diesem Fall ist  $h = g \circ f$  mit  $f(x) = 3x^2 + 4$  und  $g(x) = x^5$ . Nach der Kettenregel ist also  $h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = g'(3x^2 + 4) \cdot 6x = 5 \cdot (3x^2 + 4)^4 \cdot 6x = 30x \cdot (3x^2 + 4)^4$ .

**Satz 2.9** (Ableitung der Umkehrfunktion). Sei  $M \subset \mathbb{R}$  und sei  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Sei zudem  $f: M \rightarrow f(M)$  invertierbar mit Umkehrfunktion  $f^{-1}$ . Sei  $y \in f(M)$  derart, dass  $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$ . Dann ist  $f^{-1}$  in  $y$  differenzierbar, und es gilt

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

**Beispiel 2.10.**  $f(x) = x^2$  ist f\"ur  $x \in \mathbb{R}_{>0}$  invertierbar mit Ableitung  $f'(x) = 2x > 0$ . Die Umkehrfunktion ist  $f^{-1}: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  mit  $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ . Ihre Ableitung ist gegeben durch  $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ .

**Definition 2.11** (Ableitungen h\"oherer Ordnung). Sei  $M \subset \mathbb{R}$  und sei  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar mit Ableitung  $g := f'$ . Ist  $g$  wiederum differenzierbar, dann nennt man  $f''(x) := g'(x)$  zweite Ableitung von  $f$  in  $x \in M$ .

Durch  $n$ -faches Ableiten erh\"alt man die  $n$ -te Ableitung, welche mit  $f^{(n)}(x)$  bezeichnet wird.

**Beispiel 2.12.**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x^2$  hat folgende Ableitungen erster, zweiter und dritter Ordnung:  $f'(x) = 2x$ ,  $f''(x) = 2$ ,  $f^{(3)}(x) = 0$ .

Die Ableitungen einiger wichtiger Funktionen (mit  $a, b \in \mathbb{R}$ , Integrationsvariable  $x$ ):

$$(ax^b)' = abx^{b-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

## 2.2 Differenzierbarkeit von Funktionen in mehreren Variablen

**Definition 2.13.** Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M \subset \mathbb{R}^n$ ,  $a = (a_1, \dots, a_n) \in M$  und  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Wenn für ein  $j \in \{1, \dots, n\}$  der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a)}{h} =: g \in \mathbb{R}$$

existiert, so heißt  $f$  partiell differenzierbar in Richtung von  $x_j$  (oder in der  $j$ -ten Komponente) und  $g$  heißt partielle Ableitung von  $f$  in Richtung von  $x_j$ .

Notation:  $g = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \partial_{x_j} f(a) = f_{x_j}(a)$  oder auch verkürzt  $\partial_j f(a)$ .

**Definition 2.14.** Ist  $f$  in allen Punkten  $a \in M$  partiell differenzierbar in Richtung  $x_j$ , so heißt  $f$  partiell differenzierbar in Richtung  $x_j$ . Ist  $f$  in allen Punkten  $a \in M$  partiell differenzierbar in alle Richtungen  $x_1, \dots, x_n$ , so heißt  $f$  partiell differenzierbar.

**Beispiel 2.15.** Sei  $f(c, x) := cx^2$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial c}(c, x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h, x) - f(c, x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(c+h)x^2 - cx^2}{h} = x^2, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(c, x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c, x+h) - f(c, x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(x+h)^2 - cx^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2cx + ch) = 2cx. \end{aligned}$$

Man berechnet die partielle Ableitung, indem man alle Komponenten, nach denen man nicht ableitet, als Parameter behandelt.

**Beispiel 2.16.** Sei  $M = \mathbb{R}^2$  und für  $x = (x_1, x_2) \in M$  sei  $f(x) := 3x_1^2 - x_2^5 + x_1x_2 + 7$ . Dann sind die partiellen Ableitungen  $\partial_1 f(x_1, x_2) = 6x_1 + x_2$  und  $\partial_2 f(x_1, x_2) = -5x_2^4 + x_1$ .

**Definition 2.17.** Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M \subset \mathbb{R}^n$ ,  $a \in M$  und  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ . Falls ein Vektor  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  existiert, so dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^n h_k v_k}{|h|} = 0,$$

dann heißt  $f$  (total) differenzierbar in  $a$  und  $v =: Df(a) =: \nabla f(a)$  Ableitung von  $f$  in  $a$ . Ist  $f$  in allen Punkten  $a \in M$  differenzierbar, so heißt  $f$  differenzierbar auf  $M$ .

Zur Notation: Ist  $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ , dann ist  $|h| := \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}$ . Die Abbildung  $|\cdot|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  nennt man auch *euklidische Norm* im  $\mathbb{R}^n$ .

Für Vektoren  $x, y \in \mathbb{R}^n$  mit  $x = (x_1, \dots, x_n)$  und  $y = (y_1, \dots, y_n)$  ist  $\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^n x_k y_k$  das (euklidische) *Skalarprodukt* der Vektoren  $x$  und  $y$ .

**Satz 2.18.** Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M \subset \mathbb{R}^n$  und  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. Wenn  $f$  differenzierbar ist, dann ist  $f$  auch partiell differenzierbar und für alle  $a \in M$  ist  $\nabla f(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$ .
2. Wenn  $f$  partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen stetig sind, dann ist  $f$  (total) differenzierbar.

**Definition 2.19.** Ist  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $a \in M$ , so heißt der Vektor

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_n) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

Gradient von  $f$  in  $a$ .

Der Gradient von  $f$  wird als  $\text{grad} f$  oder  $\nabla f$  notiert.

**Definition 2.20.** Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M \subset \mathbb{R}^n$ ,  $a \in M$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$  mit  $|b| = 1$  und  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  besitzt in  $a$  eine Ableitung in Richtung  $b$ , falls

$$\nabla_b f(a) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hb) - f(a)}{h} \quad (\text{hier } h \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

existiert.

Die partielle Ableitung ist ein Spezialfall der Richtungsableitung. So ist z.B.  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \nabla_{e_i} f(a)$ , wenn  $e_i$  der Vektor ist, der überall den Eintrag 0 hat außer in der  $i$ -ten Komponente, wo eine 1 steht.

**Bemerkung 2.21.** Der Gradient  $\nabla f$  steht immer senkrecht auf die Niveaulinien  $N_f$  und zeigt in Richtung des steilsten Anstiegs von  $f$ , d.h. ist  $b \in \mathbb{R}^n$  mit  $|b| = 1$  und  $a \in M$  wie bisher, dann gilt  $\nabla_b f(a) \leq |\nabla f(a)|$  und Gleichheit gilt g.d.w.  $b = \frac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|}$ .  
(Achtung!  $\nabla_b f(a) \in \mathbb{R}$ , aber  $\nabla f(a) \in \mathbb{R}^n$ .)

**Definition 2.22.** Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M \subset \mathbb{R}^n$  und  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ . Ist  $f$  differenzierbar, so heißt für jedes  $a \in M$  die Abbildung  $df(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$df(a)(h) := \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \cdot h_k = \langle \nabla f(a), h \rangle, \quad h = (h_1, \dots, h_n)$$

das Differential von  $f$  in  $a$ .

**Bemerkung 2.23.** Ein kleiner Vorgriff: Für Differentialgleichungen hat das totale Differential die Darstellung  $df = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k$ .

Ist  $f$  in  $a$  differenzierbar, dann ist für  $b$  wie eben  $df(a)(b) = \nabla_b f(a) = \langle \nabla f(a), b \rangle$ .

**Beispiel 2.24.** Sei  $M = \mathbb{R}^2$  und für  $x = (x_1, x_2) \in M$  sei  $f(x) := 2x_1 - x_2 + x_1x_2 + 5$ . Wir berechnen:  $\partial_1 f(x_1, x_2) = 2 + x_2$  und  $\partial_2 f(x_1, x_2) = -1 + x_1$ . Sei jetzt  $b := \frac{1}{5}(3, 4)$ . Dann ist  $|b| = \frac{1}{5}\sqrt{3^2 + 4^2} = 1$ . Die Richtungsableitung ist

$$\begin{aligned} \nabla_b f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x_1 + \frac{3}{5}h) - (x_2 + \frac{4}{5}h) + (x_1 + \frac{3}{5}h)(x_2 + \frac{4}{5}h) + 5 - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{3}{5}h - \frac{4}{5}h + x_1 \cdot \frac{4}{5}h + x_2 \cdot \frac{3}{5}h + \frac{3}{5}h \frac{4}{5}h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{6}{5} - \frac{4}{5} + x_1 \cdot \frac{4}{5} + x_2 \cdot \frac{3}{5} + \frac{12}{25}h \right) \\ &= \frac{2}{5} + \frac{4}{5} \cdot x_1 + \frac{3}{5} \cdot x_2. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}\langle \nabla f(x), b \rangle &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot \frac{3}{5} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \cdot \frac{4}{5} \\ &= (2 + x_2) \cdot \frac{3}{5} + (-1 + x_1) \cdot \frac{4}{5} \\ &= \frac{6}{5} + \frac{3}{5} \cdot x_2 - \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \cdot x_1 = \nabla_b f(x)\end{aligned}$$

für beliebiges  $x \in M$  wie behauptet.

Der Gradient an der Stelle  $(0, 0)$  ist  $\nabla f(0, 0) = (2, -1)$ . Für eine beliebige Richtung ist die Richtungsableitung  $\langle \nabla f(0, 0), b \rangle = (2 + 0)b_1 + (-1 + 0)b_2 = 2b_1 - b_2$ . In Richtung des (normierten) Gradienten erhalten wir also  $\langle \nabla f(0, 0), \frac{\nabla f(0, 0)}{|\nabla f(0, 0)|} \rangle = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ .

**Bemerkung 2.25.** Ist eine Funktion  $f$  differenzierbar, so ist sie auch stetig. Ist die Funktion jedoch nur partiell differenzierbar, so braucht sie nicht stetig zu sein. Ein Gegenbeispiel ist  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Im Punkt  $(0, 0)$  (und auch in dessen Umgebung) ist die Funktion partiell differenzierbar, sie ist jedoch nicht stetig in diesem Punkt. [→ Übungsblatt]

**Satz 2.26** (Kettenregel – mehrdimensional). Seien  $I \subset \mathbb{R}$  und  $M \subset \mathbb{R}^n$  für  $n \in \mathbb{N}$  (offene) Mengen. Sei  $g = (g_1, \dots, g_n): I \rightarrow M$  mit Koordinatenfunktionen  $g_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ), die differenzierbar sind in  $t_0 \in I$ . Sei weiterhin  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $g(t_0) \in M$ . Dann ist die Komposition  $f \circ g: I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $(f \circ g)(t) = f(g(t))$  für  $t \in I$  differenzierbar in  $t_0$  mit Ableitung

$$(f \circ g)'(t_0) = \langle \nabla f(g(t_0)), g'(t_0) \rangle = \sum_{k=1}^n \partial_k f(g(t_0)) \cdot g'_k(t_0).$$

## 2.3 Ableitungen höherer Ordnung in mehreren Variablen

**Definition 2.27.** Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M \subset \mathbb{R}^n$  und  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Seien alle partiellen Ableitungen  $g_k := \frac{\partial f}{\partial x_k}: M \rightarrow \mathbb{R}$  ( $k = 1, \dots, n$ ) ebenfalls differenzierbar. Dann sind die zweiten Ableitungen von  $f$  gegeben durch

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} := \frac{\partial g_l}{\partial x_k} \quad \text{für } k, l \in \{1, \dots, n\}.$$

In diesem Fall ist die Hesse-Matrix von  $f$ :

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \nabla \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \nabla \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

**Beispiel 2.28.** Sei  $M = \mathbb{R}^2$  und für  $x = (x_1, x_2) \in M$  sei  $f(x) := 2x_1 - x_2 + x_1x_2 + 5$ . Wir berechnen:  $\partial_1 f(x_1, x_2) = 2 + x_2$  und  $\partial_2 f(x_1, x_2) = -1 + x_1$ . Der Gradient von  $\partial_1 f(x_1, x_2) = 2 + x_2$  ist  $(0, 1)$ , der Gradient von  $\partial_2 f(x_1, x_2) = -1 + x_1$  ist  $(1, 0)$ . Damit ist insgesamt

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Definition 2.29.** Eine Funktion  $f: M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt  $k$ -fach stetig differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen von  $f$  der Ordnung  $\leq k$  existieren und stetig sind.

Notation:  $f \in C^k(M; \mathbb{R}^m)$ .

**Satz 2.30 (Satz von Schwarz).** Ist  $f \in C^k(M; \mathbb{R}^m)$  für  $M \subset \mathbb{R}^n$  und  $k, m, n \in \mathbb{N}$ , dann sind alle partiellen Ableitungen der Ordnung  $\leq k$  unabhängig von der Reihenfolge des Differenzierens.

Im Spezialfall  $k = 2$  bedeutet das: Existieren die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung und sind sie stetig, dann ist  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}$  für  $k, l \in \{1, \dots, n\}$ .

## 2.4 Vektorfelder

**Definition 2.31 (Vektorfeld).** Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Eine Abbildung  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt Vektorfeld.

**Beispiel 2.32.** Ist  $f: M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  partiell differenzierbar, dann wird durch

$$\nabla f: M \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \nabla f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

ein Vektorfeld definiert – genannt Gradientenfeld.

Sind sowohl Definitions- als auch Wertebereich einer Funktion mehrdimensional, tritt an die Stelle des Gradienten die sogenannte Jacobi-Matrix. Konkret heißt das für  $f = (f_1, \dots, f_m): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $n, m \in \mathbb{N}$ :

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{pmatrix}.$$

**Definition 2.33 (exaktes Vektorfeld).** Ein Vektorfeld  $f: M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt exaktes Vektorfeld, wenn es eine Funktion  $g: M \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, so dass  $f = \nabla g$ .

**Satz 2.34.** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Ein Vektorfeld  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist genau dann exakt, wenn für alle  $k, l \in \{1, \dots, n\}$  (mit  $k \neq l$ ) gilt:  $\frac{\partial f_k}{\partial x_l} = \frac{\partial f_l}{\partial x_k}$ .

Etwas leichter zu merken ist vielleicht die äquivalente Aussage:

Ein Vektorfeld  $f$  ist genau dann exakt, wenn die Jacobi-Matrix  $Df$  symmetrisch ist.

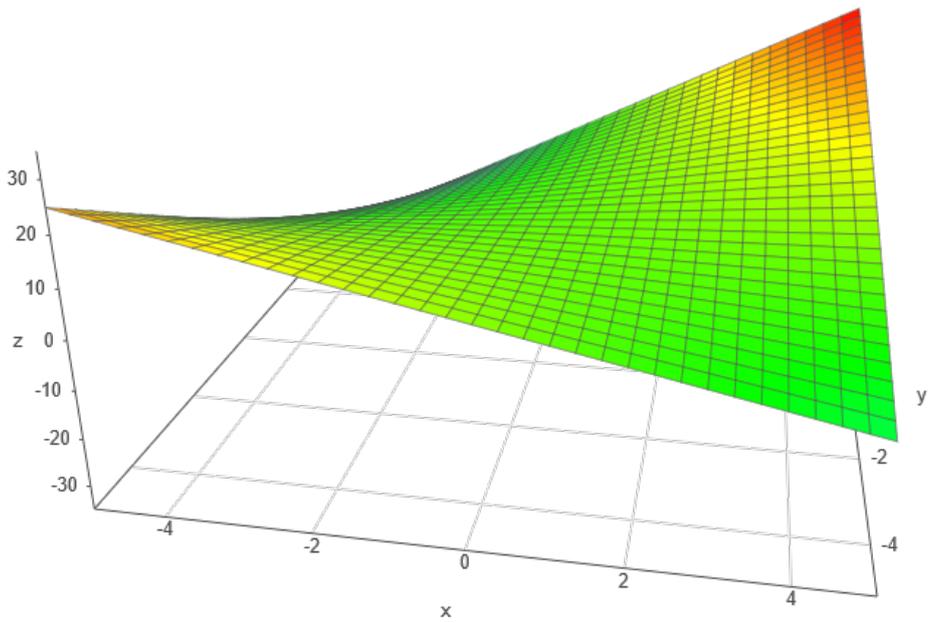


Abbildung 1:  $f(x) = 2x - y + xy + 5$  normale Skalierung

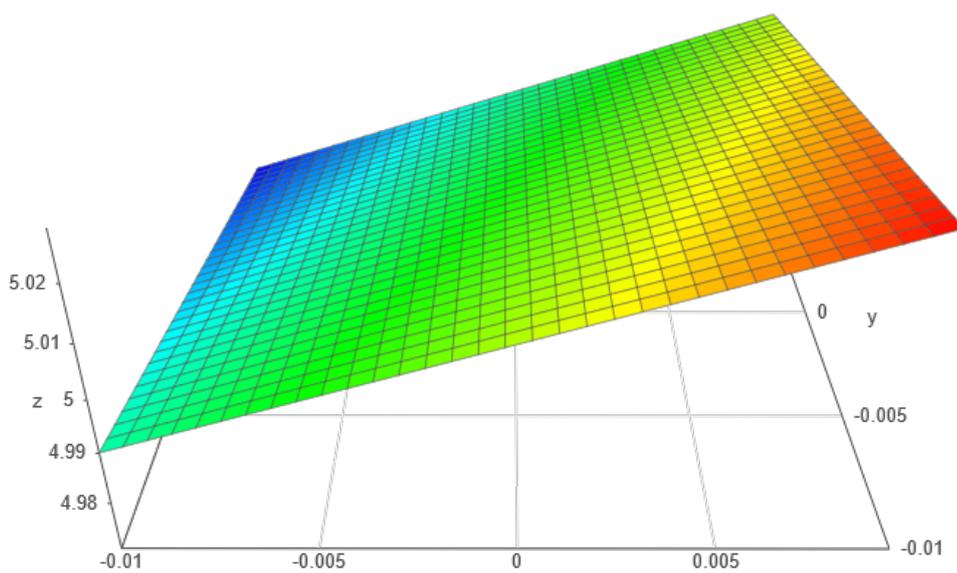


Abbildung 2:  $f(x) = 2x - y + xy + 5$  nah am Koordinatenursprung

## 3 Komplexe Zahlen

### 3.1 Motivation und die kartesische / algebraische Darstellung

Wieso benötigen wir die komplexen Zahlen?

- Für  $m, n \in \mathbb{N}$  ist  $m + n \in \mathbb{N}$ , aber möglicherweise ist  $m - n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$
- Für  $x, y \in \mathbb{Z}$  sind  $x + y, x - y, x \cdot y \in \mathbb{Z}$ , aber möglicherweise ist  $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$
- Für  $x, y \in \mathbb{Q}$  sind  $x + y, x - y, x \cdot y, \frac{x}{y}, x^2 \in \mathbb{Q}$  (abgesehen von der Division durch 0), aber möglicherweise ist  $\sqrt{|x|} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Die komplexen Zahlen ermöglichen es,  $\sqrt{x}$  auch für negative reelle Zahlen  $x$  zu berechnen. Damit hat die Gleichung  $x^2 = -1$ , welche innerhalb von  $\mathbb{R}$  keine Lösung besaß, im Raum der komplexen Zahlen zwei Lösungen.

**Definition 3.1** (kartesische<sup>3</sup> Darstellung). Die imaginäre Einheit ist definiert als  $i := \sqrt{-1}$ , so dass  $i^2 = -1$  ist.

Die Menge der komplexen Zahlen ist  $\mathbb{C} := \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ . Für  $w = x + iy \in \mathbb{C}$  nennt man  $x = \operatorname{Re}(w) \in \mathbb{R}$  den Realteil von  $w$  und  $y = \operatorname{Im}(w) \in \mathbb{R}$  den Imaginärteil von  $w$ .

Die Notation variiert in der Literatur: Für  $\operatorname{Re}(w)$  schreibt man auch  $\Re(w)$ , für  $\operatorname{Im}(w)$  schreibt man auch  $\Im(w)$ .

Komplexe Zahlen kann man auch als Tupel schreiben mit  $w = (\operatorname{Re}(w), \operatorname{Im}(w)) = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . So lassen sich komplexe Zahlen in der *komplexen Zahlenebene* darstellen.

Die reellen Zahlen kann man als Teilmenge der komplexen Zahlen auffassen:

$$\mathbb{R} = \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(w) = 0\}.$$

Auf  $\mathbb{C}$  kann man Addition und Multiplikation wie folgt definieren:

**Definition 3.2.** Für  $w = a + ib \in \mathbb{C}$  und  $z = c + id \in \mathbb{C}$  ist

$$\begin{aligned}w + z &= (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i \cdot (b + d), \\w \cdot z &= (a + ib) \cdot (c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = (ac - bd) + i(bc + ad).\end{aligned}$$

Man prüft leicht nach, dass für zwei reelle Zahlen (d.h. für  $b = d = 0$ ) die übliche Addition und Multiplikation entsteht.

---

<sup>3</sup>Das kartesische Koordinatensystem ist benannt nach dem französischen Mathematiker René Descartes (1596-1650). Die Achsen stehen in einem rechten Winkel aufeinander, die Position eines Punktes wird anhand von Parallelen zu den Koordinatenachsen angegeben. Anders funktioniert das Polarkoordinatensystem, bei dem Punkte durch ihren Abstand zu einem Festen Punkt (Pol) und den Winkel zu einer festen Richtung angegeben werden.

**Beispiel 3.3.** Seien  $w = 1 + i$  und  $z = 2 - i$ . Dann sind nach obiger Notation  $a = 1, b = 1, c = 2$  und  $d = -1$ . Summe und Produkt von  $w$  und  $z$  sind:

$$\begin{aligned} w + z &= (1 + i) + (2 - i) = (1 + 2) + i \cdot (1 - 1) = 3, \\ w \cdot z &= (1 + i) \cdot (2 - i) = 2 - i + 2i - i^2 = 2 + i - (-1) = 3 + i. \end{aligned}$$

Ist  $w = a + ib$ , dann kann man  $w^{-1} = \frac{1}{w}$  bestimmen, indem man ausnutzt, dass  $w \cdot \frac{1}{w} = 1$  ist. Sei also  $w^{-1} := c + id$ . Nach obiger Rechenregel ist dann

$$w \cdot \frac{1}{w} = (ac - bd) + i(bc + ad) \stackrel{!}{=} 1 + i \cdot 0.$$

Die reellen Zahlen  $c$  und  $d$  müssen also ein lineares Gleichungssystem<sup>4</sup> erfüllen:

$$\begin{aligned} ac - bd &= 1 \\ bc + ad &= 0. \end{aligned}$$

Löst man dies, erhält man folgendes Resultat:

**Lemma 3.4.** Für  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit  $w = x + iy$  (mit  $x, y \in \mathbb{R}$ ) ist

$$\frac{1}{w} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i.$$

Alternativ zur Herleitung über das Gleichungssystem kann man zur Berechnung von  $\frac{1}{x+iy}$  auch die 3. Binomische Formel geschickt anwenden:

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

**Beispiel 3.5.** Sei  $w = 3 + 4i$ . Dann ist  $\frac{1}{w} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$ . Dass dies korrekt ist, können wir durch Multiplikation überprüfen:

$$w \cdot \frac{1}{w} = (3 + 4i) \cdot \left( \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i \right) = \frac{9}{25} - \frac{12}{25}i + \frac{12}{25}i - \frac{16}{25}i^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1.$$

**Definition 3.6.** Für  $w \in \mathbb{C}$  mit  $w = a + ib$  ist der Betrag von  $w$  definiert als  $|w| := \sqrt{a^2 + b^2}$  und die konjugiert komplexe Zahl zu  $w$  ist  $\bar{w} := a - ib$ .

**Satz 3.7.** Seien  $w, z \in \mathbb{C}$ . Dann gilt:

- (i)  $w \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \iff \text{Im}(w) = 0 \iff w = \bar{w}$ ,
- (ii)  $w + \bar{w} = 2 \text{Re}(w)$ ,
- (iii)  $|w| = \sqrt{w \cdot \bar{w}}$  und damit  $|w|^2 = w \cdot \bar{w} = \text{Re}(w)^2 + \text{Im}(w)^2$ ,
- (iv)  $|\text{Re}(w)| \leq |w|$  und  $|\text{Im}(w)| \leq |w|$ ,
- (v)  $\overline{w + z} = \bar{w} + \bar{z}$ ,

---

<sup>4</sup>Das Lösen linearer Gleichungssysteme ist Inhalt der Vorlesung Mathematik II.

$$(vi) \quad \overline{w \cdot z} = \overline{w} \cdot \overline{z},$$

$$(vii) \quad |w \cdot z| = |w| \cdot |z|,$$

(viii)  $|w + z| \leq |w| + |z|$  (Dreiecksungleichung).

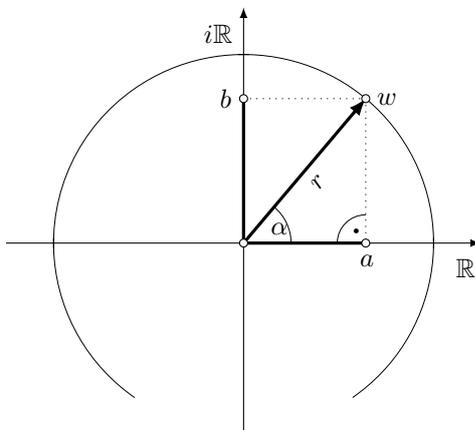
*Beweis der Dreiecksungleichung.* Man rechnet mit dem Quadrat der linken Seite und zieht am Ende die Wurzel auf beiden Seiten der (Un-)gleichungskette

$$\begin{aligned} |w + z|^2 &= (w + z) \cdot \overline{w + z} = (w + z) \cdot (\overline{w} + \overline{z}) = w\overline{w} + z\overline{z} + w\overline{z} + z\overline{w} \\ &= |w|^2 + |z|^2 + w\overline{z} + \overline{w}z \quad (\text{wegen } \overline{\overline{w}} = w \text{ und (iii)}) \\ &= |w|^2 + |z|^2 + 2 \operatorname{Re}(w\overline{z}) \quad (\text{wegen (ii)}) \\ &\leq |w|^2 + |z|^2 + 2|w\overline{z}| \quad (\text{wegen (iv)}) \\ &= |w|^2 + |z|^2 + 2|w||z| \quad (\text{wegen (vii) und } |z| = |\overline{z}|) \\ &= (|w| + |z|)^2. \end{aligned}$$

□

## 3.2 Polarkoordinaten

**Definition 3.8.** Jede komplexe Zahl  $w \in \mathbb{C}$  lässt sich darstellen als  $w = r \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha)$  mit  $r \in [0, \infty)$  und  $\alpha \in [0, 2\pi)$  bzw.  $\alpha \in (-\pi, \pi]$ . Die Zahlen  $r$  und  $\alpha$  heißen Polarkoordinaten von  $w$ . Dabei ist  $r = |w|$  der Betrag von  $w$  und  $\alpha = \arg(w)$  nennt man Argument von  $w$ .



$$\begin{aligned} w &= a + ib = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \\ |w| &= \sqrt{a^2 + b^2} = r \\ a &= \operatorname{Re}(w), \quad b = \operatorname{Im}(w) \\ \alpha &= \arg(w) \end{aligned}$$

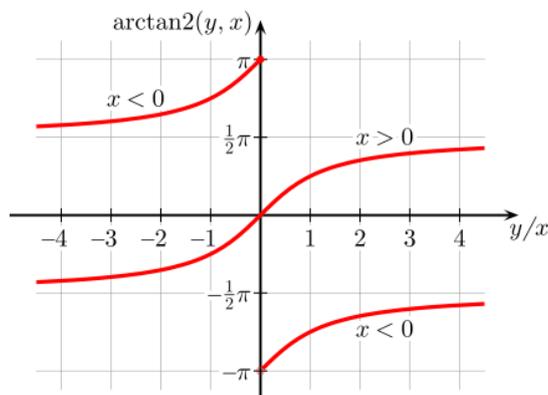
Wie kommt man von der kart. Darstellung  $w = a + ib$  zu den Polarkoordinaten?

**Satz 3.9 (Koordinatentransformation).** Sei  $w = a + ib = r \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha) \in \mathbb{C}$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $r \geq 0$  und  $\alpha \in (-\pi, \pi]$ . Es gilt:

(i)  $a = r \cos(\alpha)$  und  $b = r \sin(\alpha)$ ,

$$(ii) \quad r = \sqrt{a^2 + b^2} = |w| \quad \text{und} \quad \alpha = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & , \text{ falls } a, b < 0, \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & , \text{ falls } a < 0, b \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & , \text{ falls } a > 0, \\ \frac{\pi}{2} & , \text{ falls } a = 0, b > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & , \text{ falls } a = 0, b < 0, \\ 0 & , \text{ falls } a = b = 0. \end{cases}$$

Man kommt von (i) auf (ii) indem man (falls  $a \neq 0$ )  $\frac{b}{a}$  berechnet, die Beziehung  $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$  anwendet und nach  $\alpha$  umstellt. Die Umkehrfunktion des Tangens ist der Arkustangens ( $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ), welcher später noch genauer untersucht werden wird. Für den Moment soll eine Skizze genügen (siehe Wikipedia):



**Beispiel 3.10.** Ist  $w$  in Polarkoordinaten gegeben mit  $r = 1$  und  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , dann ist die arithmetische Darstellung von  $w$  gegeben durch  $w = \cos(\frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{2}) = i$ .

**Definition 3.11** (Exponentialfunktion). Für  $z \in \mathbb{C}$  definiert man  $e^z := \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{z}{n})^n$ .

**Satz 3.12** (Euler'sche Formel). Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ .

Insbesondere gilt  $e^{i\pi} = -1$  (mit der Wahl  $x = \pi$ ) und  $e^{2k\pi i} = 1$  (mit der Wahl  $x = 2k\pi$ ).

**Bemerkung 3.13.** Man kann jede komplexe Zahl auch als  $w = r \cdot e^{i\alpha}$  schreiben (das ist die Exponential- / Euler'sche Darstellung von  $w$ ), indem man die Euler'sche Formel auf die Polarkoordinatendarstellung von  $w$  anwendet. Für zwei komplexe Zahlen  $w, z \in \mathbb{C}$  mit  $w = r \cdot e^{i\alpha}$  und  $z = s \cdot e^{i\beta}$  gilt damit

$$w \cdot z = r \cdot e^{i\alpha} \cdot s \cdot e^{i\beta} = (r \cdot s) \cdot e^{i(\alpha+\beta)}.$$

Man multipliziert also komplexe Zahlen in Polarkoordinatendarstellung indem man die Beträge multipliziert und die Winkel addiert.

### 3.3 Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen

**Bemerkung 3.14.** Die Verallgemeinerung der binomischen Formel  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  ist Inhalt des binomischen Lehrsatzes, welcher besagt, dass für  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$  folgende Gleichung gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

wobei  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  und  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ .

Ist  $w \in \mathbb{C}$  mit der Darstellung  $w = r e^{i\alpha}$  für  $r \geq 0$  und  $\alpha \in [0, 2\pi)$  bzw.  $\alpha \in (-\pi, \pi]$  und ist  $n \in \mathbb{N}$ , so gilt

$$w^n = r^n e^{i(n\alpha)}.$$

Ist  $w$  in arithmetischer Darstellung gegeben, d.h.  $w = a + ib$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ , dann gilt mit dem binomischen Lehrsatz

$$w^n = (a + ib)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} i^{n-k}.$$

**Satz 3.15.** Seien  $c = re^{i\alpha} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Die Gleichung  $z^n = c$  besitzt (in  $\mathbb{C}$ ) genau  $n$  Lösungen  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1} \in \mathbb{C}$ , und zwar

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\left(\frac{\alpha + 2\pi k}{n}\right)}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Im Fall  $n = 2$  hat die Gleichung  $z^2 = -1 = e^{i\pi}$  die Lösungen  $\sqrt{1} \cdot e^{i\left(\frac{\pi + 2\pi k}{2}\right)}$  für  $k = 0, 1$ , also

$$z_0 = e^{i\left(\frac{\pi + 2\pi \cdot 0}{2}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i \cdot 1 = i,$$

$$z_1 = e^{i\left(\frac{\pi + 2\pi \cdot 1}{2}\right)} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 + i \cdot (-1) = -i.$$

## 4 Polynome, Reihen und Potenzreihen

### 4.1 Polynome

**Definition 4.1.** Für  $n \in \mathbb{N}$  seien  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  gegeben. Eine Abbildung  $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  der Form

$$p(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

heißt Polynom in  $x$ . Die Zahlen  $a_0, a_1, \dots, a_n$  heißen Koeffizienten von  $p$ . Falls  $a_n \neq 0$  ist, so nennt man  $n$  den Grad des Polynoms  $p$ . In diesem Fall nennt man  $p$  Polynom  $n$ -ten Grades.

Sind alle Koeffizienten reelle Zahlen, so kann man das Polynom auch als Abbildung  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  auffassen. Der folgende Satz ist auch gültig, wenn man jeweils  $\mathbb{C}$  durch  $\mathbb{R}$  ersetzt.

**Satz 4.2.** Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ein Polynom  $n$ -ten Grades. Gibt es ein  $c \in \mathbb{C}$  mit  $p(c) = 0$ , dann existiert ein Polynom  $q$  vom Grad  $< n$  mit  $p(x) = q(x)(x - c)$  für alle  $x \in \mathbb{C}$ .  $(x - c)$  nennt man dann linearen Faktor oder Linearfaktor.

**Beispiel 4.3.** Das Polynom  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $p(x) = x^2 - 4$  hat die Nullstellen  $c_1 = 2$  und  $c_2 = -2$  und lässt sich in der Tat schreiben als  $p(x) = q_1(x) \cdot q_2(x)$  mit  $q_1(x) = (x - c_1) = (x - 2)$  und  $q_2(x) = (x - c_2) = (x + 2)$ .

Kennt man eine Nullstelle von  $p$ , d.h. ein  $c \in \mathbb{C}$  mit  $p(c) = 0$ , so kann man das Polynom  $q$  aus Satz 4.2 durch Polynomdivision berechnen.

- Polynomdivision am Beispiel  $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6$

**Satz 4.4.** Für ein  $n \in \mathbb{N}$  sei  $p$  ein Polynom  $n$ -ten Grades mit reellen Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Sei  $c \in \mathbb{C}$  mit  $p(c) = 0$ . Dann ist auch  $p(\bar{c}) = 0$ .

Ist  $c \in \mathbb{R}$ , dann ist  $\bar{c} = c$ , d.h. obiger Satz ist unbedeutend. Für  $c \in \mathbb{C}$  kennen wir bereits die Nullstellen des Polynoms  $p(x) := x^2 + 1$ , nämlich  $c_1 = i$  und  $c_2 = -i = \bar{c}_1$ .

**Satz 4.5.** Für ein  $n \in \mathbb{N}$  sei  $p$  ein Polynom  $n$ -ten Grades mit Nullstelle  $c \in \mathbb{C}$  und Darstellung  $p(x) = q(x)(x - c)$ . Zudem sei  $\tilde{c} \in \mathbb{C}$  mit  $\tilde{c} \neq c$  eine von  $c$  verschiedene Nullstelle von  $p$ . Dann ist  $q(\tilde{c}) = 0$ .

Für diesen Satz muss  $p$  mindestens Grad  $n \geq 2$  besitzen, damit  $p(c) = p(\tilde{c}) = 0$  gelten kann für  $c \neq \tilde{c}$ . Durch zweifaches Anwenden von Satz 4.2 wissen wir, dass ein Polynom  $\tilde{q}$  vom Grad  $\leq n - 2$  existiert, so dass  $p(x) = \tilde{q}(x)(x - c)(x - \tilde{c})$ , was den Satz schon beweist, da  $q(x) = \tilde{q}(x)(x - \tilde{c})$  ist.

Das Polynom  $p(x) = x^2 - 2x + 1$  hat nur eine Nullstelle, nämlich  $x_0 = 1$ , obwohl es von Grad 2 ist. Das können wir auch daran sehen, dass wir  $p(x) = (x - 1)^2$  schreiben können.

**Definition 4.6.** Seien  $k \in \mathbb{N}$  und  $p$  ein Polynom. Eine Zahl  $c \in \mathbb{C}$  heißt  $k$ -fache Nullstelle von  $p$ , wenn ein  $q$  existiert mit  $p(x) = q(x)(x - c)^k$  und  $q(c) \neq 0$ .

Damit ist  $c = 1$  eine 2-fache Nullstelle des Polynoms  $p(x) = x^2 - 2x + 1$ .

**Satz 4.7.** 1. Jedes nicht konstante Polynom vom Grad  $n \geq 1$  mit komplexen Koeffizienten besitzt (mindestens) eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$ .

2. Jedes Polynom  $n$ -ten Grades  $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  lässt sich in  $n$  lineare Faktoren zerlegen.

3. Jedes Polynom  $n$ -ten Grades  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit reellen Koeffizienten lässt sich in höchstens  $n$  lineare oder quadratische Faktoren zerlegen.

**Bemerkung 4.8.** Teile 1 und 2 von Satz 4.7 sind zusammen auch unter dem Namen Fundamentalsatz der Algebra bekannt. Dabei ist zu bemerken, dass komplexe Koeffizienten oder Nullstellen nicht notwendigerweise echt komplex sein müssen (d.h. in  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  liegen), sondern sie dürfen durchaus auch reelle Zahlen sein.

Ein Beispiel für ein Polynom  $n$ -ten Grades mit  $n$  komplexen Nullstellen haben wir bereits in Satz 3.15 gesehen. Ein Beispiel für Teil 3 des obigen Satzes ist  $p(x) = (x^2 + 1)(x - 5)$  mit den Nullstellen  $5$ ,  $i$  und  $-i$ . In  $\mathbb{R}$  lässt sich dieses Polynom nicht weiter zerlegen, in  $\mathbb{C}$  hingegen schon.

*Beweisidee Teil 3 von Satz 4.7.* Ist  $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  eine echt komplexe Nullstelle des Polynoms  $p$ , dann ist nach Satz 4.5 auch  $\bar{c}$  eine Nullstelle von  $p$ , d.h.  $p$  hat die Darstellung  $p(x) = q(x)(x - c)(x - \bar{c})$ . Nach Satz 3.7 ist

$$(x - c)(x - \bar{c}) = x^2 - (c + \bar{c})x + c \cdot \bar{c} = x^2 - 2 \operatorname{Re}(c)x + |c|^2,$$

wobei  $\operatorname{Re}(c), |c|^2 \in \mathbb{R}$  sind. Mit anderen Worten: Je zwei Faktoren von  $p$ , die zu komplex konjugierten Nullstellen gehören, ergeben zusammen einen quadratischen Faktor von  $p$  mit reellen Koeffizienten.  $\square$

## 4.2 Reihen

**Definition 4.9.** Sei  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  eine Folge. Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  sei

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Die Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nennt man Reihe mit Gliedern  $a_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), man schreibt auch  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  heißt  $s_n$  die  $n$ -te Partialsumme der Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  heißt konvergent (in  $\mathbb{C}$ ), wenn der Grenzwert  $s := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  (in  $\mathbb{C}$ ) existiert. In diesem Fall heißt  $s$  der Wert der Reihe und man schreibt  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$ . Ansonsten nennt man die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  divergent.

Eine Reihe konvergiert also genau dann, wenn die zugehörige Folge der Partialsummen konvergiert.

**Beispiel 4.10** (geometrische Reihe). Für  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $x \in \mathbb{R}$  sei  $a_k := x^k$ . Die  $n$ -te Partialsumme und die zugehörige Reihe sind dann gegeben durch

$$s_n = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad x \neq 1, \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad -1 < x < 1.$$

Für  $|x| < 1$  ist die so definierte geometrische Reihe konvergent, für  $|x| \geq 1$  ist sie divergent.

**Satz 4.11.** Es gelten folgende Konvergenzresultate:

1. Konvergiert die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , so ist  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge.
2. Ist  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  eine Folge mit  $a_k \geq 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , so konvergiert die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  genau dann, wenn die Partialsummenfolge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\sum_{k=1}^n a_k)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt ist.

Der erste Teil dieses Satzes liefert ein notwendiges Kriterium für die Konvergenz von Reihen. Ist dieses nicht erfüllt, d.h. bilden die Glieder der Reihe keine Nullfolge, dann kann die zugehörige Reihe nicht konvergieren.

**Beispiel 4.12.** Sei  $a_k = 2^k$  für  $k \in \mathbb{N}_0$ . Dann sind die Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^n 2^k = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1$$

unbeschränkt für  $n \in \mathbb{N}$ , die Folge der Partialsummen (und damit die zugehörige Reihe) divergiert also. Die Folge  $(2^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  ist auch in der Tat keine Nullfolge.

**Beispiel einer divergenten Reihe, deren Glieder eine Nullfolge bilden:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty, \quad \text{obwohl} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0 \quad \text{ist.}$$

**Definition 4.13.** Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  heißt absolut konvergent, falls die Reihe der Beträge  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  konvergiert.

**Satz 4.14.** Aus der absoluten Konvergenz einer Reihe folgt deren Konvergenz.

Dies lässt sich mit der Beschränktheit der Partialsummenfolge bestätigen: Ist  $S_n := \sum_{k=1}^n |a_k|$  beschränkt mit  $|S_n| < M$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), dann ist  $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$  ebenfalls beschränkt mit der gleichen Schranke  $M$ . Die Abschätzung geht zurück auf die Dreiecksungleichung für den Betrag:  $|a + b| \leq |a| + |b|$  für beliebige  $a, b \in \mathbb{C}$ .

**Satz 4.15** (Majorantenkriterium). Gegeben Seien die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  und eine reelle Folge  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  mit  $|a_k| \leq b_k$  für  $k \in \mathbb{N}$ . Konvergiert die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  in  $\mathbb{R}$ , so ist  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut konvergent und es gilt

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Es gibt zwei weitere nützliche Kriterien um die Konvergenz einer Reihe zu überprüfen. Dafür benötigen wir eine Definition:

**Definition 4.16.** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  eine reelle Folge. Dann bezeichnet man

- den kleinsten Häufungspunkt von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  als Limes inferior ( $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ ) und
- den größten Häufungspunkt von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  als Limes superior ( $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ ).

Ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nach oben unbeschränkt, so setzt man  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := +\infty$ .

Ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nach unten unbeschränkt, so setzt man  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := -\infty$ .

Hat eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  nur genau einen Häufungspunkt, so gilt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

**Satz 4.17.** Sei  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  gegeben.

1. Sei  $a_k \neq 0$  für  $k \in \mathbb{N}$ . Es gilt das Quotientenkriterium:

$$\text{Ist } \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1, \text{ dann konvergiert } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ absolut,}$$

$$\text{Ist } \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} > 1, \text{ dann divergiert } \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

2. Das Wurzelkriterium lautet:

$$\text{Ist } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1, \text{ dann konvergiert } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ absolut,}$$

$$\text{Ist } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1, \text{ dann divergiert } \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

3. Wenn der Grenzwert  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \in \mathbb{R}$  existiert, dann existiert auch der Grenzwert  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \in \mathbb{R}$  und beide Grenzwerte sind gleich. Die Umkehrung gilt nicht.

Existieren die jeweiligen Grenzwerte, so können Limes superior und Limes inferior jeweils durch die Grenzwerte ersetzt werden. Der dritte Teil des Satzes impliziert, dass das Wurzelkriterium öfter anwendbar ist als das Quotientenkriterium, so auch in folgendem Beispiel.

**Beispiel 4.18.** Betrachte die reelle Folge

$$a_k := \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^k, & \text{wenn } k \text{ gerade ist,} \\ \left(\frac{1}{8}\right)^k, & \text{wenn } k \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Das Wurzelkriterium liefert  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{2}$ , denn die Folge  $(\sqrt[k]{|a_k|})_{k \in \mathbb{N}}$  hat die Häufungspunkte  $\frac{1}{2}$  und  $\frac{1}{8}$ . Sie ist also nicht konvergent, besitzt aber den Limes superior  $\frac{1}{2}$  und den Limes inferior  $\frac{1}{8}$ . Die Reihe konvergiert also.

Das Quotientenkriterium ist hier nicht anwendbar, denn  $\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = 0$  (nicht  $> 1$ ) und  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = +\infty$  (nicht  $< 1$ ). Dies sieht man durch folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} &= \frac{(1/8)^{k+1}}{(1/2)^k} = \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \frac{1}{8} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \text{für } k \text{ gerade,} \\ \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} &= \frac{(1/2)^{k+1}}{(1/8)^k} = (4)^k \cdot \frac{1}{2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} +\infty \quad \text{für } k \text{ ungerade.} \end{aligned}$$

Kennen wir bereits die Werte von einigen Reihen, können wir mit Rechenregeln die Werte neuer Reihen ermitteln:

**Satz 4.19.** Sind zwei konvergente Reihen mit Werten  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b$  gegeben und ist  $c \in \mathbb{R}$ , dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = a \pm b \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (ca_k) = ca.$$

Anders als bei endlichen Summen dürfen bei Reihen die Summanden nicht einfach beliebig umgeordnet werden.

**Definition 4.20.** Ist  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  eine Reihe und  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  bijektive, dann heißt die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}$  Umordnung von  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

**Beispiel 4.21.** Gegeben Sei die Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

Diese Reihe hat die Partialsummen  $s_{2n} = 0$  und  $s_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ . Die Folge der Partialsummen ist also eine Nullfolge, d.h.  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$ . Die Reihe konvergiert also. Die Umordnung

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{1}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots$$

hat die Partialsummen,

$$\widehat{s}_{3n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}}}_{n \text{ Summanden}} = \frac{n}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

welche divergieren, d.h. die durch diese Umordnung entstandene Reihe divergiert.

**Satz 4.22 (Umordnungssatz).** *Konvergiert eine Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut, so konvergiert auch jede Umordnung  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}$  und die Werte stimmen überein:  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}$ .*

Nicht absolut konvergente Reihen  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  haben diese Eigenschaft nicht. Der Riemann'sche Umordnungssatz besagt sogar, dass es für jeden Wert  $s \in \mathbb{R}$  eine Bijektion  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  gibt, so dass  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)} = s$  gilt.

### 4.3 Potenzreihen

**Definition 4.23.** *Seien  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$  eine komplexe Folge und  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Eine Familie von Reihen  $P = (P(z))_{z \in \mathbb{C}}$  der Form*

$$P(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad z \in \mathbb{C},$$

heißt Potenzreihe mit Zentrum  $z_0$ .

**Fragestellung:** Für welche  $z \in \mathbb{C}$  konvergiert die Reihe  $P(z)$ ?

**Erste Antwort:** Für  $z = z_0$  konvergiert die Reihe  $P(z_0) = a_0$ .

Interessant ist die Frage also nur für  $z \neq z_0$ .

**Satz 4.24.** *Für  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$  und  $z_0 \in \mathbb{C}$  sei  $P(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  (für  $z \in \mathbb{C}$ ). Sei  $z_1 \neq z_0$ .*

i) *Ist  $P(z_1)$  konvergent, so ist  $P(z)$  absolut konvergent für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ .*

ii) *Ist  $P(z_1)$  divergent, so ist  $P(z)$  divergent für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$ .*

**Beispiel 4.25.** *Die geometrische Reihe liefert uns die Potenzreihe  $P$  mit Zentrum  $z_0 = 0$ , welche gegeben ist durch  $P(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (z - 0)^k$  für  $z \in \mathbb{C}$ . Diese konvergiert für  $|z| < 1$  und divergiert für  $|z| > 1$ . Für  $|z| = 1$  müssen wir alle möglichen Fälle per Hand überprüfen, zum Beispiel:*

$$P(1) = \sum_{k=0}^{\infty} 1^k = \infty, \quad P(-1) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \text{ divergiert (alternierend),}$$

$$P(i) = \sum_{k=0}^{\infty} i^k \text{ divergiert (alternierend),} \quad P(-i) = \sum_{k=0}^{\infty} (-i)^k \text{ divergiert (alternierend).}$$

**Definition 4.26.** *Der Konvergenzradius einer Potenzreihe  $P$  mit  $P(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  ist definiert als*

$$R := \sup \{ |z - z_0| \mid P(z) \text{ konvergent} \} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Ist  $P(z)$  nur für  $z = z_0$  konvergent, so ist  $R = 0$ . Konvergiert die Potenzreihe  $P$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ , so ist  $R = +\infty$ . Die Reihe  $P$  mit  $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$  hat den Konvergenzradius  $R = 1$ .

Aus Satz 4.24 können wir folgenden Satz ableiten:

**Satz 4.27.** Hat eine Potenzreihe  $P$  mit Zentrum  $z_0$  den Konvergenzradius  $R$ , dann konvergiert  $P(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - z_0| < R$  und  $P(z)$  divergiert für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - z_0| > R$ .

Zur kürzeren Notation führt man den *Konvergenzkreis* einer Potenzreihe  $P$  mit Zentrum  $z_0$  wie folgt ein:

$$K(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}.$$

Die Berechnung des Konvergenzradius erfolgt mit Wurzel- oder Quotientenkriterium:

**Satz 4.28.** Sei  $P$  eine Potenzreihe mit  $P(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Ihr Konvergenzradius sei  $R$ . Dann gilt:

1. Sei  $\lambda := \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ . Dann ist

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \text{falls } \lambda \in (0, +\infty), \\ 0, & \text{falls } \lambda = +\infty, \\ +\infty, & \text{falls } \lambda = 0. \end{cases}$$

2. Ist  $a_k \neq 0$  für  $k \in \mathbb{N}_0$  und existiert der Limes  $\mu := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$ , dann ist

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\mu}, & \text{falls } \mu \in (0, +\infty), \\ 0, & \text{falls } \mu = +\infty, \\ +\infty, & \text{falls } \mu = 0. \end{cases}$$

**Beispiel 4.29.** Für  $z \in \mathbb{C}$  sei  $E(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ .

Behauptung:  $E$  hat den Konvergenzradius  $R = +\infty$ .

Beweis: Für  $z = 0$  ist  $E(0) = 1$ . Für  $z \neq 0$  wende das Quotientenkriterium an mit  $a_k := \frac{1}{k!}$ :

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \frac{1}{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 =: \mu \quad \text{und damit} \quad R = +\infty.$$

## 5 Approximation von Funktionen – Satz von Taylor

Ziel dieses Kapitels ist es, Funktionen durch Polynome zu approximieren. Die Polynome haben dabei eine ganz bestimmte Form:

**Definition 5.1.** Sei  $n \in \mathbb{N}_0$  und sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -mal stetig differenzierbar in  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Das Polynom

$$T_n f(x; x_0) := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k$$

heißt Taylor-Polynom  $n$ -ten Grades von  $f$  in  $x_0$ .

**Beispiel 5.2.**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) := e^x$  hat die Ableitung  $f'(x) = e^x$ , also ist auch die  $n$ -te Ableitung  $f^{(n)}(x) = e^x$  für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$ . Damit ist das  $n$ -te Taylor-Polynom der Exponentialfunktion um den Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  gerade (mit  $e^{x_0} = e^0 = 1$ )

$$T_n f(x; x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{e^{x_0}}{k!} (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

Der folgende Satz liefert eine Aussage darüber, wie nah das  $n$ -te Taylor-Polynom an der zu approximierenden Funktion ist:

**Satz 5.3** (Satz von Taylor). Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $(n + 1)$ -mal stetig differenzierbar in  $I$ . Seien  $x, x_0 \in I$ . Dann existiert ein  $\xi \in I$  zwischen  $x$  und  $x_0$  derart, dass

$$f(x) = T_n f(x; x_0) + R_n f(x; x_0) \quad \text{mit} \quad R_n f(x; x_0) = \frac{1}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi) (x - x_0)^{n+1}.$$

Dabei heißt  $R_n f(x; x_0)$   $n$ -tes Restglied von  $f$  in  $x_0$ .

Obige Darstellung des Restgliedes ist in der sog. *Lagrange-Form* angegeben. Es gibt noch weitere Darstellung, z.B. die Darstellung nach Cauchy, auf die wir an dieser Stelle aber verzichten.

Aus dem Satz von Taylor bekommen wir als Folgerung die Fehlerabschätzung:

**Korollar 5.4.** Unter den Voraussetzungen von Satz 5.3 gilt:

$$|f(x) - T_n f(x; x_0)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n + 1)!} |x - x_0|^{n+1}.$$

**Definition 5.5.** Ist  $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  beliebig oft differenzierbar in  $x_0 \in I$ , so heißt

$$Tf(x; x_0) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k$$

Taylor-Reihe von  $f$  in  $x_0$ .

**Beispiel 5.6** (Fortsetzung von Beispiel 5.2). Für die Exponentialfunktion ist das  $n$ -te Restglied in  $x_0 = 0$  in Lagrange-Form gegeben durch  $R_n f(x; 0) = e^{\xi} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ , welches für festes  $\xi$  und  $x$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null strebt. Die Taylor-Reihe von  $f$  in  $x_0 = 0$  ist

$$Tf(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} =: E(x).$$

und hat nach Beispiel 4.29 den Konvergenzradius  $R = +\infty$ .

**Satz 5.7.** Sei  $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  beliebig oft differenzierbar in  $x_0 \in I$ . Für jedes  $x \in I$  folgt dann aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n f(x; x_0) = 0$ , dass die Taylor-Reihe von  $f$  in  $x_0$  in  $x$  mit  $f(x)$  übereinstimmt, d.h.  $Tf(x; x_0) = f(x)$ .

Gilt  $Tf(x; x_0) = f(x)$ , so nennt man  $f$  in  $x_0$  *reell-analytische Funktion*. Beispiele für reell-analytische Funktionen sind Potenzreihen, die Exponentialfunktion, Sinus, Kosinus und auch die (im nächsten Kapitel eingeführten) Funktionen  $\sinh$  und  $\cosh$ . Es gibt jedoch auch glatte (d.h. beliebig oft differenzierbare) Funktionen, die nicht reell-analytisch sind:

**Beispiel 5.8.**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{für } x > 0, \\ 0, & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

ist beliebig oft differenzierbar und es gilt  $f^{(n)}(0) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ . Damit ist  $Tf(x; 0) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Andererseits ist jedoch  $f(x) \neq 0$  für alle  $x > 0$ , also ist  $Tf(x; 0) \neq f(x)$  für  $x > 0$ , d.h.,  $f$  ist nicht reell-analytisch in  $x_0 = 0$ .

Kennt man die Darstellung einer Funktion als Reihe, kann man dadurch die Ableitung berechnen.

**Satz 5.9.** Seien  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$  und sei  $R$  der Konvergenzradius der Reihe  $P(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ . Sei  $K(z_0, R)$  der zugehörige Konvergenzkreis. Dann ist die Funktion

$$P: K(z_0, R) \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

stetig und differenzierbar mit Ableitung

$$P'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot (z - z_0)^{k-1}$$

**Beispiel 5.10** (2. Fortsetzung von Beispiel 5.2). Die Exponentialfunktion hat die Darstellung  $e^x = E(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ . Die Ableitung der Exponentialfunktion können wir mit der Reihendarstellung verifizieren:

$$E'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = E(x).$$

## Addendum zum Satz von Taylor

Das Taylor-Polynom  $n$ -ten Grades  $T_n f(x; x_0)$  ist das Polynom (höchstens)  $n$ -ten Grades, welches die Funktion  $f$  in der Nähe der Stelle  $x_0$  am besten approximiert. Insbesondere gilt also für Polynome  $f(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$ :

- $f(x) = T_m f(x; x_0)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $x_0 \in \mathbb{R}$ .
- Da  $f^k(x) \equiv 0$  für  $k > m$  ( $k$  größer als der Grad des Polynoms  $f$ ), gilt auch  $f(x) = T_n f(x; x_0)$  für alle  $n \geq m$ ,  $x \in \mathbb{R}$  und  $x_0 \in \mathbb{R}$  beliebig.
- $f(x) = T f(x; x_0)$  (also  $f$  stimmt mit der Taylor-Reihe von  $f$  überein) für alle  $n \geq m$ ,  $x \in \mathbb{R}$  und  $x_0 \in \mathbb{R}$  beliebig.

Die spezielle Form des Taylor-Polynoms,  $T_n f(x; x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$ , hat folgenden Zweck: Betrachten wir die  $m$ -te Ableitung von  $T_n f(x; x_0)$  für  $m < n$ , dann gilt:

- Für  $k < m$  ist die  $m$ -te Ableitung von  $\frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$  gleich Null.
- Für  $k > m$  ist die  $m$ -te Ableitung von  $\frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$  gleich

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) \cdot k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-m+1) \cdot (x-x_0)^{k-m},$$

für  $x = x_0$  wird also auch dieser Ausdruck Null.

- Für  $k = m$  ist die  $m$ -te Ableitung von  $\frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$  gleich

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) \cdot \underbrace{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1}_{=k!} \cdot \underbrace{(x-x_0)^0}_{=1} = f^{(k)}(x_0).$$

Damit gilt zusammenfassend für  $m < n$ :

$$T_n^{(m)} f(x_0; x_0) = f^{(m)}(x_0),$$

d.h. das Taylor-Polynom hat den Faktor  $\frac{1}{k!}$  im  $k$ -ten Summanden, damit die Ableitungen des Taylor-Polynoms mit denen der Funktion an der Stelle  $x_0$  übereinstimmen.

Anwendungsmöglichkeiten:

- Mit Hilfe der Taylor-Darstellung  $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  können wir Werte von  $e^x$  approximieren, z.B. ist  $e^2 \approx 7,389$  und mit Hilfe der Taylor-Reihe können wir berechnen:

$$\begin{aligned} e^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \approx \frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{6!} \\ &= 1 + 2 + 2 + \frac{8}{6} + \frac{16}{24} + \frac{32}{120} + \frac{64}{720} = 7 \frac{16}{45} = 7,3\bar{5}. \end{aligned}$$

- Kennen wir die Taylor-Entwicklung einer (reell-analytischen) Funktion, können wir Eigenschaften der Funktion ableiten, z.B. Wachstumsverhalten, näherungsweise Integration etc.
- Da laut der Taylor-Entwicklung  $\ln(1+x) \approx x$  für betragsmäßig sehr kleines  $x$ , ist  $\log_{1+r}(2) \approx \frac{\ln 2}{r}$  für  $|r|$  sehr klein. Mit  $\ln 2 \approx 0,69$  begründet sich die sog. "69er-Regel", die besagt, dass man bei einem Zinssatz von  $r$  (in %) nach ca  $\frac{0,69}{r}$  Jahren sein angelegtes Geld verdoppelt.

## 6 Elementare Funktionen

### 6.1 Exponential- und Logarithmusfunktion

Für jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  ist die  $n$ -te Potenz einer Zahl  $a \in \mathbb{C}$  gegeben durch

$$a^n = \prod_{k=1}^n a = a \cdot a \cdot \dots \cdot a \quad \text{und} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Zudem definiert man  $a^0 := 1$  (auch  $0^0 = 1$ ). So ist  $a^1 = a$  und für  $k, n \in \mathbb{Z}$  ist  $a^{k+n} = a^k \cdot a^n$ . Für Brüche als Exponenten bekommen wir die Wurzelfunktion:

$$a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}, \quad a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}, \quad n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R}_+.$$

Ziel dieses Abschnittes ist es, Potenzen  $a^x$  für  $a \in \mathbb{R}_+$  und  $x \in \mathbb{R}$  zu definieren. Aus Definition 3.11 kennen wir bereits die Exponentialfunktion, welche wir, um sie von der Potenzfunktion zu unterscheiden, vorerst schreiben als

$$\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \exp(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n. \quad (6.1)$$

Für den Moment wollen wir uns auf reelle Zahlen beschränken. Dann hat die Exponentialfunktion folgende Eigenschaften:

**Satz 6.1.** Für  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y), \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}, \quad \exp(x) > 0, \quad \exp(1) = e,$$

und  $x \mapsto \exp(x)$  ist streng monoton wachsend, d.h. für  $x < y$  ist  $\exp(x) < \exp(y)$ .

**Satz 6.2.** Ist  $M \subset \mathbb{R}$  und ist  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  streng monoton, so ist  $f$  invertierbar, d.h. es existiert eine Funktion  $f^{-1}: f(M) \rightarrow M$  mit

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, \quad \forall x \in M, \quad \text{und} \quad (f \circ f^{-1})(y) = y, \quad \forall y \in f(M).$$

Nach diesem Satz ist die Exponentialfunktion  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  (mit  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ) invertierbar.

**Definition 6.3.** Der natürliche Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Er ist definiert als

$$\ln: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(x) := \exp^{-1}(x).$$

Der natürliche Logarithmus hat folgende Eigenschaften:

**Satz 6.4.** Für  $x, y > 0$  gilt:

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y), \quad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x), \quad \ln(e) = 1,$$

und  $x \mapsto \ln(x)$  ist strikt monoton wachsend, d.h. ist  $x < y$ , dann ist auch  $\ln(x) < \ln(y)$ .

Insbesondere gilt also auch  $\ln(x^q) = q \ln(x)$  für  $q \in \mathbb{Q}$  und  $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$  für  $x, y \in \mathbb{R}_+$ . Mit Hilfe des Logarithmus definieren wir jetzt die allgemeine Exponentialfunktion wie folgt:

**Definition 6.5.** Für  $a \in \mathbb{R}_+$  und  $x \in \mathbb{R}$  definieren wir  $a^x := \exp(x \ln(a))$ . Den Ausdruck  $a^x$  nennen wir dann auch allgemeine Potenz von  $a$ .

**Bemerkung 6.6.** Da die Exponentialfunktion auch für komplexe Zahlen definiert ist, können wir auch für komplexe Zahlen eine allgemeine Exponentialfunktion definieren: Für  $a \in \mathbb{R}_+$  und  $z \in \mathbb{C}$  definieren wir  $a^z := \exp(z \ln(a))$ .

Mit dieser Definition ist  $e^x = \exp(x \ln(e)) = \exp(x \cdot 1) = \exp(x)$  für beliebige  $x \in \mathbb{R}$ . Die Rechenregeln für die Exponentialfunktion übertragen sich auf die allgemeine Exponentialfunktion. Für  $a \in \mathbb{R}_+$  und  $x, y \in \mathbb{R}$  gelten damit die Rechenregeln:

$$\begin{aligned} a^x \cdot a^y &= \exp(x \ln(a)) \cdot \exp(y \ln(a)) = \exp((x + y) \ln(a)) = a^{x+y}, \\ a^{-x} &= \exp(-x \cdot \ln(a)) = \exp(-(x \cdot \ln(a))) = \frac{1}{\exp(x \ln(a))} = \frac{1}{a^x}, \\ a^x &= \exp(x \cdot \ln(a)) > 0, \end{aligned}$$

und für  $a = 1$  ist  $x \mapsto a^x$  konstant, für  $a > 1$  ist  $x \mapsto a^x$  streng monoton wachsend und für  $0 < a < 1$  ist  $x \mapsto a^x$  streng monoton fallend.

**Beispiel 6.7.** In der Tat ist  $x \mapsto 2^x$  streng monoton wachsend und  $x \mapsto (\frac{1}{2})^x = \frac{1}{2^x}$  ist streng monoton fallend.

Auch die allgemeine Exponentialfunktion ist also streng monoton und damit invertierbar für  $a \neq 1$ :

**Definition 6.8.** Für  $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$  definieren wir den Logarithmus zur Basis  $a$  als Umkehrfunktion zur allgemeinen Exponentialfunktion  $x \mapsto a^x$ .  $\log_a$  hat den Definitionsbereich  $\mathbb{R}_+$  und den Wertebereich  $\mathbb{R}$ .

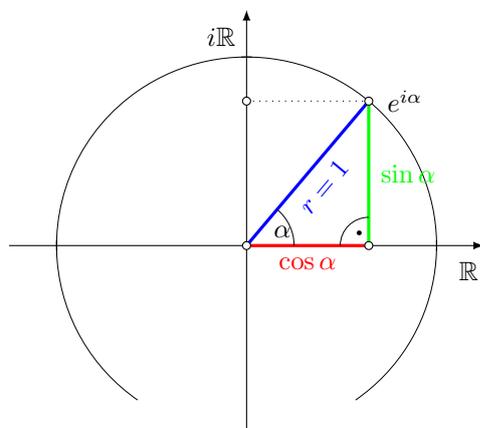
Es ist damit  $\log_a(1) = 0$  und  $\log_a(a) = 1$ . Zudem kann man den allgemeinen Logarithmus mit Hilfe des natürlichen Logarithmus ausdrücken:

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Somit ist  $\log_e(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(e)} = \frac{\ln(x)}{1} = \ln(x)$ .

## 6.2 Trigonometrische und hyperbolische Funktionen

Trigonometrische Funktionen tauchten historisch betrachtet für die Berechnung von Größen (Längen und Winkel) von Dreiecken auf.



$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$
$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$
$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$
$ e^{i\alpha}  = \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = 1$

Mit Hilfe der komplexen Zahlen können wir die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus wie folgt erweitern:

**Definition 6.9.** Für  $z \in \mathbb{C}$  definiere

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Für  $z \in \mathbb{R}$  ist damit

$$\cos(z) = \operatorname{Re}(e^{iz}) \quad \text{und} \quad \sin(z) = \operatorname{Im}(e^{iz}).$$

Mit dieser Definition bekommen wir sofort die Euler'sche Formel aus Satz 3.12. Zudem lassen sich die Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen und auch nützliche Rechenregeln herleiten:

**Satz 6.10.** 1. Für  $z \in \mathbb{C}$  gilt  $\boxed{\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1}$ .

2. Der Sinus ist ungerade, der Cosinus ist gerade:  $\boxed{\sin(-z) = -\sin(z)}$  und  $\boxed{\cos(-z) = \cos(z)}$  für  $z \in \mathbb{C}$ .

3. Für  $w, z \in \mathbb{C}$  gelten die Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} \sin(w + z) &= \sin(w) \cos(z) + \sin(z) \cos(w), \\ \cos(w + z) &= \cos(w) \cos(z) - \sin(w) \sin(z). \end{aligned}$$

4. Für bel.  $z \in \mathbb{C}$  gilt  $\boxed{\sin'(z) = \cos(z)}$  und  $\boxed{\cos'(z) = -\sin(z)}$ .

Benutze für 4., dass  $i \cdot (-i) = 1$  ist, also  $\frac{1}{i} = -i$ .

Mit Hilfe der Ableitungen von Sinus und Cosinus lassen sich die Taylorreihen beider Funktionen bestimmen:

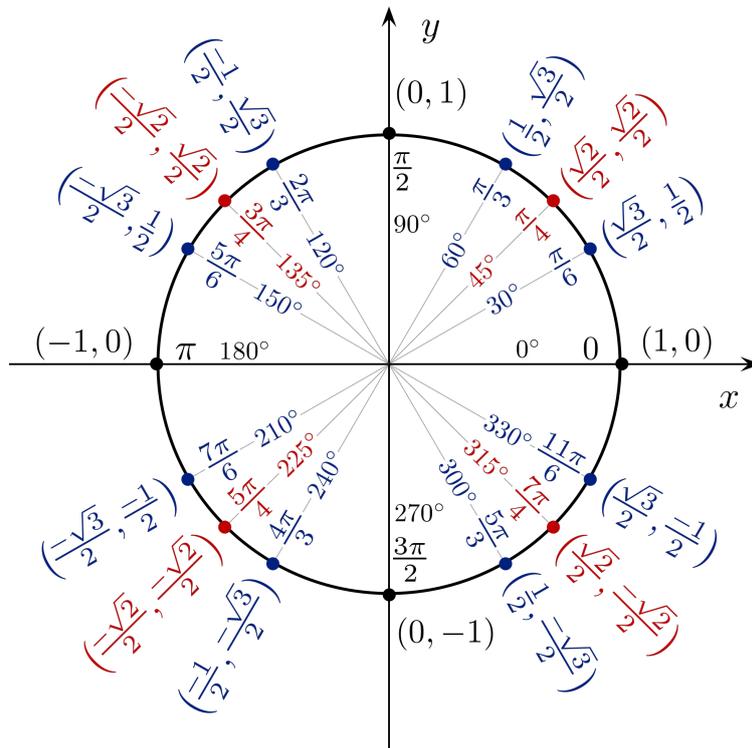


Abbildung 3: Spezielle Werte von cos und sin (aus: Wikipedia)

**Satz 6.11.** Sinus und Cosinus besitzen folgende Darstellungen für  $z \in \mathbb{C}$ :

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

**Definition 6.12** (Tangens, Cotangens). Definiere Tangens und Cotangens als

$$\tan: \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \tan(z) := \frac{\sin z}{\cos z}$$

$$\cot: \mathbb{C} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \cot(z) := \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Die reellen trigonometrischen Funktionen sind periodisch, also insb. nicht monoton und somit nicht global invertierbar. Die Umkehrfunktion existiert also nur für geeignete Einschränkungen:

**Definition 6.13** (Umkehrfunktionen der (reellen) trigonometrischen Funktionen).

1. Die Umkehrfunktion des Sinus ist der Arcussinus  $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .
2. Die Umkehrfunktion des Cosinus ist der Arcuscosinus  $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ .
3. Die Umkehrfunktion des Tangens ist der Arcustangens  $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .
4. Die Umkehrfunktion des Cotangens ist der Arcuscotangens  $\text{arccot}: \mathbb{R} \rightarrow [0, \pi]$ .

**Skizzen ( $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ):**

**Definition 6.14** (Hyperbelfunktionen). *Die Funktionen Sinus hyperbolicus, Cosinus hyperbolicus, Tangens hyperbolicus und Cotangens hyperbolicus sind wie folgt definiert:*

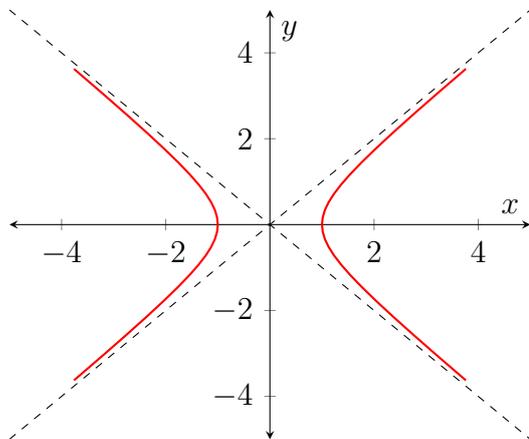
$$\begin{aligned} \sinh z &: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, & \sinh z &:= \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \\ \cosh z &: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, & \cosh z &:= \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \\ \tanh z &: \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}i + k\pi i \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{C}, & \tanh z &:= \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}, \\ \coth z &: \mathbb{C} \setminus \{k\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{C}, & \coth z &:= \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1}, \end{aligned}$$

**Satz 6.15.** *Eigenschaften von und Rechenregeln für Hyperbelfunktionen für  $z \in \mathbb{C}$ :*

1.  $\sinh z = -i \sin(iz)$  und  $\cosh z = \cos(iz)$ ,
2.  $(\cosh z)^2 - (\sinh z)^2 = 1$ ,
3.  $\cosh(-z) = \cosh(z)$  und  $\sinh(-z) = -\sinh(z)$ ,
4.  $\sinh'(z) = \cosh(z)$  und  $\cosh'(z) = \sinh(z)$ .

Mit Eigenschaft 3 des Satzes lässt sich die Namensgebung *Hyperbelfunktionen* erklären:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\} = \{(\cosh t, \sinh t) \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\cosh t, \sinh t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$



Hyperbeln in rot:

$$\begin{aligned} &\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1, x < 0\}, \\ &\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1, x > 0\}. \end{aligned}$$

Geraden in schwarz:

$$\begin{aligned} &\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}, \\ &\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x\}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Ableitungen lassen sich die Taylorreihen von  $\sinh$  und  $\cosh$  bestimmen:

**Satz 6.16.** *Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus besitzen folgende Darstellungen für  $z \in \mathbb{C}$ :*

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

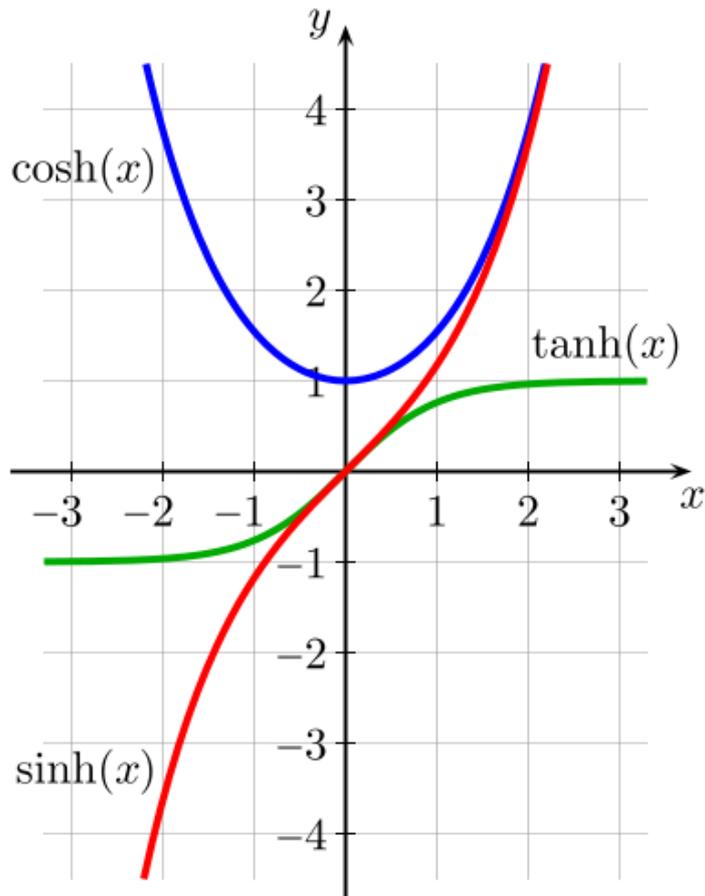
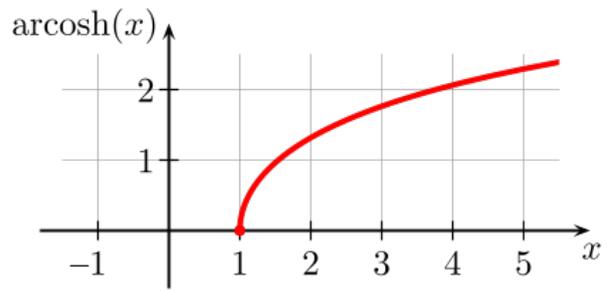
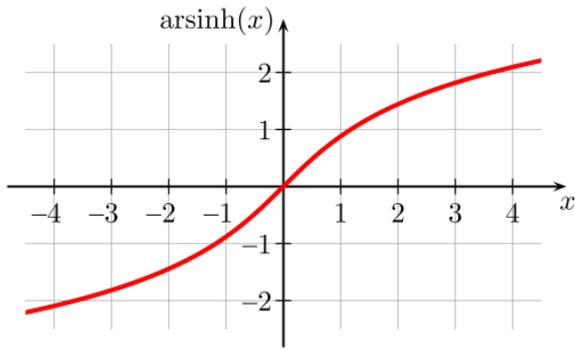
Für die (reellen) Umkehrfunktionen müssen wir wieder den Definitionsbereich der Hyperbelfunktionen so einschränken, dass die Funktionen bijektiv und damit invertierbar sind.

**Definition 6.17** (Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen).

1. Die Umkehrfunktion des Sinus hyperbolicus ist der Areasinus hyperbolicus  
 $\operatorname{arsinh}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .
2. Die Umkehrfunktion des Cosinus hyperbolicus ist der Areacosinus hyperbolicus  
 $\operatorname{arcosh}: [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ .
3. Die Umkehrfunktion des Tangens hyperbolicus ist der Areatangens hyperbolicus  
 $\operatorname{artanh}: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ .
4. Die Umkehrfunktion des Cotangens hyperbolicus ist der Areacotangens hyperbolicus  
 $\operatorname{arcoth}: \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**Satz 6.18.** *Es gelten folgende Darstellungen:*

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh}(x) &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), & x \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{arcosh}(x) &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), & x \geq 1, \\ \operatorname{artanh}(x) &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right), & |x| < 1, \\ \operatorname{arcoth}(x) &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right), & |x| > 1. \end{aligned}$$



## 7 Differentialrechnung II

### 7.1 Funktionsgrenzwerte berechnen

Beim Bestimmen des Funktionsgrenzwertes  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  treten manchmal unbestimmte Ausdrücke der Form  $\frac{0}{0}$  oder  $\frac{\infty}{\infty}$  auf. Der folgende auf Guillaume François Antoine de L'Hôpital (1661-1704) zurück gehende Satz ermöglicht in manchen Fällen das Berechnen des Grenzwertes mit Hilfe der Ableitungen von Zähler und Nenner:

**Satz 7.1** (Regel von L'Hôpital / L'Hospital). Sei  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  mit  $x_0 \in I$ . Seien  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar mit  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in I$ . Falls

(i)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \in \{0, \pm\infty\}$  und

(ii)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,

dann gilt  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = c$ .

Die Aussage gilt auch, wenn alle Grenzwerte durch links- oder rechtsseitige Grenzwerte ersetzt werden.

**Bemerkung 7.2** (Beweisidee). Lokal (d.h. in der Nähe von  $x_0$ ) lassen sich Funktionen durch ihre Tangenten (in  $x_0$ ) approximieren:

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \\ g(x) &\approx g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0). \end{aligned}$$

Gilt nun  $f(x_0) = g(x_0) = 0$ , dann folgt daraus

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}{g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0)} = \frac{0 + f'(x_0)(x - x_0)}{0 + g'(x_0)(x - x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Der Beweis benötigt den erweiterten Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

**Bemerkung 7.3.** Auch einige andere unbestimmte Ausdrücke lassen sich durch Umformen auf die gewünschte Form bringen, zum Beispiel:

" $0 \cdot \infty$ " Für  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$  berechnen wir

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{0}{0}.$$

" $\infty - \infty$ " Für  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$  berechnen wir

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{0 - 0}{0}.$$

**Beispiel 7.4.** Sind Funktionsgrenzwerte von Zähler und Nenner nicht beide Null oder unendlich, so darf L'Hôpital nicht angewendet werden:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x + \cos x}{x} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x + \cos x}{x} = +\infty,$$

jedoch ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x + \cos x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sin x}{1} = 1.$$

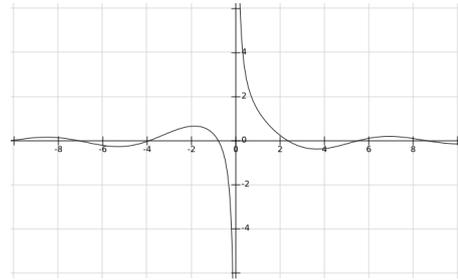


Abbildung 4:  $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{x}$

**Beispiel 7.5.** Selbst wenn L'Hôpital angewendet werden darf, ist er nicht immer hilfreich: Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sinh(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \cosh(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh'(x)}{\cosh'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Geschicktes Umformen liefert jedoch ein Ergebnis:

$$\tanh(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{-x}(e^x - e^{-x})}{e^{-x}(e^x + e^{-x})} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1.$$

## 7.2 Verallgemeinerte Kettenregel und Implizite Funktionen

**Satz 7.6** (Verallgemeinerte Kettenregel). Seien  $M \subset \mathbb{R}$ ,  $t_0 \in M$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Für  $k \in \{1, \dots, n\}$  seien  $x_k: M \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbare Funktionen und  $x = (x_1, \dots, x_n): M \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Weiterhin sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0 := x(t_0) = (x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)) \in \mathbb{R}^n$ . Sei die Funktion  $G: M \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$G := f \circ x, \quad \text{d.h.} \quad G(t) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \quad t \in M.$$

Dann ist  $G$  differenzierbar in  $t_0$  mit Ableitung

$$G'(t_0) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)) \cdot x'_k(t_0).$$

Die Aussage gilt ebenso, wenn der Wertebereich von  $G$  von  $\mathbb{R}$  auf  $\mathbb{C}$  erweitert wird.

**Beispiel 7.7** (Exponentialfunktion). Sei  $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch  $G(t) := (\cos(t) + i \sin(t))$ , also  $f(x, y) = x + iy$ ,  $x(t) = \cos t$  und  $y(t) = \sin t$ . Dann ist

$$\begin{aligned} G'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\cos(t) + i \sin(t)) \cdot (\cos t)' + \frac{\partial f}{\partial y}(\cos(t) + i \sin(t)) \cdot (\sin t)' \\ &= 1 \cdot (-\sin t) + i \cdot \cos t = i(i \sin t + \cos t) = iG(t) \end{aligned}$$

Nach der Euler'schen Formel ist  $G(t) = e^{it}$  und hat in der Tat die Ableitung  $G'(t) = i \cdot e^{it}$ .

Kommen wir nun zu den impliziten Funktionen.

**Definition 7.8.** Seien  $A \subset \mathbb{R}$  und  $B \subset \mathbb{R}$  offene Mengen und sei  $F: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Eine Funktion  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  sei implizit gegeben durch die Auflösung der Gleichung  $F(x, y) = 0$  nach  $y$ , d.h.

$$\{(x, y) \in A \times B \mid F(x, y) = 0\} = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}.$$

In diesem Fall sagt man,  $F$  sei (lokal) nach  $y$  auflösbar.

Eine solche implizite Darstellung hatten wir für Hyperbeln gesehen. In diesem Fall war  $F(x, y) = x^2 - y^2 - 1$ .

**Satz 7.9** (Satz über implizite Funktionen). Für  $M \subset \mathbb{R}^2$  sei  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Für einen Punkt  $(x_0, y_0) \in M$  gelte  $F(x_0, y_0) = 0$  und  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ . Dann existieren  $\alpha, \beta > 0$  so dass gilt:

$$\forall x \in \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \alpha\} \exists! y = f(x): |y - y_0| < \beta, F(x, y) = 0,$$

d.h. lokal (in einer Umgebung von  $x_0$ ) ist  $F(x, y) = 0$  nach  $y$  auflösbar.

Mit Hilfe der verallgemeinerten Kettenregel können wir die Ableitung einer implizit gegebenen Funktion berechnen.

Sei die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  implizit gegeben durch  $G(x) = F(x, f(x)) = 0$ . Die Funktion  $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist konstant, hat also die Ableitung  $G'(x) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und damit sagt uns die Kettenregel

$$0 = G'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \cdot f'(x).$$

Ist  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \neq 0$  (so wie im Satz über implizite Funktionen an mindestens einer Stelle  $(x_0, y_0)$  gefordert), so kann man diese Gleichung nach  $f'(x)$  auflösen und erhält

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}. \quad (7.1)$$

**Beispiel 7.10.** Die Hyperbel war gegeben durch  $F(x, y) = 0$  mit  $F(x, y) = x^2 - y^2 - 1$ . Es ist  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -2y \neq 0$  für  $y \neq 0$ . Wenn wir diese Funktion lokal nach  $y$  auflösen können (also für  $|x| \geq 1$  und  $y \neq 0$ ), so dass für  $f(x) = y(x)$  die Gleichung  $F(x, y(x)) = 0$  gilt, dann ist die Ableitung

$$f'(x) = y'(x) = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}.$$

Wir können überprüfen, dass dies korrekt ist, indem wir  $f$  ausrechnen:

$$x^2 - y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$$

Setzen wir beispielsweise  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} = (x^2 - 1)^{1/2}$ , so ist die Ableitung von  $f$  gegeben durch

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{f(x)}, \quad \text{d.h.} \quad y' = \frac{x}{y}.$$

Die letzte Gleichung ist eine Differentialgleichung, sie zu lösen ist Thema in einem späteren Kapitel.

**Bemerkung 7.11.** Implizite Funktionen lassen sich auch auf höhere Dimensionen übertragen. Für  $m, n \in \mathbb{N}$  sei eine Funktion  $F = (F_1, \dots, F_n): \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  gegeben. Diese definiert (wieder unter gewissen Voraussetzungen und nur lokal) implizit eine Funktion  $f = (f_1, \dots, f_n): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ :

$$F(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0, \\ F_2(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0, \\ \vdots \\ F_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \end{cases}$$

mit  $f_1(x_1, \dots, x_m) = y_1, f_2(x_1, \dots, x_m) = y_2, \dots, f_n(x_1, \dots, x_m) = y_n$ . Setzen wir wieder

$$G_j(x_1, \dots, x_m) := F_j(x_1, \dots, x_m, f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m)) = 0$$

für  $j \in \{1, \dots, n\}$ , so können wir die partiellen Ableitungen berechnen.

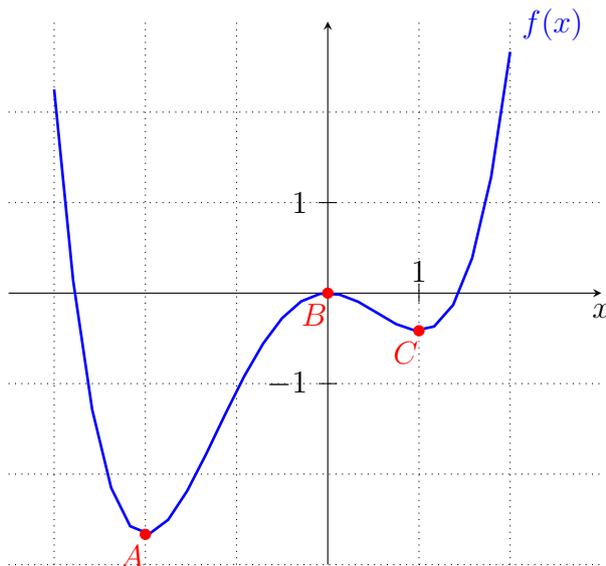
Für die partiellen Ableitungen nach  $x_k$  ( $k \in \{1, \dots, m\}$ ) gilt dann für  $j \in \{1, \dots, n\}$ :

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k} + \frac{\partial F_j}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_k} + \frac{\partial F_j}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial F_j}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_k} = 0.$$

### 7.3 Extremwertaufgaben

In Definition 1.43 haben wir die Begriffe Supremum, Infimum, Maximum und Minimum eingeführt. Betrachten wir zunächst ein Beispiel zur Motivation dieses Abschnittes:

**Beispiel 7.12.** Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert als  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$  für  $x \in \mathbb{R}$ . Diese Funktion hat folgenden Graphen:



Was passiert an den markierten Punkten und wie finden wir sie?

$$A = \left(-2, -\frac{8}{3}\right),$$

$$B = (0, 0),$$

$$C = \left(1, -\frac{5}{12}\right).$$

Das sind die lokalen Extremstellen.

**lokale Extrema:** in offener Menge 1. und 2. Ableitungen betrachten,

**globale Extrema:** Werte auf dem Rand der Menge und lokale Extrema vergleichen.

**Definition 7.13** (lokale Extremalstellen). Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in M$ .

- a)  $x_0$  heißt lokales Minimum von  $f$ , falls ein  $\varepsilon > 0$  existiert, so dass für alle  $x \in M$  mit  $|x - x_0| < \varepsilon$  gilt:  $f(x_0) \leq f(x)$ .
- b)  $x_0$  heißt lokales Maximum von  $f$ , falls ein  $\varepsilon > 0$  existiert, so dass für alle  $x \in M$  mit  $|x - x_0| < \varepsilon$  gilt:  $f(x_0) \geq f(x)$ .
- c)  $x_0$  heißt strenges lokales Minimum von  $f$ , falls ein  $\varepsilon > 0$  existiert, so dass für alle  $x \in M$  mit  $|x - x_0| < \varepsilon$  gilt:  $f(x_0) < f(x)$ .
- d)  $x_0$  heißt strenges lokales Maximum von  $f$ , falls ein  $\varepsilon > 0$  existiert, so dass für alle  $x \in M$  mit  $|x - x_0| < \varepsilon$  gilt:  $f(x_0) > f(x)$ .

Im  $\mathbb{R}^1$  ist klar, was ein offenes Intervall ist:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Wie definieren wir offene Mengen allgemein im  $\mathbb{R}^n$ ?

**Definition 7.14.** Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt offen, falls zu jedem Punkt aus  $M$  eine offene Kugel um  $x_0$  existiert, die selbst in  $M$  enthalten ist. Mit anderen Worten:

$$\forall x_0 \in M \exists \varepsilon > 0: B(x_0, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < \varepsilon\} \subset M.$$

Nach dem Satz von Weierstraß (Satz 1.44) nimmt jede stetige Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  auf diesem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  ihr Minimum und Maximum an. Auf offenen Mengen müssen Minimum und Maximum nicht angenommen werden. Wenn jedoch lokale Minima und Maxima existieren, so können sie über die Ableitung charakterisiert werden:

**Satz 7.15.** Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Sei  $x_0 \in M$  eine Extremalstelle von  $f$ . Dann muss  $\nabla f(x_0) = \vec{0}$ , d.h. der Gradient von  $f$  verschwindet an der Stelle  $x_0$ .

Jeder Punkt  $x_0 \in M$  mit  $\nabla f(x_0) = \vec{0}$  heißt kritischer Punkt von  $f$ . Dabei ist  $\vec{0} = (0, \dots, 0)$  der  $n$ -dimensionale Nullvektor.

Obiger Satz liefert notwendige Bedingungen für Extrema. Folgende hinreichende Bedingungen sagen uns, ob es sich tatsächlich um eine Extremalstelle handelt und ob es sich um ein Minimum oder Maximum handelt.

**Satz 7.16.** Seien  $M \subset \mathbb{R}$  offen und  $f \in C^2(M; \mathbb{R})$ . Sei  $x_0$  ein kritischer Punkt von  $f$ .

- a) Falls  $f''(x_0) > 0$  ist, so ist  $x_0$  ein striktes lokales Minimum von  $f$ .
- b) Falls  $f''(x_0) < 0$  ist, so ist  $x_0$  ein striktes lokales Maximum von  $f$ .

Bei der Betrachtung von Extrema beschränken wir uns (vorerst) auf den  $\mathbb{R}^2$  und bekommen unter Verwendung der Hessematrix folgendes analoges Resultat:

**Satz 7.17.** Seien  $M \subset \mathbb{R}^2$  offen und  $f \in C^2(M; \mathbb{R})$ . Sei  $a = (a_1, a_2) \in M$  ein kritischer Punkt von  $f$ .

a) Falls

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \right)^2 < \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \quad (7.2)$$

ist, so ist  $a$  ein eine lokale Extremalstelle von  $f$ .

b) Ist  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) > 0$ , dann ist  $a$  ein lokales Minimum von  $f$ .

c) Ist  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) < 0$ , dann ist  $a$  ein lokales Maximum von  $f$ .

d) Gilt ">" an Stelle von "<" in (7.2), so ist  $a$  ein Sattelpunkt von  $f$ .

**Beispiel 7.18.** Sei  $f(x, y) := (x - y)^4$  für  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Dann bestimmen wir zunächst alle kritischen Punkte von  $f$ :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 4(x - y)^3 \\ -4(x - y)^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = y.$$

Für alle Punkte in  $\mathcal{M} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$  gilt  $f(x, y) = 0$ , für alle Punkte außerhalb dieser Menge ist  $f(x, y) > 0$ , d.h. das globale (nicht strikte) Minimum der Funktion wird in allen Punkten  $(x, y) \in \mathcal{M}$  angenommen. Was sagt uns das hinreichende Kriterium? Die zweiten partiellen Ableitungen lauten wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= 12(x - y)^2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= 12(x - y)^2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= -12(x - y)^2. \end{aligned}$$

Satz 7.17 ist also nicht anwendbar, da Gleichheit in (7.2) gilt.

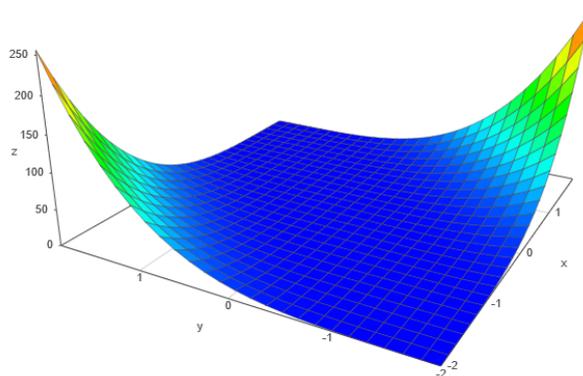


Abbildung 5:  $f(x, y) = (x - y)^4$  aus Beispiel 7.18

Mit Hilfe der Ableitung einer implizit gegebenen Funktion (siehe (7.1)) können auch Extrema implizit gegebener Funktionen untersucht werden:

**Satz 7.19** (Notwendige und hinreichende Bedingungen bei impliziten Funktionen). Sei  $M \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und sei  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  implizit gegeben durch  $F(x, f(x)) = 0$  für  $F$  zweimal partiell differenzierbar.

a) Wenn  $a \in M$  ein lokales Extremum von  $f$  ist, dann gilt  $\frac{\partial}{\partial x} F(a, f(a)) = 0$ .

b) Ist  $a \in M$  ein kritischer Punkt von  $f$  und ist

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a, f(a)) \neq 0,$$

dann ist  $a$  eine lokale Extremstelle von  $f$ .

c) Ist weiterhin

$$-\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a, f(a))}{\frac{\partial F}{\partial y}(a, f(a))} > 0, \quad (7.3)$$

so ist  $a$  ein lokales Minimum von  $f$ .

d) Gilt " $<$ " in (7.3), so ist  $a$  ein lokales Maximum von  $f$ .

**Beispiel 7.20.** Sei eine Funktion  $f$  implizit gegeben durch  $F(x, y) = (x+1)^2 + (y-3)^2 - 1 = 0$ . Zunächst berechnen wir:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 2x + 2, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2y - 6, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = 2.$$

Die notwendige Bedingung lautet  $2x + 2 = 0$ . Diese wird nur von  $x = -1$  erfüllt — dies ist also der einzige kritische Punkt von  $f$ .

$x = -1$  ist eine lokale Extremstelle von  $f$ , denn  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = 2 \neq 0$  für beliebige  $y \in \mathbb{R}$ , also insb. für  $y = f(x)$ .

$F(-1, y) = (y - 3)^2 - 1 = 0$  hat die Lösungen  $y \in \{2, 4\}$  — dies sind also die Kandidaten für  $f(-1)$ .

$-\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(-1, 2)}{\frac{\partial F}{\partial y}(-1, 2)} = \frac{-2}{2 \cdot 2 - 6} = 1 > 0$  und in der Tat ist  $(a, f(a)) = (-1, 2)$  das Minimum von  $f$ .

$-\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(-1, 4)}{\frac{\partial F}{\partial y}(-1, 4)} = \frac{-2}{2 \cdot 4 - 6} = -1 < 0$  und in der Tat ist  $(a, f(a)) = (-1, 4)$  das Maximum von  $f$ .

Die implizit gegebene(n) Funktion(en)  $y = f(x)$  können wir in diesem Fall übrigens wie folgt berechnen:

Seien  $a = x + 1$  und  $b = y - 3$ . Dann ist  $F(x, y) = (x + 1)^2 + (y - 3)^2 - 1 = a^2 + b^2 - 1 = 0$  genau dann, wenn  $b = \pm\sqrt{1 - a^2}$  ist. Rücksubstitution ergibt  $y - 3 = \pm\sqrt{1 - (x + 1)^2}$ , also  $y = f(x) = 3 \pm \sqrt{-x^2 - 2x}$ .

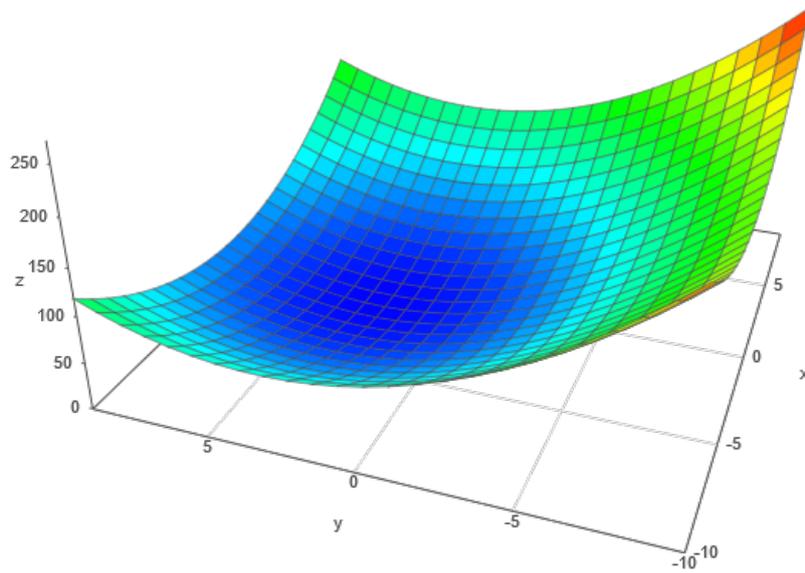


Abbildung 6: Graph von  $F$  aus Beispiel 7.20

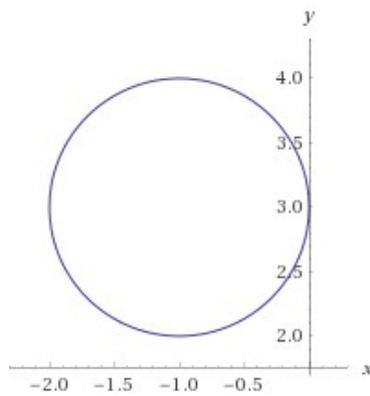


Abbildung 7: Graph von  $f$  aus Beispiel 7.20

## 8 Integralrechnung I

**Motivation:** Mit Hilfe der Integration lassen sich Flächeninhalte (Fläche unter einem Graphen), Volumina, Längen von Kurven und vieles mehr berechnen. Zudem benötigen wir die Integration zum Lösen von Differentialgleichungen.

### 8.1 Stammfunktionen und unbestimmte Integrale

**Definition 8.1** (Stammfunktion). Seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Eine differenzierbare Funktion  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Stammfunktion von  $f$ , wenn  $F'(x) = f(x)$  gilt für alle  $x \in I$ . Das unbestimmte Integral  $\int f(x)dx$  ist die Menge aller Stammfunktionen von  $f$ .

Da sich die Stammfunktionen nur durch eine additive Konstante  $C \in \mathbb{R}$  unterscheiden, schreibt man auch

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

**Satz 8.2** (Rechenregeln). Besitzen  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  Stammfunktionen, so gilt:

(1)  $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

(2) Für jedes  $a \in \mathbb{R}$  ist  $\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx.$

(3) Falls  $f$  differenzierbar ist, dann gilt

$$\int f'(x)f(x)dx = \frac{1}{2}(f(x))^2 + C.$$

(4) Falls  $f(x) \neq 0$  für alle  $x \in I$  und  $f$  differenzierbar ist, gilt

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln |f(x)| + C.$$

Aussagen (1) und (2) folgen aus der Linearität der Ableitung, (3) und (4) zeigt man durch Ableiten der rechten Seite. Bei (4) ist zu beachten, dass wegen  $f(x) \neq 0$  für alle  $x \in I$  entweder  $|f(x)| = f(x)$  für alle  $x \in I$  oder  $|f(x)| = -f(x)$  für alle  $x \in I$ , so dass die Stammfunktion tatsächlich überall differenzierbar ist.

Folgende Stammfunktionen können durch Ableiten verifiziert werden für  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$  und  $a > 0$ :

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C,$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C,$$

$$\int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C,$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + C,$$

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2} dx = \tan x + C,$$

$$\int \frac{1}{(\sin x)^2} dx = -\cot x + C$$

Die Stammfunktionen der Hyperbelfunktionen lauten

$$\begin{aligned} \int \sinh x dx &= \cosh x + C, & \int \cosh x dx &= \sinh x + C, \\ \int \tanh x dx &= \ln \cosh x + C, & \int \coth x dx &= \ln |\sinh x| + C. \end{aligned}$$

**Satz 8.3** (Partielle Integration). *Ist  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und sind  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar, dann gilt*

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) + C - \int f(x) \cdot g'(x) dx.$$

**Satz 8.4** (Substitution). *Seien  $I, J \subset \mathbb{R}$  Intervalle. Ist  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit Stammfunktion  $F$  und  $g: J \rightarrow I$  stetig differenzierbar mit Stammfunktion  $G$ , dann hat  $g' \cdot (f \circ g)$  die Stammfunktion  $F \circ g$ , d.h.*

$$\int g'(x) \cdot f(g(x)) dx = \int f(y) dy \Big|_{y=g(x)}.$$

Formal substituieren wir also  $y = g(x)$  und schreiben  $dy = g'(x) dx$ .

**Beispiel 8.5.** *Aussage (4) aus Satz 8.2 können wir mit Substitution beweisen:*

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{y} dy \Big|_{y=f(x)} = \ln |y| \Big|_{y=f(x)} + C = \ln |f(x)| + C.$$

Konkret können wir so die Stammfunktion des Tangens berechnen:

$$\int \tan(x) dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = - \ln(\cos x) + C, \quad \text{auf } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

## 8.2 Bestimmte Integrale

Das Riemann-Integral einer Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gibt den Flächeninhalt unter dem Graphen von  $f$  zwischen  $a$  und  $b$  an. Der Flächeninhalt einer Menge  $A \subset \mathbb{R}^2$ , nennen wir ihn  $\mu(A)$ , sollte folgende Eigenschaften haben:

- $\mu(A) \geq 0, \forall A \subset \mathbb{R}^2$ ,
- $\mu([a, b] \times [c, d]) = (b - a) \cdot (d - c)$  (Flächeninhalt eines Rechtecks),
- $A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$ ,
- überschneiden sich  $A$  und  $B$  maximal auf dem Rand, dann gilt  $\mu(a \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ ,
- wird  $A$  gedreht oder im Raum verschoben, ändert sich der Flächeninhalt nicht.

Kennen wir den Flächeninhalt unter einer Kurve, können wir den Flächeninhalt von allgemeinen Flächen  $A \subset \mathbb{R}^2$  berechnen, indem wir die Fläche in Teilstücke zerlegen, die jeweils als Fläche unter einem Graphen beschrieben werden können.

Für die Definition des Riemann-Integrals benötigen wir einige Begriffe:

**Definition 8.6.** Seien  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ .

a) Eine Zerlegung von  $I$  ist eine endliche Menge von Punkten  $\mathcal{Z} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  mit  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Für  $k \in \{1, \dots, n\}$  ist  $I_k := [x_{k-1}, x_k]$  das  $k$ -te Teilintervall von  $I$  mit Länge  $L(I_k) := x_k - x_{k-1}$ .

b) Die Länge des größten Teilintervalls

$$\|\mathcal{Z}\| := \max \{L(I_k) \mid k \in \{1, \dots, n\}\} = \max \{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\}$$

ist die Feinheit von  $\mathcal{Z}$ .

c) Wählt man aus jedem Teilintervall einen Punkt  $\xi_k \in I_k$  ( $k \in \{1, \dots, n\}$ ) aus und fasst sie zu einem Vektor  $\Xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  zusammen, so ist die Riemann'sche Summe für  $f$  bezüglich  $\mathcal{Z}$  und Stützstellen  $\xi$  gegeben durch

$$S_f(\mathcal{Z}, \Xi) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

d)  $f$  heißt Riemann-integrierbar (über  $I = [a, b]$ ), wenn für jede Folge von Zerlegungen  $(\mathcal{Z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von  $I$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{Z}_n\| = 0$  und beliebige Stützstellen  $\Xi_n$  der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_f(\mathcal{Z}_n, \Xi_n) =: \mathcal{S} \in \mathbb{R}$  existiert und eindeutig ist. In diesem Fall schreibt man  $\mathcal{S} = \int_a^b f(x) dx$  und nennt  $\mathcal{S}$  das bestimmte Integral von  $f$  über  $[a, b]$ .

Zu Teil d) ist zu bemerken, dass der Grenzwert der Folge von Riemann-Summen nicht nur für eine bestimmte Folge von Zerlegungen mit zugehöriger Folge von Stützstellen(-Vektoren) konvergieren soll, sondern dass dies für jede beliebige Folge der Fall sein soll. Zudem soll der Grenzwert dann nicht von der konkret gewählten Folge  $(\mathcal{Z}_n, \Xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  abhängen, d.h. für alle Folgen dieser Art soll der Grenzwert gleich sein. Insbesondere soll das für Unter- und Obersumme gelten:

**Definition 8.7.** Seien  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Für ein  $n \in \mathbb{N}$  sei  $\mathcal{Z} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  eine Zerlegung von  $I$ . Seien  $m = (m_0, m_1, \dots, m_n)$  und  $M = (M_0, M_1, \dots, M_n)$  Stützvektoren mit

$$m_k := \inf \{f(x) \mid x \in I_k\}, \quad M_k := \sup \{f(x) \mid x \in I_k\}.$$

für  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Dann nennt man

$$\underline{S}_f(\mathcal{Z}) := S_f(\mathcal{Z}, m) = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) \quad \text{Untersumme von } f \text{ bzgl. } \mathcal{Z} \text{ und}$$

$$\overline{S}_f(\mathcal{Z}) := S_f(\mathcal{Z}, M) = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}) \quad \text{Obersumme von } f \text{ bzgl. } \mathcal{Z}.$$

**Beispiel 8.8** (Dirichlet-Funktion). Für  $I = [0, 1]$  sei die Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ 0, & \text{falls } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]. \end{cases}$$

Ein mathematisches Resultat besagt, dass die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  dicht in den reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  liegen, d.h. in jeder beliebig kleinen Umgebung einer Zahl  $x \in \mathbb{R}$  existiert eine Zahl  $y \in \mathbb{Q}$ .

Die Ober- und Untersumme lassen sich damit leicht berechnen: Für eine beliebige Zerlegung  $\mathcal{Z} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  von  $[0, 1]$  ist (wegen  $m_k = 0$  und  $M_k = 1$  für alle  $k$ )

$$\begin{aligned} \underline{S}_f(\mathcal{Z}) &= \sum_{k=1}^n 0 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 0, \\ \overline{S}_f(\mathcal{Z}) &= \sum_{k=1}^n 1 \cdot (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0 = 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

Für jede Folge von Zerlegungen  $(\mathcal{Z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gilt also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_f(\mathcal{Z}_n) = 0 \neq 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}_f(\mathcal{Z}_n).$$

Die Dirichlet-Funktion ist also nicht Riemann-integrierbar.

**Satz 8.9.** Für  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Das (bestimmte) Integral existiert, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (1)  $f$  ist stetig auf  $I$ ,
- (2)  $f$  ist beschränkt und besitzt nur eine endliche Anzahl von Unstetigkeitsstellen,
- (3)  $f$  ist beschränkt und monoton.

**Satz 8.10** (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). Seien  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

a) Für jedes  $c \in I$  ist die Funktion

$$F: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(z) := \int_c^z f(x) dx$$

eine Stammfunktion von  $f$ .

b) Ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ , dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Man schreibt in der Situation von Teil b) auch

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(x)|_a^b = F(x)|_{x=a}^{x=b}.$$

**Beispiel 8.11.** Die Stammfunktion von  $f(x) = \cosh x$  ist  $F(x) = \sinh x$ . Folglich gilt für beliebige  $a < b$ :

$$\int_a^b \cosh x \, dx = \sinh x \Big|_a^b = \sinh b - \sinh a.$$

Bisher haben wir bei Integralen immer Grenzen  $a < b$  angenommen. Integrale können jedoch auch für Grenzen definiert werden, die diese Bedingung nicht erfüllen:

**Definition 8.12.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ . Für eine integrierbare Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert man

$$\int_a^a f(x) \, dx := 0, \quad \int_b^a f(x) \, dx := - \int_a^b f(x) \, dx.$$

**Satz 8.13.** Für  $a, b, c \in \mathbb{R}$  mit  $a < c < b$  seien Funktionen  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben.

(1) Sind  $f$  und  $g$  integrierbar über  $[a, b]$ , so gilt für beliebige  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ :

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx + \beta \int_a^b g(x) \, dx.$$

(2) Ist  $f$  sowohl über  $[a, c]$  als auch über  $[c, b]$  integrierbar, dann ist  $f$  auch über  $[a, b]$  integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

(3) Sind  $f$  und  $g$  integrierbar über  $[a, b]$  und gilt  $f(x) \leq g(x)$  für alle  $x \in [a, b]$ , dann gilt die Ungleichung

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

(4) Ist  $f$  stetig auf  $[a, b]$ , dann gilt

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx \leq \int_a^b \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \, dx = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \cdot (b - a).$$

Ist  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt, d.h., existieren Zahlen  $m, M \in \mathbb{R}$  so dass gilt:

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a, b],$$

dann folgt mit Aussage (4) des obigen Satzes:

$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M \cdot (b - a).$$

**Satz 8.14.** Für  $a < b$  seien  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar und für alle  $x \in [a, b]$  gelte  $f(x) \leq g(x)$ . Dann besitzt die Fläche  $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$  zwischen den Graphen beider Funktionen den Flächeninhalt

$$\int_a^b (g(x) - f(x)) \, dx = \int_a^b g(x) \, dx - \int_a^b f(x) \, dx.$$

**Beispiel 8.15.** Für  $I = [0, a]$  seien  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x) = b - \frac{bx}{a}$  und  $g(x) = 0$ . Dann ist der Flächeninhalt der Fläche unter den Graphen

$$\int_0^a (f(x) - g(x)) dx = \int_0^a b - \frac{bx}{a} - 0 dx = \left[ bx - \frac{b}{2a} x^2 \right]_0^a = b \cdot (a - 0) - \frac{b}{2a} (a^2 - 0^2) = \frac{ab}{2}.$$

Dies ist auch tatsächlich der bekannte Flächeninhalt eines Dreiecks, deren Grundseite Länge  $a$  und deren Höhe Länge  $b$  hat.

**Bemerkung 8.16.** Es gibt neben dem Integralbegriff von Riemann noch weitere wie z.B. das Lebesgue'sche Integral. Gegenüber dem Riemann-Integral hat dieses unter anderem den Vorteil, dass einige nicht Riemann-integrierbare Funktionen durchaus Lebesgue-integrierbar sind. Ein Beispiel dafür ist die bereits eingeführte Dirichlet-Funktion aus Beispiel 8.8.

### Wichtige Formeln bei bestimmter Integration

**Satz 8.17** (partielle Integration). Die Funktionen  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  seien differenzierbar und  $f \cdot g'$  besitze eine Stammfunktion. Dann gilt:

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = - \int_a^b f(x)g'(x) dx + f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

**Satz 8.18** (Substitution). Die Funktion  $g: [a, b] \rightarrow I \subset \mathbb{R}$  sei differenzierbar und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  besitze eine Stammfunktion. Dann gilt:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy.$$

**Beispiel 8.19.** Wir wollen das folgende bestimmte Integral berechnen:

$$I := \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx.$$

Mit der Substitution  $y = g(x) = \ln x$  und  $g'(x) = \frac{1}{x}$  gilt

$$I = \int_1^e (g(x))^2 \cdot g'(x) dx = \int_{g(1)}^{g(e)} y^2 dy = \left[ \frac{1}{3} y^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} (1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}.$$

Taucht im Integranden in der Substitutionsformel einer der folgenden Terme auf, so bietet sich möglicherweise (ohne Garantie!) die angegebene Substitution an:

**Term**  $\sqrt{x^2 + a^2}$ : Substitution  $x := a \sinh y$  mit  $dx = a \cosh y dy$  und  $\sqrt{x^2 + a^2} = |a| \cosh y$ ,

**Term**  $\sqrt{x^2 - a^2}$ : Substitution  $x := a \cosh y$  mit  $dx = a \sinh y dy$  und  $\sqrt{x^2 - a^2} = |a \sinh y|$ ,

**Term**  $\sqrt{a^2 - x^2}$ : Substitution  $x := a \sin y$  mit  $dx = a \cos y dy$  und  $\sqrt{a^2 - x^2} = |a \cos y|$ .

### 8.3 Kurven im $\mathbb{R}^n$

**Definition 8.20.** Für ein  $n \in \mathbb{N}$  sei  $\gamma \in C^k([a, b]; \mathbb{R}^n)$ , d.h.,  $\gamma: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -mal stetig differenzierbare Abbildung.

Eine (durch  $\gamma$ ) parametrisierte Kurve  $\Gamma$  ist definiert als das Bild von  $\gamma$ :

$$\Gamma := \{\gamma(t) \mid t \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^n$$

Man nennt  $\gamma$  dann Parametrisierung oder Parameterdarstellung von  $\Gamma$ .  $\gamma(a)$  nennt man Anfangspunkt und  $\gamma(b)$  Endpunkt der Kurve  $\Gamma$  und man sagt, die Kurve sei gerichtet. Stimmen Anfangs- und Endpunkt einer Kurve überein (d.h.  $\gamma(a) = \gamma(b)$ ), dann spricht man von einer geschlossenen Kurve.

**Definition 8.21.** Sei  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  eine Kurve mit Parametrisierung

$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n): [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Die Kurve heißt glatt, wenn die Koordinatenfunktionen  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  von  $\gamma$  alle stetig differenzierbar sind und wenn zudem für alle  $t \in [a, b]$

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t)) \neq (0, \dots, 0)$$

gilt.

Ist  $\gamma(t) = c \in \Gamma$  ein Punkt der Kurve  $\Gamma$  (für ein  $t \in [a, b]$ ), dann ist der Vektor  $\gamma'(t)$  der Richtungsvektor der Tangente an die Kurve  $\Gamma$  im Punkt  $c$ .

**Beispiel 8.22.** Ein paar Beispiele für Parameterdarstellungen von Kurven:

(1) Der Graph einer stetigen Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Kurve im  $\mathbb{R}^2$ . Eine mögliche Parametrisierung ist

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

(2) Die Verbindungsstrecke zweier Punkte  $A, B \in \mathbb{R}^n$  ist eine Kurve, die man wie folgt parametrisieren kann:

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \gamma(t) = A + t(B - A).$$

Neben den Darstellungsmöglichkeiten in parametrisierter Form oder als Graph einer Funktion ist es auch möglich, eine Kurve (implizit) als Niveaulinie oder Nullstellenmenge einer Funktion zu beschreiben.

**Beispiel 8.23.** Ein Kreis mit Radius  $r > 0$  lässt sich wie folgt als geschlossene Kurve parametrisieren:

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Andererseits hat der Kreis die implizite Darstellung

$$\Gamma = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0 \}$$

und die Darstellung als Graph zweier Funktionen:

$$\Gamma = \left\{ (x, \sqrt{r^2 - x^2}) \mid x \in [-r, r] \right\} \cup \left\{ (x, -\sqrt{r^2 - x^2}) \mid x \in [-r, r] \right\}$$

## 8.4 Kurvenintegrale

Ist eine Kurve  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  gegeben, dann wollen wir beispielsweise die Länge der Kurve berechnen oder die benötigte Arbeit, um ein Objekt entlang einer Kurve durch ein Kraftfeld zu bewegen. Ersteres führt zum sog. Kurvenintegral 1. Art, letzteres zum Kurvenintegral 2. Art, auch Arbeitsintegral genannt.

Zunächst ein Hilfssatz und ein kleines nützliches Resultat:

**Satz 8.24** (Satz von Rolle). Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar. Weiterhin gelte  $f(a) = f(b)$ . Dann existiert ein  $\xi \in (a, b)$  mit  $f'(\xi) = 0$ .

*Beweis.* Nach dem Satz von Weierstraß nimmt  $f$  auf dem Intervall  $[a, b]$  Minimum und Maximum an. Entweder ist  $f$  konstant, dann ist  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in (a, b)$ . Andernfalls ist

$$\min \{ f(x) \mid x \in [a, b] \} \neq \max \{ f(x) \mid x \in [a, b] \}$$

und mindestens einer von beiden Werten wird nicht auf dem Rand des Intervalls  $[a, b]$  angenommen (wegen  $f(a) = f(b)$ ), d.h. wir haben ein lokales Extremum an einer Stelle  $\xi \in (a, b)$ . Nach Satz 7.15 gilt dort  $f'(\xi) = 0$ .  $\square$

**Satz 8.25** (Mittelwertsatz (MWS) der Differentialrechnung). Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar. Dann existiert ein  $\xi \in (a, b)$  mit  $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

*Beweis.* Wir definieren uns die Hilfsfunktion  $h(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ . An den Stellen  $a$  und  $b$  gilt  $h(a) = h(b) = 0$ . Laut dem Satz von Rolle existiert also ein  $\xi \in (a, b)$  mit  $h'(\xi) = 0$ . Berechnen wir die Ableitung von  $h$  an der Stelle  $\xi$ , so bekommen wir durch Umstellen unser gewünschtes Ergebnis.

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \implies f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$\square$

**Beispiel 8.26** (Motivationsbeispiel). Die Position einer Straße, die durch ein Gebirge führt, sei beschrieben durch eine durch  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrisierte Kurve  $\Gamma$ . Die Straße soll einen neuen Belag bekommen und dafür wollen wir die Gesamtoberfläche der Straße bestimmen. Die Straße ist nicht überall gleich breit und so wird sie in einzelne Streckenabschnitte unterteilt, deren Enden durch  $t_k, k = 0, 1, \dots, n$  bezeichnet werden, wobei  $\mathcal{Z} := \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  eine Zerlegung von  $[a, b]$  ist. Für jedes Teilstück der Straße nehmen wir an, dass die Straße annähernd gerade und gleich breit ist, sagen wir mit Breite  $f(\gamma(t))$  für  $t \in I_t = [t_{k-1}, t_k]$ . Die Länge der Straße auf dem Teilstück ist näherungsweise  $|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|$ , so dass die Oberfläche insgesamt näherungsweise  $\sum_{k=1}^n f(\gamma(t_k))|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|$  beträgt. Nach dem MWS gibt es in jedem Intervall  $I_k$  eine Stelle  $\xi_k$  mit

$$\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) = \gamma'(\xi_k)(t_k - t_{k-1}).$$

Damit können wir die Gesamtoberfläche (immer noch näherungsweise) schreiben als

$$\sum_{k=1}^n f(\gamma(\xi_k))|\gamma'(\xi_k)|(t_k - t_{k-1}).$$

Lassen wir die Zerlegung gedanklich feiner werden und ersetzen die Summe durch das Integral, dann erhalten wir die Gesamtoberfläche als  $\int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt$ , wir schreiben  $\int_{\Gamma} f ds$ .

### 8.4.1 Kurvenintegrale 1. Art

**Definition 8.27.** Für ein  $n \in \mathbb{N}$  sei eine Kurve  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  gegeben durch die Parametrisierung  $\gamma: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Sei  $\mathcal{Z} = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$  eine Zerlegung von  $[a, b]$  mit Feinheit  $\|\mathcal{Z}\|$ . Für  $k \in \{1, \dots, N\}$  sei  $\Gamma_k := \{\gamma(t) \mid t \in [t_{k-1}, t_k]\} \subset \mathbb{R}^n$  das  $k$ -te Kurvenstück und  $\xi_k \in \Gamma_k$  ein Punkt daraus. Bezeichnen wir den Stützstellenvektor mit  $\Xi := (\xi_1, \dots, \xi_N)$ . Die Riemann-Summe einer Funktion  $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  bezüglich der Kurve  $\Gamma$ , der Zerlegung  $\mathcal{Z}$  und der Stützstellen  $\Xi$  ist

$$S_f^{\Gamma}(\mathcal{Z}, \Xi) := \sum_{k=1}^N f(\xi_k) |\Gamma_k| = \sum_{k=1}^N f(\xi_k) |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|.$$

Falls für jede Folge von Zerlegungen  $(\mathcal{Z}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathcal{Z}_k\| = 0$  und zugehörigen Stützstellenvektoren  $\Xi_k$  der Grenzwert

$$S := \lim_{k \rightarrow \infty} S_f^{\Gamma}(\mathcal{Z}_k, \Xi_k) \in \mathbb{R}$$

existiert und eindeutig ist, so heißt  $S$  Kurvenintegral 1. Art von  $f$  über  $\Gamma$  und man schreibt  $S = \int_{\Gamma} f ds$ .

**Satz 8.28.** Ist  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  eine Kurve und  $f$  stetig auf  $\Gamma$ , so existiert das Kurvenintegral 1. Art von  $f$  über  $\Gamma$ .

**Satz 8.29.** Für ein  $n \in \mathbb{N}$  sei eine glatte Kurve  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  gegeben durch die Parametrisierung  $\gamma: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Sei  $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann berechnet man das Kurvenintegral 1. Art von  $f$  über  $\Gamma$  als

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)| dt = \int_a^b f(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \dots + (\gamma_n'(t))^2} dt.$$

**Beispiel 8.30.** Sei  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben durch  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \end{pmatrix}$ , d.h.  $\Gamma$  ist ein Kreis um  $(0, 0)$  mit Radius  $r$ . Sei  $f \equiv 1$ . Dann ist der Kreisumfang gegeben durch

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_0^{2\pi} 1 \cdot \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

**Definition 8.31.** Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Parametrisierung einer Kurve  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ . Die Länge der Kurve ist

$$L(\Gamma) := \sup \left\{ \sum_{k=1}^N |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \mid N \in \mathbb{N}, a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b \right\}.$$

Die Kurve heißt rektifizierbar, wenn sie eine endliche Länge hat.

**Satz 8.32.** Ist  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  stückweise stetig differenzierbar, d.h.  $f$  ist stetig auf  $[a, b]$  und mit Ausnahme von höchstens endlich vielen Punkten auch stetig differenzierbar, dann ist die Länge der durch  $\gamma$  parametrisierten Kurve  $\Gamma$  gegeben durch

$$L(\Gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(\gamma'_1(t))^2 + \dots + (\gamma'_n(t))^2} dt.$$

**Bemerkung 8.33.** Das Kurvenintegral 1. Art hängt nicht von der Parametrisierung der Kurve ab. Zudem hängt es nicht von der Richtung ab, in der die Kurve durchlaufen wird.

**Satz 8.34.** a) Seien  $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbb{R}^n$  Kurven, wobei der Endpunkt von  $\Gamma_1$  mit dem Anfangspunkt von  $\Gamma_2$  übereinstimmen soll. Sei  $\Gamma := \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  die aus beiden Kurven zusammengesetzte Kurve. Ist  $f$  sowohl auf  $\Gamma_1$  als auch auf  $\Gamma_2$  definiert, dann gilt für die Kurvenintegrale 1. Art

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_{\Gamma_1} f ds + \int_{\Gamma_2} f ds.$$

b) Sind  $f$  und  $g$  stetige reellwertige Funktionen auf einer Kurve  $\Gamma$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  Konstanten, dann gilt

$$\int_{\Gamma} (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \int_{\Gamma} f ds + \beta \int_{\Gamma} g ds.$$

c) Ist  $\Gamma$  eine rektifizierbare Kurve und  $f$  eine auf  $\Gamma$  stetige reellwertige Funktion, dann gilt die Abschätzung

$$\left| \int_{\Gamma} f ds \right| \leq \int_{\Gamma} \max \{ |f(x)| \mid x \in \Gamma \} ds = \max \{ |f(x)| \mid x \in \Gamma \} \cdot L(\Gamma).$$

### 8.4.2 Kurvenintegrale 2. Art

Das Kurvenintegral 1. Art hängt nicht von der Richtung ab, in der die Kurve durchlaufen wird. Dies ist gut so, denn die Länge einer Laufbahn ändert sich auch nicht, wenn ich in entgegengesetzter Richtung laufe. Betrachten wir hingegen die notwendige Arbeit um ein Flugzeug von Berlin nach Amsterdam zu bewegen, so wird sie nicht identisch sein mit dem Rückflug, wobei wir annehmen, dass die Routen (d.h. die geflogene Kurve) identisch sind, jedoch der Wind konstant aus einer Richtung weht. Das Kurvenintegral 2. Art hängt in der Regel von der Art ab, wie eine Kurve durchlaufen wird.

Erinnern wir uns zunächst daran, dass ein Vektorfeld  $g: C \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  einem jeden Punkt  $x \in C \subset \mathbb{R}^n$  einen Vektor  $g(x) \in \mathbb{R}^n$  zuordnet. Zunächst beschreiben wir das Kurvenintegral 2. Art analog zu Def. 8.27 und Satz 8.28.

**Definition 8.35.** Für ein  $n \in \mathbb{N}$  sei eine Kurve  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  gegeben durch die Parametrisierung  $\gamma: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Sei  $\mathcal{Z} = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$  eine Zerlegung von  $[a, b]$  mit Feinheit  $\|\mathcal{Z}\|$ . Für  $k \in \{1, \dots, N\}$  sei  $\Gamma_k := \{\gamma(t) \mid t \in [t_{k-1}, t_k]\} \subset \mathbb{R}^n$  das  $k$ -te Kurvenstück und  $\xi_k \in \Gamma_k$  ein Punkt daraus. Bezeichnen wir den Stützstellenvektor mit  $\Xi := (\xi_1, \dots, \xi_N)$ . Die Riemann-Summe eines Vektorfeldes  $g: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  bezüglich der Kurve  $\Gamma$ , der Zerlegung  $\mathcal{Z}$  und der Stützstellen  $\Xi$  ist

$$S_g^\Gamma(\mathcal{Z}, \Xi) := \sum_{k=1}^N g(\xi_k) \cdot (\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})).$$

Falls für jede Folge von Zerlegungen  $(\mathcal{Z}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathcal{Z}_k\| = 0$  und zugehörigen Stützstellenvektoren  $\Xi_k$  der Grenzwert

$$S := \lim_{k \rightarrow \infty} S_g^\Gamma(\mathcal{Z}_k, \Xi_k) \in \mathbb{R}$$

existiert und eindeutig ist, so heißt  $S$  Kurvenintegral 2. Art von  $g$  über  $\Gamma$  und man schreibt  $S = \int_\Gamma g \cdot dx$ .

**Satz 8.36.** Ist  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  eine Kurve und  $g: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig, so existiert das Kurvenintegral 2. Art von  $g$  über  $\Gamma$ .

**Satz 8.37.** Für ein  $n \in \mathbb{N}$  sei eine glatte gerichtete Kurve  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  gegeben durch die Parametrisierung  $\gamma: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Sei  $g: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Dann berechnet man das Kurvenintegral 2. Art von  $g$  über  $\Gamma$  als

$$\int_\Gamma g \cdot dx = \int_a^b g(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b g_1(\gamma(t))\gamma'_1(t) + \dots + g_n(\gamma(t))\gamma'_n(t) dt.$$

**Beispiel 8.38.** Gegeben seien das Vektorfeld  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $g(x, y) := \begin{pmatrix} y \\ x - y \end{pmatrix}$  und die Kurve  $\Gamma_1 \subset \mathbb{R}^2$  mit Parametrisierung

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}.$$

Das Kurvenintegral 2. Art von  $g$  über  $\Gamma_1$  ist damit

$$\int_{\Gamma_1} g \cdot dx = \int_0^1 \begin{pmatrix} t \\ t-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 t \cdot 1 + 0 \cdot 1 dt = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Wählen wir eine andere Parametrisierung: Wir durchlaufen die Kurve (nennen wir sie  $\Gamma_2$ ) in entgegengesetzter Richtung mit doppelter Geschwindigkeit:

$$\tilde{\gamma}: \left[0, \frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \tilde{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1-2t \\ 1-2t \end{pmatrix}.$$

Die gleiche Rechnung wie eben ergibt jetzt

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} g \cdot dx &= \int_0^{1/2} \begin{pmatrix} 1-2t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} dt = \int_0^{1/2} (1-2t) \cdot (-2) dt = \int_0^{1/2} 4t - 2 dt \\ &= 2t^2 - 2t \Big|_0^{1/2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Der Betrag des Integrals hat sich nicht geändert, jedoch das Vorzeichen.

Wählen wir eine andere Kurve,  $\Gamma_3$ , die den gleichen Anfangs- und Endpunkt hat wie  $\Gamma_1$ :

$$\hat{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \hat{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Das Kurvenintegral 2. Art von  $g$  über  $\Gamma_3$  ist damit

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} g \cdot dx &= \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ t-t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt = \int_0^1 t^2 \cdot 1 + (t-t^2) \cdot 2t dt \\ &= \int_0^1 3t^2 - 2t^3 dt = t^3 - \frac{1}{2} t^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Bemerkung 8.39.** Das Kurvenintegral 2. Art hängt in der Regel von der Richtung ab, in der die Kurve durchlaufen wird. Man betrachtet daher gerichtete Kurven. Das Integral hängt jedoch nicht von der Parametrisierung der Kurve ab.

**Satz 8.40.** Seien  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  eine gerichtete Kurve mit Anfangspunkt  $A$  und Endpunkt  $B$  und  $g: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetiges Vektorfeld. Sei zudem  $\Gamma'$  die von  $B$  nach  $A$  durchlaufene Kurve  $\Gamma$ . Dann gilt

$$\int_{\Gamma'} g \cdot dx = - \int_{\Gamma} g \cdot dx.$$

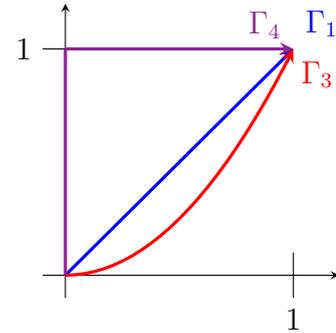
Ist eine Kurve aus zwei Teilstücken zusammengesetzt, dann berechnet man das Kurvenintegral durch Addition der Kurvenintegrale über beiden Teilstücken.

**Beispiel 8.41.** Sei wieder  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $g(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x - y \end{pmatrix}$  gegeben. Die Kurve  $\Gamma_4 \subset \mathbb{R}^2$  setzt sich zusammen aus  $\Gamma_4^1$  und  $\Gamma_4^2$  mit den Parametrisierungen

$$\gamma_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad \gamma_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das zugehörige Kurvenintegral 2. Art ist also

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_4} g \cdot dx &= \int_0^1 g(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) dt + \int_0^1 g(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) dt \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 \\ t - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 -t + 1 dt \\ &= t - \frac{1}{2}t^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



Das Die Kurvenintegrale  $\int_{\Gamma_1} g \cdot dx$  und  $\int_{\Gamma_3} g \cdot dx$  und  $\int_{\Gamma_4} g \cdot dx$  stimmen überein trotz unterschiedlicher Wege. Dies ist in der Regel nicht der Fall. Die Ausnahme bilden exakte Vektorfelder – so auch obiges Beispiel.

**Satz 8.42.** Sei  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  eine Kurve mit Anfangspunkt  $A$  und Endpunkt  $B$ . Sei  $g: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein exaktes Vektorfeld, d.h. es existiert eine Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\nabla f = g$ , genannt das Potential von  $g$ .

Dann ist das Kurvenintegral 2. Art von  $g$  über  $\Gamma$  wegunabhängig, d.h. für jede beliebige Kurve  $\tilde{\Gamma} \subset \mathbb{R}^n$ , die ebenfalls Anfangspunkt  $A$  und Endpunkt  $B$  besitzt, gilt

$$\int_{\Gamma} g \cdot dx = \int_{\tilde{\Gamma}} g \cdot dx = f(B) - f(A).$$

**Beispiel 8.43.** Das exakte Vektorfeld  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $g(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x - y \end{pmatrix}$  hat das Potential  $f(x, y) = xy - \frac{1}{2}y^2$ . Die Endpunkte der Kurven  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_3$  und  $\Gamma_4$  sind  $A = (0, 0)$  und  $B = (1, 1)$ . In der Tat gilt für alle gerichteten Kurven  $\Gamma$ , die diese zwei Punkte verbinden:

$$\int_{\Gamma} g \cdot dx = f(1, 1) - f(0, 0) = \frac{1}{2}.$$

Stimmen Anfangs- und Endpunkt überein, verschwindet das Kurvenintegral von exakten Vektorfeldern:

**Satz 8.44.** Seien  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  eine geschlossene Kurve und  $g: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein exaktes Vektorfeld. Dann ist  $\int_{\Gamma} g \cdot dx = 0$ .

Ist  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  eine geschlossene Kurve, so schreibt man auch  $\oint_{\Gamma} g \cdot dx$  und spricht von einem Ringintegral.

## 9 Integralrechnung II

### 9.1 Integration rationaler Funktionen

**Definition 9.1.** Sei  $M \subset \mathbb{R}$ . Eine Funktion  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt rational, falls Polynome  $p, q: M \rightarrow \mathbb{R}$  existieren, so dass  $q(x) \neq 0$  und  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  für alle  $x \in M$ . Falls der Grad von  $p$  echt kleiner ist als der von  $q$ , so heißt  $f$  echt gebrochenrational, andernfalls heißt  $f$  unecht gebrochenrational.

**Bemerkung 9.2.** Jede unecht gebrochenrationale Funktion  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  lässt sich als Summe eines Polynoms (in diesem Kontext auch ganzrationale Funktion genannt) und einer echt gebrochenrationalen Funktion darstellen. Dazu führt man eine Polynomdivision durch. Dabei erhält man

$$p(x) : q(x) = r_1(x) + \frac{r_2(x)}{q(x)} = r_1(x) \text{ Rest } r_2(x),$$

wobei  $r_1$  und  $r_2$  wieder Polynome sind und der Grad von  $r_2$  echt kleiner als der von  $q$  ist. Damit kann man  $f$  wie folgt schreiben:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{r_1(x) \cdot q(x) + r_2(x)}{q(x)} = r_1(x) + \frac{r_2(x)}{q(x)}.$$

Ziel dieses Abschnitts ist die Berechnung der Integrale (reeller) rationaler Funktionen. Obige Definition und auch die folgende Methode der Partialbruchzerlegung lassen sich auf komplexe rationale Funktionen verallgemeinern.

**Satz 9.3** (Partialbruchzerlegung reeller rationaler Funktionen). Seien  $p, q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  reelle Polynome, wobei der Grad von  $p$  echt kleiner sei als der Grad von  $q$ . Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  die reellen Nullstellen von  $q$  mit Vielfachheit  $n_1, \dots, n_r$  und seien  $\xi_1, \dots, \xi_s$  und  $\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_s$  die echt komplexen Nullstellen von  $q$  mit Vielfachheit  $N_1, \dots, N_s$ . Dann existieren eindeutige Koeffizienten  $A_{jk} \in \mathbb{R}$  und  $C_{jk} \in \mathbb{C}$ , so dass für  $x \in \{z \in \mathbb{R} \mid q(z) \neq 0\}$  gilt:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{n_j} \frac{A_{jk}}{(x - \lambda_j)^k} + \sum_{l=1}^s \sum_{k=1}^{N_l} \left( \frac{C_{lk}}{(x - \xi_l)^k} + \frac{\bar{C}_{lk}}{(x - \bar{\xi}_l)^k} \right).$$

**Beispiel 9.4.**

$$f(x) := \frac{2x^3 + 2x^2 + 2x - 2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{x - i} + \frac{1}{x + i} + \frac{1}{(x - i)^2} + \frac{1}{(x + i)^2},$$

$$g(x) := \frac{2x - 1}{(x - 1)^2} = \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}.$$

#### Berechnung der Koeffizienten

1. Bestimmung aller ( $M$ ) verschiedenen Nullstellen  $z_j$  von  $q$  (sowohl reell als auch komplex) mit ihrer jeweiligen Vielfachheit  $m_j$ ,
2. Ansatz

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{m_j} \frac{B_{jk}}{(x - z_j)^k}, \quad (9.1)$$

- Multiplikation der rechten Seite von (9.1) mit  $q(x)$  zu einem Polynom  $\tilde{p}(x)$ ,
- Koeffizientenvergleich von  $\tilde{p}(x)$  mit  $p(x)$ .

**Beispiel 9.5.** Oben genannte Schritte wenden wir auf  $g$  aus Beispiel 9.4 an:

- Es sind  $p(x) = 2x - 1$  und  $q(x) = (x - 1)^2$ . Die einzige Nullstelle von  $q$  ist  $z_1 = 1$ , ihre Vielfachheit ist  $m_1 = 2$ . Damit ist  $M = 1$  in (9.1).
- Ansatz:  $g(x) = \frac{B_{11}}{(x-1)} + \frac{B_{12}}{(x-1)^2}$ .
- $\tilde{p}(x) = (x - 1)^2 \cdot \left[ \frac{B_{11}}{(x-1)} + \frac{B_{12}}{(x-1)^2} \right] = B_{11}(x - 1) + B_{12} = B_{11}x + (B_{12} - B_{11})$ .
- Koeffizientenvergleich:

$$2x - 1 = B_{11}x + (B_{12} - B_{11})$$

$$\iff \begin{cases} 2 &= B_{11} \\ -1 &= B_{12} - B_{11} \end{cases},$$

führt zu  $B_{11} = 2$  und  $B_{12} = B_{11} - 1 = 1$ , also  $g(x) = \frac{2}{(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2}$ .

**Bemerkung 9.6.** Für die Koeffizienten  $B_{jm_j}$  gibt es die alternative Berechnungsmethode

$$B_{jm_j} = \lim_{x \rightarrow z_j} \left( \frac{p(x)}{q(x)} (x - z_j)^{m_j} \right) = \lim_{x \rightarrow z_j} \frac{p(x)}{\prod_{i \neq j} (x - z_i)^{m_i}}.$$

Im Beispiel von oben sieht das so aus:

$$B_{12} = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2x - 1}{(x - 1)^2} (x - 1)^2 \right) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1) = 1.$$

## Integration rationaler Funktionen

Die Berechnung eines Integrals vom Typ  $\int f(x)dx$  für  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  geschieht in folgenden Schritten:

- Falls  $f$  keine echt gebrochenrationale Funktion ist, gehe nach Bemerkung 9.2 vor und schreibe  $f(x) = r_1(x) + \frac{r_2(x)}{q(x)}$  für Polynome  $r_1, r_2$ , wobei der Grad von  $r_2$  echt kleiner ist als der Grad von  $q$ .
- $\int f(x)dx = \int r_1(x)dx + \int \frac{r_2(x)}{q(x)}dx$  – das erste Integral der rechten Seite lässt sich leicht berechnen, auf das zweite wendet man Partialbruchzerlegung an.
- Berechnung der so entstehenden Integrale mit Hilfe folgender Stammfunktionen:

$$\int x^k dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1} + C, \quad k \geq 0,$$

$$\int \frac{1}{x-z} dx = \begin{cases} \ln|x-z| + C, & z \in \mathbb{R}, \\ i \arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + \ln|x-z| + C, & z = a + ib, b \neq 0, \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{(x-z)^k} = \frac{-1}{(k-1)(x-z)^{k-1}} + C, \quad k \in \mathbb{N}_{>1}, z \in \mathbb{C}.$$

Bei reellen Funktionen kann man auch die Partialbruchzerlegung so durchführen, dass man nur alle reellen Nullstellen von  $q$  sucht und  $q$  in die entsprechenden linearen und quadratischen Faktoren zerlegt. Die quadratischen Faktoren sind dabei immer das Produkt zweier konjugierter komplexer Lösungen: Für  $z = a + ib$  ist dann

$$\begin{aligned}(x - z) \cdot (x - \bar{z}) &= x^2 - x \cdot (z + \bar{z}) + z\bar{z} \\ &= x^2 - (a + ib + a - ib) \cdot x + (a + ib)(a - ib) \\ &= x^2 - 2a \cdot x + a^2 + b^2 \\ &= (x^2 - 2a \cdot x + a^2) + b^2 \\ &= (x - a)^2 + b^2 \\ &= (x - \operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2.\end{aligned}$$

So wird aus zwei Integralen mit komplexen Zahlen im Nenner des Integranden ein Integral mit ausschließlich reellen Zahlen als Koeffizienten:

$$\begin{aligned}\int \frac{A}{x - z} + \frac{\bar{A}}{x - \bar{z}} dx &= \int \frac{A(x - \bar{z}) + \bar{A}(x - z)}{(x - z)(x - \bar{z})} = \int \frac{(A + \bar{A})x - (A\bar{z} + \bar{A}z)}{(x - \operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} \\ &= \int \frac{(A + \bar{A})x - (A\bar{z} + \bar{A}z)}{(x - \operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \int \frac{2 \operatorname{Re} A \cdot x - 2 \operatorname{Re}(A\bar{z})}{(x - \operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}\end{aligned}$$

Dafür benötigen wir noch folgende Stammfunktion für einfache Nullstellen

$$\int \frac{cx + d}{(x - a)^2 + b^2} = \frac{c}{2} \ln[(x - a)^2 + b^2] + \frac{ca + d}{b} \arctan\left(\frac{x - a}{b}\right) + C,$$

sowie für mehrfache Nullstellen folgende Stammfunktionen, sofern  $k > 1$  und  $4c - b^2 > 0$  sind:

$$\begin{aligned}\int \frac{Ax + B}{(x^2 + bx + c)^k} dx &= \frac{-A}{2(k - 1)(x^2 + bx + c)^{k-1}} + \left(B - \frac{Ab}{2}\right) \int \frac{1}{(x^2 + bx + c)^k} dx, \\ \int \frac{1}{(x^2 + bx + c)^k} dx &= \frac{2x + b}{(k - 1)(4c - b^2)(x^2 + bx + c)^{k-1}} \\ &\quad + \frac{2(2k - 3)}{(k - 1)(4c - b^2)} \int \frac{1}{(x^2 + bx + c)^{k-1}} dx.\end{aligned}$$

Hierbei ist  $C$  die additive Konstante des unbestimmten Integrals und hat nichts mit  $a, b, c, d$  zu tun.

**Beispiel 9.7.** Betrachten wir die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^3 + 2x^2 + 2x - 2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{x - i} + \frac{1}{x + i} + \frac{1}{(x - i)^2} + \frac{1}{(x + i)^2}$$

aus Beispiel 9.4.

Berechnen wir die Stammfunktion von  $f$  zunächst mit Hilfe dieser komplexen Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned}
 \int f(x)dx &= \int \frac{1}{x-i}dx + \int \frac{1}{x+i}dx + \int \frac{1}{(x-i)^2}dx + \int \frac{1}{(x+i)^2}dx \\
 &= i \arctan x + \ln|x-i| + i \arctan(-x) + \ln|x+i| + \frac{-1}{x-i} + \frac{-1}{x+i} + C \\
 &= i \arctan x - i \arctan x + \ln|x-i| + \ln|x+i| + \frac{-(x+i) - (x-i)}{(x-i)(x+i)} + C \\
 &= \ln\sqrt{x^2+1} + \ln\sqrt{x^2+1} + \frac{-2x}{x^2+1} + C \\
 &= 2\ln\sqrt{x^2+1} - \frac{2x}{x^2+1} + C \\
 &= \ln(x^2+1) - \frac{2x}{x^2+1} + C.
 \end{aligned}$$

wegen  $\arctan(-x) = -\arctan(x)$ ,  $|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$  und  $\ln(x^a) = a \ln(x)$ .

Durch Zusammenfassen der komplexen Nullstellen  $i$  und  $-i$  haben wir folgenden Ansatz für eine reelle Partialbruchzerlegung:

$$\frac{2x^3 + 2x^2 + 2x - 2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{ax + b}{x^2 + 1} + \frac{cx + d}{(x^2 + 1)^2}.$$

Durch Gleichnamigmachen der Brüche und Multiplikation mit dem Nenner erhalten wir

$$\begin{aligned}
 2x^3 + 2x^2 + 2x - 2 &= (ax + b)(x^2 + 1) + (cx + d) \\
 &= ax^3 + bx^2 + (a + c)x + (b + d).
 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt  $a = 2$ ,  $b = 2$ ,  $c = 0$  und  $d = -4$ , d.h.

$$f(x) = \frac{2x^3 + 2x^2 + 2x - 2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x + 2}{x^2 + 1} - \frac{4}{(x^2 + 1)^2}.$$

Damit können wir die Stammfunktion von  $f$  berechnen (mit  $x^2 + 1 = (x - 0)^2 + 1^2$ ):

$$\begin{aligned}
 \int f(x)dx &= \int \frac{2x+2}{x^2+1}dx - \int \frac{4}{(x^2+1)^2}dx \\
 &= \frac{2}{2} \ln(x^2+1) + \frac{2 \cdot 0 + 2}{1} \arctan(x - 0 \cdot 1) - \left[ 2 \arctan x + \frac{2x}{x^2+1} \right] + C \\
 &= \ln(x^2+1) + 2 \arctan x - 2 \arctan x - \frac{2x}{x^2+1} + C \\
 &= \ln(x^2+1) - \frac{2x}{x^2+1} + C,
 \end{aligned}$$

wobei wir das zweite Integral mit obiger Reduktionsformel berechnet haben ( $b = 0, c = 1, k = 2$ ):

$$\begin{aligned}
 \int \frac{4}{(x^2+1)^2}dx &= 4 \left[ \frac{2x}{4 \cdot (x^2+1)} + \frac{2}{4} \int \frac{1}{x^2+1}dx \right] \\
 &= \frac{2x}{x^2+1} + 2 \int \frac{1}{x^2+1}dx \\
 &= \frac{2x}{x^2+1} + 2 \arctan x + C.
 \end{aligned}$$

## 9.2 Uneigentliche Integrale

**Definition 9.8.** Sei  $M \subset \mathbb{R}$  ein (möglicherweise unbeschränktes) Intervall. Sei  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die über jedem Intervall  $[a, b] \subset M$  (Riemann-)integrierbar ist. Seien  $A, B \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  mit  $A, B \notin M$  und seien  $a, b \in M$ . Man definiert uneigentliche Integrale wie folgt:

$$\text{für } M = [a, B) \quad \int_a^B f(x) dx := \lim_{b \rightarrow B-} \int_a^b f(x) dx,$$

$$\text{für } M = (A, b] \quad \int_A^b f(x) dx := \lim_{a \rightarrow A+} \int_a^b f(x) dx,$$

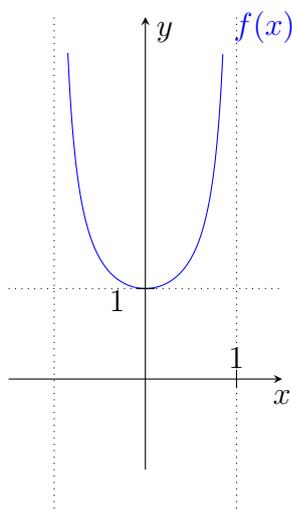
$$\text{für } M = (A, B) \quad \int_A^B f(x) dx := \lim_{a \rightarrow A+} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow B-} \int_c^b f(x) dx, \quad \text{für ein } c \in M.$$

Falls die Grenzwerte existieren und endlich sind, so nennt man die Integrale auf der linken Seite konvergent, andernfalls heißen sie divergent.

**Beispiel 9.9.** Das Integral  $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$  ist konvergent. Sei  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

Wegen  $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +1-} f(x) = \infty$  ist dies ein uneigentliches Integral (3. Typ in Def. 9.8). Per Definition und mit Substitution  $x = \sin u$  (und  $dx = \cos u du$ ) berechnet man:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{-1+\varepsilon}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\arcsin(-1+\varepsilon)}^{\arcsin(0)} \frac{\cos u}{\sqrt{1-\sin(u)^2}} du + \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\arcsin(0)}^{\arcsin(1-\varepsilon)} \frac{\cos u}{\sqrt{1-\sin(u)^2}} du \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\arcsin(-1+\varepsilon)}^{\arcsin(0)} 1 du + \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\arcsin(0)}^{\arcsin(1-\varepsilon)} 1 du \\ &= \left[ \arcsin 0 - \lim_{\varepsilon \searrow 0} \arcsin(-1+\varepsilon) \right] + \left[ \lim_{\varepsilon \searrow 0} \arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0 \right] \\ &= \left[ 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] + \left[ \frac{\pi}{2} - 0 \right] \\ &= \pi. \end{aligned}$$



**Definition 9.10.** Besitzt  $f: M \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  im Intervall  $[a, b] \subset M$  mehrere Unstetigkeitsstellen  $a < c_1 < c_2 < \dots < c_n < b$ , so definiert man

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \dots + \int_{c_n}^b f(x) dx.$$

**Beispiel 9.11.** Sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein beschränktes abgeschlossenes Intervall. Sei

$$f(x) := \mathbb{1}_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ziel ist die Berechnung des uneigentlichen Integrals  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ . Die Unstetigkeitsstellen von  $f$  sind  $a$  und  $b$ , d.h. per Definition ist

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^b f(x) dx + \int_b^{\infty} f(x) dx \\ &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^B \underbrace{f(x)}_{=0} dx + \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_B^{a-\varepsilon} \underbrace{f(x)}_{=0} dx + \int_a^b \underbrace{f(x)}_{=1} dx \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{b+\varepsilon}^C \underbrace{f(x)}_{=0} dx + \lim_{D \rightarrow \infty} \int_C^D \underbrace{f(x)}_{=0} dx \\ &= \int_a^b 1 dx = b - a. \end{aligned}$$

**Satz 9.12** (Integralvergleichskriterium). Sei  $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$  eine monoton fallende Funktion. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert} \iff \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ konvergiert.}$$

**Beispiel 9.13.** Sei  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Dann ist

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_1^B \frac{1}{x} dx = \lim_{B \rightarrow \infty} [\ln x]_1^B = \lim_{B \rightarrow \infty} (\ln B - \ln 1) = \lim_{B \rightarrow \infty} \ln B = \infty.$$

In der Tat divergiert auch die harmonische Reihe, d.h.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ , denn die Folge ihrer Partialsummen  $s_N := \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$  ( $N \in \mathbb{N}$ ) ist unbeschränkt:

$$\begin{aligned} s_N &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \frac{1}{N} \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \frac{1}{N} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N}, \end{aligned}$$

d.h.  $s_{2^k} \geq 1 + k \cdot \frac{1}{2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ .

### 9.3 Integration komplexwertiger Funktionen

**Definition 9.14.** Seien  $f_1, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  reelle Funktionen. Die komplexwertige Funktion  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $g(x) := f_1(x) + if_2(x)$  heißt auf  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  integrierbar, falls  $f_1$  und  $f_2$  auf  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  integrierbar sind. Man definiert in diesem Fall

$$\int_a^b g(x)dx := \int_a^b f_1(x)dx + i \int_a^b f_2(x)dx.$$

**Beispiel 9.15.** Die rationale Funktion  $\frac{1}{x-\xi}$  für  $\xi \in \mathbb{C}$  hat die (kartesische) Darstellung

$$\begin{aligned} \frac{1}{x - (a + ib)} &= \frac{1}{(x - a) + i \cdot (-b)} = \frac{x - a}{(x - a)^2 + (-b)^2} - \frac{-b}{(x - a)^2 + (-b)^2} \cdot i \\ &= \frac{x - a}{(x - a)^2 + b^2} + \frac{b}{(x - a)^2 + b^2} \cdot i, \end{aligned}$$

wenn  $\xi = a + ib$  und  $x \in \mathbb{R}$  ist. Daraus ergibt sich die Stammfunktion

$$\begin{aligned} &\int \frac{1}{x - (a + ib)} dx \\ &= \int \frac{x - a}{(x - a)^2 + b^2} dx + i \int \frac{b}{(x - a)^2 + b^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln [(x - a)^2 + b^2] + \frac{a - a}{b} \arctan \left( \frac{x - a}{b} \right) + i \left[ \frac{0}{2} \ln [\dots] + \frac{b}{b} \arctan \left( \frac{x - a}{b} \right) \right] \\ &= \ln |x - (a + ib)| + i \left[ \arctan \left( \frac{x - a}{b} \right) \right], \end{aligned}$$

da  $|x - (a + ib)| = \sqrt{(x - a)^2 + b^2}$  und  $\frac{1}{2} \ln |z|^2 = \ln |z|$  ist.

**Beispiel 9.16.** Nach der Euler'schen Formel (Satz 3.12) ist  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  für  $x \in \mathbb{R}$ . Damit ist

$$\begin{aligned} \int e^{ix} dx &= \int \cos x dx + i \int \sin x dx \\ &= \sin x + i(-\cos x) + C \\ &= i(-i \sin x - \cos x) + C \\ &= -i(\cos x + i \sin x) + C \\ &= -ie^{ix} + C \\ &= \frac{1}{i} e^{ix} + C. \end{aligned}$$

Analog berechnet man die Stammfunktion  $\int e^{inx} dx = \frac{1}{in} e^{inx} + C$  für  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

Komplexwertige Funktionen werden u.a. bei der Fourier-Transformation integriert. Ist  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  auf ganz  $\mathbb{R}$  integrierbar, so ist die Fourier-Transformierte  $\mathcal{F}f$  von  $f$  gegeben als  $(\mathcal{F}f)(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy} dx$  (ggf. mit veränderter Normierung je nach Anwendungsbereich, Anpassung bei vektorwertiger Funktion). Anwendungsbereiche sind u.a. Signalverarbeitung, Spektralanalyse, Quantenmechanik.

**Beispiel 9.17.** Die Fourier-Transformierte von  $f(x) = e^{-|x|}$  ist

$$(\mathcal{F}f)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy-|x|} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+y^2},$$

denn mit

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

und geeigneter Substitution ( $z = 1 - iy$  bzw.  $z = -1 - iy$ ) erhält man:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy-|x|} dx &= \int_{-\infty}^0 e^{-ixy-|x|} dx + \int_0^{\infty} e^{-ixy-|x|} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{-ixy+x} dx + \int_0^{\infty} e^{-ixy-x} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(1-iy)x} dx + \int_0^{\infty} e^{(-1-iy)x} dx \\ &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^0 e^{(1-iy)x} dx + \lim_{B \rightarrow \infty} \int_0^B e^{(-1-iy)x} dx \\ &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-iy} \int_A^0 (1-iy)e^{(1-iy)x} dx + \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{1}{-1-iy} \int_0^B (-1-iy)e^{(-1-iy)x} dx \\ &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-iy} \int_{(1-iy)A}^0 e^z dz + \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{1}{-1-iy} \int_0^{-(1+iy)B} e^z dz \\ &= \frac{1}{1-iy} \lim_{A \rightarrow -\infty} (1 - e^{(1-iy)A}) - \frac{1}{1+iy} \lim_{B \rightarrow \infty} (e^{-(1+iy)B} - 1) \\ &= \frac{1}{1-iy} + \frac{1}{1+iy} \\ &= \frac{(1+iy) + (1-iy)}{(1-iy)(1+iy)} \\ &= \frac{2}{1+y^2}. \end{aligned}$$

Für den Grenzwert:  $e^{(1-iy)A} = e^A \cdot e^{i \cdot (-yA)}$  und  $|e^{i \cdot (-yA)}| = 1$ , so dass wegen  $\lim_{A \rightarrow -\infty} e^A = 0$  auch das Produkt gegen Null konvergiert, d.h.  $\lim_{A \rightarrow -\infty} e^{(1-iy)A} = 0$ . Für  $B$  argumentiert man analog.

## 9.4 Flächen- und Raumintegrale

Ziel dieses Abschnitts ist die Definition und Berechnung von Integralen der Form  $\int_A f(x)dx$  für Mengen  $A \subset \mathbb{R}^n$  und  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ .

Ist  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} = [a, b]$ , dann ist bekanntlich

$$\int_A f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

**Definition 9.18.** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  für  $n \in \{2, 3\}$ . Die Menge  $A$  heißt Normalbereich, falls

$n = 2$ :  $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$  und stetige Funktionen  $a_2, b_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  existieren, so dass

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 \leq x \leq b_1, a_2(x) \leq y \leq b_2(x)\}.$$

$n = 3$ :  $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ , stetige Funktionen  $a_2, b_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $a_3, b_3: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  existieren, so dass

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 \leq x \leq b_1, a_2(x) \leq y \leq b_2(x), a_3(x, y) \leq z \leq b_3(x, y)\}.$$

**Beispiel 9.19.** Sei  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Dies ist ein Normalbereich, denn

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}.$$

**Satz 9.20.** Ist  $A \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \in \{2, 3\}$ ) ein Normalbereich und  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  über  $A$  integrierbar, so berechnet man das Integral  $\int_A f(x)dx$  wie folgt:

$n = 2$ : Ist  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 \leq x \leq b_1, a_2(x) \leq y \leq b_2(x)\}$ , so ist

$$\int_A f(x, y)d(x, y) = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2(x)}^{b_2(x)} f(x, y)dy \right) dx.$$

$n = 3$ : Ist  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 \leq x \leq b_1, a_2(x) \leq y \leq b_2(x), a_3(x, y) \leq z \leq b_3(x, y)\}$ , so ist

$$\int_A f(x, y, z)d(x, y, z) = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2(x)}^{b_2(x)} \left( \int_{a_3(x, y)}^{b_3(x, y)} f(x, y, z)dz \right) dy \right) dx.$$

(Stückweise) stetige Funktionen sind über beschränkten Normalbereichen integrierbar.

**Beispiel 9.21.** Sei  $A \subset \mathbb{R}^2$  wie in Beispiel 9.19. Integrieren wir über  $A$  die konstante Funktion  $f(x) \equiv 1$ . Dann ist (mit Subst.  $x = \sin u$ ,  $dx = \cos u du$ )

$$\begin{aligned} \int_A f(x, y)d(x, y) &= \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left( \sqrt{1-x^2} - (-\sqrt{1-x^2}) \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 2\sqrt{1-x^2} dx \\ &= \int_{\arcsin(-1)}^{\arcsin(1)} 2\sqrt{1-(\sin u)^2} \cos u du \\ &= \int_{\arcsin(-1)}^{\arcsin(1)} 2(\cos u)^2 du \end{aligned}$$

Analog zu Übungsaufgabe 9.2b) berechnet man die Stammfunktion

$$\int (\cos u)^2 du = \frac{1}{2} (u + \sin u \cos u)$$

und erhält (mit  $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$ ,  $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$  und  $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ )

$$\begin{aligned} \int_A f(x, y) d(x, y) &= [u + \sin u \cos u]_{\arcsin(-1)}^{\arcsin(1)} \\ &= \arcsin(1) - \arcsin(-1) + 1 \cdot \cos(\arcsin(1)) - (-1) \cdot \cos(\arcsin(-1)) \\ &= 2 \arcsin(1) + \cos(\arcsin(1)) + \cos(\arcsin(-1)) \\ &= 2 \arcsin(1) + \sqrt{1-1^2} + \sqrt{1-(-1)^2} \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Dies ist der Flächeninhalt des Einheitskreises.

**Lemma 9.22.** Der Flächeninhalt einer Menge  $A \subset \mathbb{R}^2$  ist  $\int_A 1 d(x, y)$  und das Volumen einer Menge  $B \subset \mathbb{R}^3$  ist  $\int_B 1 d(x, y, z)$ .

**Satz 9.23.** Seien  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  mit  $A \cap B = \emptyset$  und seien  $f: A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: A \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Zudem sei  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Falls die auftretenden Integrale existieren, so gelten folgende Beziehungen:

i)  $\int_A f(x) + g(x) dx = \int_A f(x) dx + \int_A g(x) dx,$

ii)  $\int_A \alpha f(x) dx = \alpha \int_A f(x) dx,$

iii)  $\int_{A \cup B} f(x) dx = \int_A f(x) dx + \int_B f(x) dx.$

Mit Hilfe von iii) lassen sich auch Integrale der Form  $\int_A f(x) dx$  berechnen für Mengen, die kein Normalbereich sind. Unbeschränkte Bereiche (z.B.  $\mathbb{R}^2$ ) sind Beispiele für Mengen, die keine Normalbereiche sind.

**Bemerkung 9.24.** Bei Kurven haben wir gesehen, dass es verschiedene Darstellungsmöglichkeiten gibt – u.a. als Punktmenge oder mit Hilfe einer (nicht einzigartigen) Parametrisierung. Gleiches gilt auch für allgemeine Mengen  $A \in \mathbb{R}^n$ .

**Definition 9.25** (Polarkoordinaten im  $\mathbb{R}^2$ ). Sei  $f: [0, \infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben durch

$$f(r, \phi) := (r \cos(\phi), r \sin(\phi)).$$

Ist  $(x, y) = f(r, \phi)$ , dann heißen  $(r, \phi)$  Polarkoordinaten des Punktes  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Die Einschränkung  $f: (0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus ([0, \infty) \times \{0\})$  ist eine Bijektion.

**Beispiel 9.26.** In Polarkoordinaten hat der (abgeschlossene) Kreis mit Radius  $R > 0$  um  $(0, 0)$  die schon bekannte Darstellung

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = r \cos(\phi), y = r \sin(\phi), 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq R\} \\ &= \{(r \cos \phi, r \sin \phi) \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}. \end{aligned}$$

Die Transformation von kartesischen Koordinaten  $(x, y)$  zu Polarkoordinaten  $(r, \phi)$  und zurück erfolgt wie im Kapitel zu komplexen Zahlen.

**Definition 9.27** (Zylinderkoordinaten im  $\mathbb{R}^3$ ). Sei  $f: [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegeben durch

$$f(r, \phi, z) := (r \cos(\phi), r \sin(\phi), z).$$

Ist  $(x, y, z) = f(r, \phi, z)$ , dann heißen  $(r, \phi, z)$  Zylinderkoordinaten des Punktes  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

**Definition 9.28** (Kugelkoordinaten im  $\mathbb{R}^3$ ). Sei  $f: [0, \infty) \times [0, \pi) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegeben durch

$$f(r, \theta, \phi) := (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta).$$

Ist  $(x, y, z) = f(r, \theta, \phi)$ , dann heißen  $(r, \theta, \phi)$  Kugelkoordinaten des Punktes  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

Analog zur Substitutionsregel gibt es auch die Möglichkeit, mehrdimensionale Integrale zu transformieren:

**Satz 9.29** (Transformationssatz). Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und sei  $\phi: A \rightarrow \phi(A) \subset \mathbb{R}^n$  ein Diffeomorphismus, d.h. eine bijektive stetig differenzierbare Abbildung mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung. Ist  $f$  auf der Menge  $\phi(A)$  integrierbar, dann gilt

$$\int_{\phi(A)} f(y) dy = \int_A f(\phi(x)) |\det(D\phi(x))| dx,$$

wobei  $D\phi$  die Jacobi-Matrix von  $\phi$  ist (siehe Abschnitt 2.4) und  $\det(D\phi(x))$  die Funktionaldeterminante von  $\phi$ , d.h. die Determinante von  $D\phi(x)$ .

Der Begriff der Determinante und auch die Berechnung selbiger sind Gegenstand von Mathematik II. An dieser Stelle soll es genügen, die entsprechenden Funktionaldeterminanten der drei oben eingeführten Koordinatentransformationen und die so entstehende Transformationsformel anzugeben:

**Satz 9.30.** Seien  $A \subset \mathbb{R}^2$  und  $B, C \subset \mathbb{R}^3$  und  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h: C \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar über ihrem Definitionsbereich. Dann gelten folgende Aussagen:

**Polarkoordinaten:** Hat  $A$  die Darstellung

$$A = \{(x, y) = (r \cos \phi, r \sin \phi) \mid (r, \phi) \in A^*\},$$

so gilt die Transformationsformel

$$\int_A f(x, y) d(x, y) = \int_{A^*} r \cdot f(r \cos \phi, r \sin \phi) d(r, \phi).$$

**Zylinderkoordinaten:** Hat  $B$  die Darstellung

$$B = \{(x, y, z) = (r \cos \phi, r \sin \phi, z) \mid (r, \phi, z) \in B^*\},$$

so gilt die Transformationsformel

$$\int_B g(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{B^*} r \cdot g(r \cos \phi, r \sin \phi, z) d(r, \phi, z).$$

**Kugelkoordinaten:** Hat  $C$  die Darstellung

$$C = \{(x, y, z) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) \mid (r, \theta, \phi) \in C^*\},$$

so gilt die Transformationsformel

$$\int_C h(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{C^*} r^2 \sin \theta \cdot h(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) d(r, \theta, \phi).$$

Die Funktionaldeterminante von Polar- und Zylinderkoordinatentransformation ist jeweils  $r$ , die der oben angegebenen Kugelkoordinatentransformation ist  $r^2 \sin \theta$ . Beide sind positiv auf den Definitionsbereichen der Transformationen.

**Beispiel 9.31.** Sei  $K_R(0)$  die offene Kugel mit Radius  $R > 0$  mit Mittelpunkt  $(0, 0, 0)$ . Das Volumen der Kugel ist dann (mit Übergang zu Kugelkoordinaten)

$$\begin{aligned} \int_{K_R(0)} 1 d(x, y, z) &= \int_0^R \left( \int_0^\pi \left( \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta d\phi \right) d\theta \right) dr \\ &= \int_0^R \left( \int_0^\pi (2\pi \cdot r^2 \sin \theta) d\theta \right) dr \\ &= \int_0^R \left( 2\pi \cdot r^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \right) dr \\ &= \int_0^R \left( 2\pi \cdot r^2 \cdot \underbrace{[-\cos \pi + \cos 0]}_{=2} \right) dr \\ &= 4\pi \int_0^R r^2 dr \\ &= 4\pi \cdot \frac{1}{3} R^3 \\ &= \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

## Mehrdimensionale uneigentliche Integrale

Wir nennen eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  messbar, falls

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & , x \in A, \\ 0 & , x \notin A \end{cases}$$

integrierbar (über  $\mathbb{R}^n$ ) ist. Sei zudem auch  $A_R := \{x \in A \mid |x| < R\}$  messbar für alle  $R > 0$ . Eine Folge offener messbarer Mengen  $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$  heißt *Ausschöpfungsfolge* von  $A$ , falls

- i)  $B_k \subset A$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ ,
- ii)  $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$  und
- iii) der Abschluss von  $B_k$  in  $B_{k+1}$  enthalten ist.

Die  $n$ -dimensionalen Kugeln um einen festen Mittelpunkt mit wachsendem Radius (d.h.  $B_k := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < k\}$ ) bilden eine Ausschöpfungsfolge des  $\mathbb{R}^n$ .

**Definition 9.32.** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  eine beliebige (nicht notw. beschränkte) Menge. Eine Funktion  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  heißt über  $A$  uneigentlich (Riemann)-integrierbar, wenn für

$$\mathcal{M}_f := \{M \subset A \mid M \text{ messbar, } f \text{ integrierbar über } M\}$$

die Ungleichung

$$\sup_{M \in \mathcal{M}_f} \int_M |f(x)| dx < \infty$$

gilt und wenn es eine Ausschöpfungsfolge  $(B_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_f$  von  $A$  gibt. In diesem Fall definieren wir den Limes

$$\int_A f(x) dx := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_k} f(x) dx$$

als das uneigentliche (Riemann)-Integral von  $f$  über  $A$ .

**Beispiel 9.33.** Sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$  und sei wieder  $B_k := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |(x, y)| < k\}$  für  $k \in \mathbb{N}$  (d.h. Kreismittelpunkt  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ). Dann berechnet man mit Hilfe von Koordinatentransformation (in Polarkoordinaten)

$$\begin{aligned} \int_{B_k} f(x, y) d(x, y) &= \int_0^k \int_0^{2\pi} r f(r \cos \phi, r \sin \phi) d\phi dr \\ &= \int_0^k \int_0^{2\pi} r e^{-r^2(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)} d\phi dr \\ &= \int_0^k \int_0^{2\pi} r e^{-r^2} d\phi dr \\ &= \pi \int_0^k \underbrace{2r}_{g'(r)} e^{-r^2} dr \quad \text{Subst. } z = g(r) = r^2 \\ &= \pi \int_{g(0)}^{g(k)} e^{-z} dz = \pi [-e^{-z}]_0^{k^2} \\ &= \pi(1 - e^{-k^2}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \pi = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y). \end{aligned}$$

# 10 Differentialgleichungen

## 10.1 Einführung

Eine Differentialgleichung (kurz DGL) ist eine Gleichung, in der neben einer oder mehreren Variablen auch eine Funktion und deren Ableitungen auftreten.

**Beispiel 10.1** (aus dem Kapitel zu impliziten Funktionen). Ist  $f$  implizit gegeben durch  $F(x, y) = 0$ , dann erfüllt  $f$  die DGL

$$f'(x) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}.$$

In Beispiel 7.10 hatten wir für  $F(x, y) = x^2 - y^2 - 1$  so die DGL  $y' = \frac{x}{y}$  hergeleitet.

**Beispiel 10.2** (Einfaches Populationsmodell). Betrachten wir die Population als von der Zeit  $t$  abhängige Funktion  $n(t)$ , so kann man vereinfacht annehmen, dass die Population proportional zum gegenwärtigen Bestand wächst, d.h.  $n'(t) = \alpha n(t)$  für eine Konstante  $\alpha > 0$ .

Man unterscheidet zwischen gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen. Letztere hängen von mehreren Variablen ab und es treten partielle Ableitungen nach den jeweiligen Variablen auf. Wir werden ausschließlich gewöhnliche Differentialgleichungen betrachten.

**Definition 10.3.** Seien  $n, N \in \mathbb{N}$ ,  $M \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{(n+1)N}$  und  $F: M \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Eine Gleichung der Form

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (\star)$$

mit Variablen  $t \in \mathbb{R}$  und  $y, y', \dots, y^{(n)} \in \mathbb{R}^N$  heißt  $N$ -dimensionale DGL  $n$ -ter Ordnung. Eine  $n$ -mal differenzierbare Funktion  $\varphi: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  heißt Lösung der DGL  $\star$ , falls

$$F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)) = 0 \quad \text{für alle } t \in I.$$

Das Intervall  $I$  ist das zur Lösung  $\varphi$  gehörende Existenzintervall. Zudem gilt folgende Einteilung in Typen von Differentialgleichungen:

- Die DGL  $\star$  heißt linear, falls  $F$  affin linear ist in den Variablen  $y, y', \dots, y^{(n)}$ .
- Die DGL  $\star$  heißt autonom, falls  $F$  nicht von  $t$  abhängt.
- Die DGL  $\star$  heißt explizit, falls sie sich schreiben lässt als

$$0 = F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = y^{(n)} - f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

mit  $f: U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{nN} \rightarrow \mathbb{R}^N$ .

- Ist  $N = 1$ , so spricht man von einer skalaren DGL, sonst sprechen wir von einem System von Differentialgleichungen.
- Schreibt man  $M = I \times X$  für  $I \subset \mathbb{R}$  und  $X \subset \mathbb{R}^{(n+1)N}$ , so nennt man  $X$  auch Phasen- oder Zustandsraum.

**Satz 10.4.** Sei  $f: U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{nN} \rightarrow \mathbb{R}^N$  gegeben. Dann ist die (explizite)  $N$ -dimensionale DGL  $n$ -ter Ordnung

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

äquivalent zum  $nN$ -dimensionalen System von Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\begin{aligned} y'_0 &= y_1 \\ y'_1 &= y_2 \\ &\vdots \\ y'_{n-1} &= f(t, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \end{aligned}$$

mit  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ .

**Beispiel 10.5.** Die DGL 2. Ordnung  $y'' + \alpha y = 0$  ist äquivalent zum 2-dimensionalen System 1. Ordnung

$$\begin{aligned} y'_0 &= y_1 \\ y'_1 &= -\alpha y_0. \end{aligned}$$

Daher werden wir uns in diesem Kapitel auf Systeme 1. Ordnung beschränken.

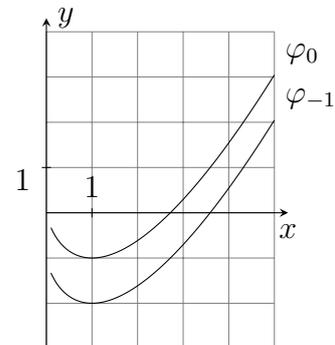
**Definition 10.6 (AWP).** Für  $f: I \times X \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  sei  $y' = f(t, y)$  ein DGL-System 1. Ordnung. Seien  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in X$ . Dann heißt

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

Anfangswertproblem (kurz AWP).

**Beispiel 10.7.**

Die DGL  $y' = \ln t$  hat die Durch Integration leicht zu berechnende Lösung  $\varphi_C(t) = t \ln(t) - t + C$  für  $C \in \mathbb{R}$  und  $t > 0$ . Die Lösung ist also eine Schar von Funktionen mit von der Konstanten abhängigen Werten, z.B.  $\varphi_C(e) = C$ . Durch Festlegung eines Wertes  $(t_0, y_0)$  wählen wir eine Funktion aus dieser Lösungsschar aus.



## 10.2 Elementare Lösungsmethoden

Wir betrachten im Folgenden nur 1-dimensionale Differentialgleichungen 1. Ordnung.

### 10.2.1 Getrennte Variablen

**Definition 10.8.** Seien  $I, J \subset \mathbb{R}$  und seien  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $h: J \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Die Funktion  $f: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$  sei gegeben durch  $f(t, y) = g(t)h(y)$ . Dann heißt  $y' = f(t, y) = g(t)h(y)$  DGL mit getrennten Variablen.

**Ansatz:**

Ist  $h(y) \neq 0$  für alle  $y \in J$ , so folgt aus der Bedingung  $y' = g(t)h(y)$  dass jede Lösung

$$\frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = g(t)$$

erfüllt. Integrieren wir beide Seiten, so erhalten wir (mit Substitution  $x = \varphi(s)$ )

$$\int_{t_0}^t g(s) ds = \int_{t_0}^t \frac{1}{h(\varphi(s))} \varphi'(s) ds = \int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t)} \frac{1}{h(x)} dx$$

Die linke und rechte Seite obiger Gleichung hängen nur noch von  $t$  und  $\varphi(t)$  ab. Ist die Stammfunktion von  $\frac{1}{h}$  invertierbar, so kann man also nach  $\varphi$  umstellen.

**Satz 10.9.** Sei  $(t_0, y_0) \in I \times J$  und  $h(y) \neq 0$  für alle  $y \in J$ . Definiere die Funktionen  $G(t) := \int_{t_0}^t g(s) ds$  und  $H(y) := \int_{y_0}^y \frac{1}{h(x)} dx$ . Ist  $I' \subset I$  derart, dass  $G(I') \subset H(J)$ , dann besitzt das AWP

$$y' = g(t)h(y), \quad y(t_0) = y_0$$

genau eine Lösung in  $I'$ . Diese genügt der Beziehung  $G(t) = H(\varphi(t))$ .

**Beispiel 10.10.** In Beispiel 7.10 hatten wir für  $F(t, y) = t^2 - y^2 - 1$  so die DGL  $y' = \frac{t}{y}$  hergeleitet. Diese DGL können wir jetzt lösen:

1. Schreibe als DGL mit getrennten Variablen:  $\frac{t}{y} = t \cdot \frac{1}{y}$ , d.h.  $g(t) = t$  und  $h(y) = \frac{1}{y}$ .
2. Bringe alles von  $y$  abhängige auf eine Seite, alles zeitabhängige auf die andere Seite:

$$y' = \frac{t}{y} \iff \frac{y'}{h(y)} = y \cdot y' = t.$$

3. Integration über  $[t_0, t]$  auf beiden Seiten:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \frac{y'(s)}{h(y(s))} ds &= \int_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{1}{h(x)} dx = \int_{y(t_0)}^{y(t)} x dx = \frac{1}{2} (y^2(t) - y^2(t_0)) \\ \int_{t_0}^t g(s) ds &= \int_{t_0}^t t dt = \frac{1}{2} (t^2 - t_0^2). \end{aligned}$$

4. Beides gleichsetzen (und  $y(0) = y_0$ ):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (y^2(t) - y^2(t_0)) &= \frac{1}{2} (t^2 - t_0^2) \\ \iff y^2(t) &= y_0^2 + (t^2 - t_0^2) \\ \iff \varphi(t) &= \pm \sqrt{t^2 + y_0^2 - t_0^2}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \left( -\sqrt{|y_0^2 - t_0^2|}, \sqrt{|y_0^2 - t_0^2|} \right) \end{aligned}$$

Mit dem Anfangswert  $(t_0, y_0) = (1, 0)$  — dieser erfüllt in der Tat die Bedingung  $F(t_0, y_0) = 0$  — erhalten wir  $\varphi(t) = \pm \sqrt{t^2 - 1}$ . Dies ist genau die Funktion, für die wir in Beispiel 7.10 die Differentialgleichung  $y' = \frac{t}{y}$  bestimmt hatten.

### 10.2.2 Lineare DGL 1. Ordnung

**Beispiel 10.11.** Ist  $y' = a(t) \cdot y$ , d.h. eine lineare DGL 1. Ordnung, so berechnen wir analog die Lösungen für das AWP mit  $y(t_0) = y_0$ : (Umbenennung der Variablen von  $t$  in  $s$ , damit Variable und Integralgrenzen nicht identisch sind)

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = a(t) \implies \int_{t_0}^t \frac{y'(s)}{y(s)} ds = \int_{t_0}^t a(s) ds \implies \ln(y(t)) - \ln(y_0) = \int_{t_0}^t a(s) ds$$

Mit den Rechenregeln für den Logarithmus ( $\ln a - \ln b = \ln(\frac{a}{b})$ ) erhalten wir

$$\ln \left( \frac{y(t)}{y_0} \right) = \int_{t_0}^t a(s) ds \implies \boxed{y(t) = y_0 \cdot \exp \left( \int_{t_0}^t a(s) ds \right)} \quad (10.1)$$

Eine skalare lineare DGL 1. Ordnung ist von der Form

$$y' = a(t) \cdot y + b(t) \quad (10.2)$$

mit  $t \in I \subset \mathbb{R}$  und  $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Falls  $b(t) \equiv 0$  ( $\forall t \in I$ ), so heißt (10.2) *homogene lineare DGL 1. Ordnung*. Die Lösung der homogenen linearen DGL 1. Ordnung ist durch (10.1) gegeben. Die Lösung einer allgemeinen (nicht homogenen) linearen DGL 1. Ordnung berechnen wir mit folgendem Ansatz:

**Ansatz – Variation der Konstanten:** Sei  $\psi$  eine Lösung der homogenen linearen DGL  $y' = a(t)y$ , d.h.

$$\psi(t) = \psi(t_0) \cdot \exp \left( \int_{t_0}^t a(s) ds \right).$$

Dann ist für jede Konstante  $h$  auch  $h \cdot \psi$  Lösung dieser DGL:

$$(h\psi)' = h \cdot \psi' = h \cdot a(t)\psi = a(t) \cdot (h\psi).$$

Nun ersetzen wir die Konstante  $h$  durch eine Funktion. (Wir "variieren die Konstante".) Sei  $\boxed{\phi(t) := \psi(t)h(t)}$ . Aus  $\psi'(t) = a(t)\psi(t)$  folgt dann

$$\phi' = (\psi h)' = \psi' h + \psi h' = a\psi h + \psi h' = a\phi + \psi h'.$$

Damit  $\phi$  Lösung von (10.2) ist, muss  $\psi h' = b$  gelten, also  $h' = \frac{b}{\psi}$ . Setzen wir  $\psi(t_0) = 1$ , so erhalten wir durch Integration und Einsetzen von  $\psi$ :

$$h(t) = \int_{t_0}^t \frac{b(s)}{\psi(s)} ds + C = \int_{t_0}^t \psi(t_0)^{-1} \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^s a(r) dr\right) b(s) ds + C.$$

Soll die Anfangsbedingung  $y(t_0) = \phi(t_0) = y_0$  erfüllt sein, kann man  $\boxed{\psi(t_0) = 1}$  setzen. Damit dann  $\phi(t_0) = \psi(t_0)h(t_0)$  erfüllt ist, muss  $C = y_0$  sein, d.h.

$$h(t) = y_0 + \int_{t_0}^t \exp\left(-\int_{t_0}^s a(r) dr\right) b(s) ds \quad \text{und damit}$$

$$\phi(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) \left(y_0 + \int_{t_0}^t \exp\left(-\int_{t_0}^s a(r) dr\right) b(s) ds\right).$$

**Satz 10.12.** Zu  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in \mathbb{R}$  existiert genau eine Lösung  $\phi: I \rightarrow \mathbb{R}$  des AWP

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t), \quad y(t_0) = y_0,$$

nämlich

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) \left(y_0 + \int_{t_0}^t \exp\left(-\int_{t_0}^s a(r) dr\right) b(s) ds\right) \\ &= y_0 \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) + \int_{t_0}^t \exp\left(\int_s^t a(r) dr\right) b(s) ds. \end{aligned}$$

**Beispiel 10.13.** Gesucht ist die Lösung  $\varphi$  des AWP  $y' = 2ty + t^3$  mit  $y(0) = y_0$ . Die homogene lineare DGL  $y' = 2ty$  mit Anfangswert  $y(0) = 1$  hat die Lösung

$$\psi(t) = 1 \cdot \exp\left(\int_0^t 2s ds\right) = e^{t^2}.$$

Zudem ist

$$h(t) = y_0 + \int_0^t e^{-s^2} s^3 ds.$$

Berechnen wir das Integral (mit Subst.  $x = s^2$ ,  $dx = 2s ds$  und danach part. Integration):

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-s^2} s^3 ds &= \int_0^{t^2} e^{-x} \cdot x \cdot \frac{1}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{t^2} e^{-x} \cdot x dx = \frac{1}{2} [-e^{-x}x]_0^{t^2} + \frac{1}{2} \int_0^{t^2} e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{2} [-e^{-x}x - e^{-x}]_0^{t^2} = \frac{1}{2} (1 - e^{-t^2} - t^2 e^{-t^2}). \end{aligned}$$

Damit ist insgesamt

$$\varphi(t) = \psi(t)h(t) = e^{t^2} \cdot \left(y_0 + \frac{1}{2} (1 - e^{-t^2} - t^2 e^{-t^2})\right) = \left(\frac{1}{2} + y_0\right) e^{t^2} - \frac{1}{2}(1 + t^2).$$

### 10.2.3 Homogene DGL

**Definition 10.14** (homogene DGL). Seien  $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $g: J \rightarrow \mathbb{R}$  und für  $U := \{(t, y) \in I \times \mathbb{R} \mid \frac{y}{t} \in J\}$  sei  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(t, y) := g(\frac{y}{t})$  stetig. Dann heißt  $y' = g(\frac{y}{t})$  homogene DGL.

**Ansatz – Substitution:** Sei  $\varphi$  eine Lösung der homogenen DGL  $y' = g(\frac{y}{t})$  mit Anfangswert  $y(t_0) = y_0$ . Sei nun  $z(t) := \frac{\varphi(t)}{t}$ . Dann gilt

$$z' = \left(\frac{\varphi}{t}\right)' = \frac{\varphi' \cdot t - \varphi}{t^2} = \frac{\varphi'}{t} - \frac{\varphi}{t^2} = \frac{1}{t} \left( g\left(\frac{\varphi}{t}\right) - \frac{\varphi}{t} \right) = \frac{1}{t} (g(z) - z),$$

d.h.  $z$  ist Lösung der DGL  $z' = \frac{1}{t} (g(z) - z)$  mit getrennten Variablen mit Anfangswert  $z_0 = \frac{y_0}{t_0}$ .

**Satz 10.15.**  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann eine Lösung von  $y' = g(\frac{y}{t})$  mit Anfangswert  $y(t_0) = y_0$ , falls  $z(t) = \frac{\varphi(t)}{t}$  Lösung der DGL  $z' = \frac{1}{t} (g(z) - z)$  mit Anfangswert  $z(t_0) = \frac{y_0}{t_0}$  ist.

**Beispiel 10.16.** Betrachte die DGL  $y' = 1 + \frac{y}{t} + \frac{y^2}{t^2}$ , d.h. nach obiger Notation ist  $g(z) = 1 + z + z^2$ . Setzen wir  $z := \frac{y}{t}$ , so gilt  $z' = \frac{1}{t}(1 + z^2)$ . Lösen wir diese DGL:

$$\frac{1}{t} = \frac{z'}{1 + z^2} \quad (\text{mit } 1 + z^2 \neq 0 \text{ ergibt durch Integration})$$

$$\ln\left(\frac{t}{t_0}\right) = \int_{t_0}^t \frac{1}{s} ds = \int_{t_0}^t \frac{z'(s)}{1 + z^2(s)} ds = \int_{z(t_0)}^{z(t)} \frac{1}{1 + x^2} dx = \arctan(z(t)) - \arctan(z(t_0)).$$

Umstellen nach  $z(t)$  liefert

$$z(t) = \tan\left(\ln\left(\frac{t}{t_0}\right) + \arctan(z(t_0))\right).$$

Mit Rücksubstitution von  $z(t) = \frac{\varphi(t)}{t}$  und  $z(t_0) = \frac{y_0}{t_0}$  erhält man die Lösung

$$\varphi(t) = t \cdot \tan\left(\ln\left(\frac{t}{t_0}\right) + \arctan\left(\frac{y_0}{t_0}\right)\right).$$

### 10.3 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Für diesen Abschnitt gelte wieder  $n = 1$ , d.h. wir betrachten nur (gewöhnliche) DGLen 1. Ordnung.

**Satz 10.17** (Existenzsatz von Peano). Sei  $f: I \times X \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  stetig und sei  $(t_0, y_0) \in I \times X$ . Dann existiert ein  $\alpha = \alpha(t_0, y_0) > 0$  so dass das AWP

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \quad (10.3)$$

auf dem Intervall  $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$  (mindestens) eine Lösung besitzt.

**Beispiel 10.18.** Gegeben sei das AWP

$$y' = \sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0.$$

Die Funktion  $f(y) = \sqrt{|y|}$  ist auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig. Dies ist eine DGL mit getrennten Variablen, wobei  $g(t) \equiv 1$  und  $h(y) = \sqrt{|y|}$  ist. Lösen wir diese:

1. Falls  $y \neq 0$  ist, gilt

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \frac{y'(s)}{\sqrt{|y(s)|}} ds &= \int_0^t 1 ds = t \\ \iff \int_{y(0)}^{y(t)} \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx &= \int_0^{y(t)} |x|^{-1/2} dx = t \quad \text{mit Subst. } y(t) = x \\ \iff [2|x|^{1/2} \cdot \text{sgn}(x)]_0^{y(t)} &= t \\ \iff \sqrt{|y(t)|} \cdot \text{sgn}(y(t)) &= \frac{1}{2}t \\ \iff y(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2 & , t \geq 0, \\ -\frac{1}{4}t^2 & , t < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

2. Die konstante Lösung  $\varphi \equiv 0$  erfüllt auch  $\varphi'(t) = 0 = \sqrt{|\varphi(t)|}$  und  $\varphi(0) = 0$ .

Eine DGL hat also nicht zwangsläufig eine eindeutige Lösung.

**Beispiel 10.19.** Gegeben sei das AWP

$$y' = y^2, \quad y(0) = y_0 > 0.$$

Die konstante Funktion  $\varphi \equiv 0$  ist durch Wahl des Anfangswertes jetzt keine Lösung. Die (nicht-triviale) Lösung berechnen wir analog zum vorherigen Beispiel:

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{y'(s)}{y^2(s)} ds = t &\iff \int_{y(0)}^{y(t)} \frac{1}{x^2} dx = t \\ \iff -\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{y_0} = t &\iff \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{y_0} - t \iff y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - t} \end{aligned}$$

Die Lösung  $\varphi(t) := \frac{1}{\frac{1}{y_0} - t}$  existiert nur für  $t < \frac{1}{y_0}$ , da

$$\lim_{t \nearrow \frac{1}{y_0}} \varphi(t) = \lim_{t \nearrow \frac{1}{y_0}} \left( \frac{1}{\frac{1}{y_0} - t} \right) = +\infty$$

ist.

**Definition 10.20** (Maximale Lösung). Eine Lösung  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^N$  des AWP (10.3) heißt maximal, falls für jede andere Lösung  $\psi: J \rightarrow \mathbb{R}^N$  gilt:  $J \subset I$  und  $\psi = \varphi|_J$ .

**Satz 10.21** (Picard-Lindelöf). Sei  $f: I \times X \rightarrow \mathbb{R}^N$  stetig mit stetigen partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_N}$ . Dann besitzt das AWP (10.3) für jedes  $(t_0, y_0) \in I \times X$  genau eine maximale Lösung  $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Das Intervall  $J$  ist offen.

**Bemerkung 10.22** (Picard-Iteration). Die lokale Lösung des AWP (10.3) auf einem Intervall  $I_\delta := (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  lässt sich iterativ bestimmen:

- $\varphi_0(t) \equiv y_0$  (Startwert);
- $\varphi_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_n(s)) ds, t \in I_\delta$ .

**Beispiel 10.23.** Betrachten wir das AWP  $y' = 2ty, \quad y(0) = y_0$  mit  $f(t, y) = 2ty$ .

**Startwert:**  $\varphi_0(t) = y_0$

**1. Schritt:**  $\varphi_1(t) = y_0 + \int_0^t 2sy_0 ds = y_0 + 2 \cdot \frac{1}{2} y_0 t^2 = y_0(1 + t^2)$

**2. Schritt:**  $\varphi_2(t) = y_0 + \int_0^t 2s \cdot y_0(1 + s^2) ds = y_0 \cdot \left(1 + \int_0^t 2(s + s^3) ds\right) = y_0 \cdot \left(1 + t^2 + \frac{1}{2} t^4\right)$

Für  $n \in \mathbb{N}$  führt dies auf  $\varphi_n(t) = y_0 \cdot \left(\sum_{k=0}^n \frac{t^{2k}}{k!}\right)$ . Für  $n \rightarrow \infty$  erhalten wir die Lösung  $\varphi(t) = y_0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{k!} = y_0 e^{t^2}$ .

Mit den Methoden für DGLen mit getrennten Variablen können wir dies auch berechnen:

$$\int_0^t \frac{y'(s)}{y(s)} ds = \int_0^t 2s ds \implies \ln\left(\frac{y(t)}{y_0}\right) = t^2 \implies y(t) = y_0 e^{t^2}.$$

**Bemerkung 10.24.** Die Formulierung des Satzes von Picard-Lindelöf kann abgeschwächt werden. Statt stetiger Differenzierbarkeit der Funktion  $f$  genügt es, dass  $f$  lokal Lipschitz-stetig ist bezüglich  $y$ , d.h. zu jedem  $(t_0, y_0) \in I \times X$  existieren  $\delta, \varepsilon > 0$  so dass für  $I' := (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset I$  und  $X' := (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \subset X$  gilt:  $f$  ist auf  $I' \times X'$  Lipschitz stetig, d.h. es existiert eine Konstante  $L > 0$  so dass

$$|f(t, y) - f(t, y')| \leq L|y - y'|, \quad \forall t \in I', y, y' \in X'.$$

Die Funktion  $f(t, y) = 2ty$  aus obigem Beispiel ist Lipschitz-stetig auf jedem abgeschlossenen Intervall  $I = [a, b]$  mit  $L = 2 \cdot \max\{|t| \mid t \in [a, b]\}$ , denn

$$|f(t, y) - f(t, y')| = 2t|y - y'| \leq 2 \max\{|t| \mid t \in [a, b]\} |y - y'|.$$

Die Funktion  $f(y) = \sqrt{|y|}$  hingegen ist nicht Lipschitz-stetig auf einem Intervall, welches den Punkt 0 enthält. Sie ist dort auch nicht stetig differenzierbar, denn  $f'(y) = \operatorname{sgn}(y) \cdot \frac{1}{2\sqrt{|y|}}$  ist unbeschränkt für  $y \rightarrow 0$ , also insb. nicht stetig.

## 10.4 Exakte Differentialgleichungen

**Definition 10.25.** Eine DGL vom Typ

$$\boxed{A(t,y) + B(t,y) y' = 0}, \quad t \in I \subset \mathbb{R}, y, y' \in X \subset \mathbb{R} \quad (10.4)$$

heißt exakt, falls eine Funktion  $F: I \times X \rightarrow \mathbb{R}$  existiert, so dass für alle  $(t, y) \in I \times X$  gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t, y) = A(t, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} F(t, y) = B(t, y).$$

**Satz 10.26.** Sind  $A$  und  $B$  stetig differenzierbar, so ist die DGL (10.4) exakt genau dann, wenn

$$\frac{\partial}{\partial y} A(t, y) = \frac{\partial}{\partial t} B(t, y)$$

Die DGL (10.4) ist also genau dann exakt, wenn das Vektorfeld

$$G(t, y) := \begin{pmatrix} A(t, y) \\ B(t, y) \end{pmatrix}$$

exakt ist. Das Potential ist dann durch  $F$  gegeben, d.h.  $\nabla F(t, y) = G(t, y)$ .

**Satz 10.27.**  $\varphi$  ist genau dann Lösung der DGL (10.4) mit Potential  $F$ , wenn  $F(t, \varphi(t)) = c$  für eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$  gilt.

*Beweis.*  $\varphi$  erfüllt die Gleichung  $F(t, \varphi(t)) = c$  genau dann, wenn  $\frac{d}{dt} F(t, \varphi(t)) = 0$  ist. Mit der verallgemeinerten Kettenregel gilt andererseits

$$\frac{d}{dt} F(t, \varphi(t)) = \frac{\partial}{\partial t} F(t, \varphi(t)) + \frac{\partial}{\partial y} F(t, \varphi(t)) \varphi'(t) = A(t, \varphi(t)) + B(t, \varphi(t)) \varphi'(t).$$

Folglich erfüllt  $\varphi$  die exakte DGL (10.4) mit Potential  $F$  genau dann, wenn es die implizite Darstellung  $F(t, y) = c$  besitzt.  $\square$

**Beispiel 10.28.** Betrachten wir die DGL  $t + 3y^2 \cdot y' = 0$ , d.h.  $A(t, y) = t$  und  $B(t, y) = 3y^2$ . Die Gleichung ist exakt:

$$\frac{\partial}{\partial y} A(t, y) = 0 = \frac{\partial}{\partial t} B(t, y).$$

Setzen wir  $G(t, y) := \begin{pmatrix} t \\ 3y^2 \end{pmatrix}$ . Das Potential der DGL,  $F$ , soll  $\nabla F = G$  erfüllen. Wir berechnen es als  $F(t, y) = \frac{1}{2}t^2 + y^3$ . Die implizite Gleichung  $F(t, y) = c$  hat die in diesem Fall leicht zu findende Lösung  $\varphi(t) = \sqrt[3]{c - \frac{1}{2}t^2}$ , welche nach obigem Satz auch die exakte DGL  $t + 3y^2 \cdot y' = 0$  löst. Überprüfen wir dies kurz:

$$t + 3\varphi^2(t) \cdot \varphi'(t) = t + 3 \left( c - \frac{1}{2}t^2 \right)^{2/3} \cdot \frac{1}{3} \left( c - \frac{1}{2}t^2 \right)^{-2/3} \cdot (-t) = 0.$$

Falls eine Differentialgleichung von der Form  $A(t, y) + B(t, y)y' = 0$  nicht exakt ist, so funktioniert möglicherweise folgender Ansatz:

**Ansatz – Integrierender Faktor:** Falls eine Funktion  $\mu: I \times X \rightarrow \mathbb{R}$  existiert mit  $\mu(t, y) \neq 0$  für alle  $(t, y) \in I \times X$ , dann ist

$$A(t, y) + B(t, y)y' = 0 \iff \mu(t, y)A(t, y) + \mu(t, y)B(t, y)y' = 0,$$

d.h. beide Differentialgleichungen besitzen die gleiche Lösung.

Ist die DGL  $\mu(t, y)A(t, y) + \mu(t, y)B(t, y)y' = 0$  exakt, so nennt man  $\mu$  *integrierenden Faktor*. Diesen findet man mit etwas Glück mit folgender Methode:

Definiere, sofern die jeweiligen Nenner nicht Null werden,

$$a(t, y) := \frac{\frac{\partial}{\partial y}A(t, y) - \frac{\partial}{\partial t}B(t, y)}{A(t, y)} \quad \text{und} \quad b(t, y) := \frac{\frac{\partial}{\partial y}A(t, y) - \frac{\partial}{\partial t}B(t, y)}{B(t, y)}.$$

- Ist  $A(t, y) \neq 0$  und ist  $a(t, y) = a(y)$ , d.h. unabhängig von  $t$ , so setze  $\mu(t, y) := \mu(y) := \exp\left(-\int a(y)dy\right)$ .
- Ist  $B(t, y) \neq 0$  und ist  $b(t, y) = b(t)$ , d.h. unabhängig von  $y$ , so setze  $\mu(t, y) := \mu(t) := \exp\left(+\int b(t)dt\right)$ .

**Beispiel 10.29.** Die DGL  $t^2 + y - ty' = 0$  mit  $A(t, y) = t^2 + y$  und  $B(t, y) = -t$  ist nicht exakt, denn  $\frac{\partial}{\partial y}A(t, y) = 1 \neq -1 = \frac{\partial}{\partial t}B(t, y)$ . In diesem Fall ist  $b(t, y) = \frac{2}{-t}$  unabhängig von  $y$  (wohldefiniert für  $t \neq 0$ ) und damit lautet unser Kandidat für den integrierenden Faktor

$$\mu(t) := \exp\left(\int -\frac{2}{t}dt\right) = \exp(-2\ln t + C) = \exp(\ln(t^{-2}) + C) = \tilde{C} \cdot t^{-2}$$

für  $\tilde{C} = e^C$ . Ist  $\mu$  ein integrierender Faktor, so ist auch  $\tilde{C}\mu$  ein integrierender Faktor für beliebige Konstanten  $\tilde{C} \neq 0$ , d.h. wir können ohne Einschränkung  $\tilde{C} = 1$  setzen. Damit erhalten wir die exakte DGL

$$\mu(t)A(t, y) + \mu(t)B(t, y)y' = \underbrace{1 + \frac{y}{t^2}}_{\tilde{A}(t, y)} + \underbrace{\left(-\frac{1}{t}\right)}_{\tilde{B}(t, y)} y' = 0.$$

Berechnen wir das Potential: Es soll  $\partial_t F(t, y) = 1 + \frac{y}{t^2}$  gelten, also  $F(t, y) = t - \frac{y}{t} + f(y)$ . Zudem haben wir die Bedingung  $\partial_y F(t, y) = -\frac{1}{t}$ , welche mit dem vorherigen Ergebnis kombiniert zu  $-\frac{1}{t} = \partial_y(t - \frac{y}{t} + f(y)) = -\frac{1}{t} + f'(y)$ , also  $f'(y) = 0$  führt. Damit ist also  $F(t, y) = t - \frac{y}{t}$  (plus Konstante). Die Gleichung  $F(t, y) = c$  wird also zu  $t - \frac{y}{t} = c$  und hat die explizite Lösung  $\varphi(t) = (t - c) \cdot t = t^2 - ct$ . Überprüfen wir, dass  $\varphi$  tatsächlich die gewünschte DGL  $t^2 + y - ty' = 0$  erfüllt: In der Tat ist

$$t^2 + (t^2 - ct) - t \cdot (2t - c) = 0.$$

## 11 Vermischtes \*

### 11.1 Ergänzende Bemerkungen zu Differentialgleichungen

#### 11.1.1 Physikerschreibweise

Die Lösung von Differentialgleichungen mit getrennten Variablen ( $y' = g(t)h(y)$ ) kann man etwas verkürzt wie folgt aufschreiben:

$$y' = \frac{dy}{dt} \implies \frac{dy}{dt} = g(t)h(y) \implies \frac{dy}{h(y)} = g(t)dt \implies \int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(t)dt.$$

Durch Setzen der korrekten Grenzen (und deshalb Umbenennen von  $y$  in  $x$  und von  $t$  in  $s$ ) erhält man das korrekte Resultat. In der Klausur wird auch geprüft, ob Sie Sachverhalte korrekt aufschreiben können – daher benutzen Sie bitte in diesem Fall den etwas längeren Weg mit Substitution, korrekten Integrationsgrenzen u.s.w.

#### 11.1.2 Partielle Differentialgleichungen

Wir haben nur *gewöhnliche Differentialgleichungen* behandelt. Sogenannte *partielle Differentialgleichungen* sind vom Typ

$$F\left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}, \dots\right) = 0.$$

Beispiele sind die Wärmeleitungsgleichung, die Maxwell-Gleichung (Zusammenhang elektrischer und magnetischer Felder), die Euler-Gleichung (Strömungsmechanik) u.v.m. Deren Behandlung geht jedoch über den Rahmen dieser Vorlesung weit hinaus.

### 11.2 Arten von Integration

Neben der in dieser Vorlesung eingeführten Riemann-Integration gibt es auch noch weitere Integralbegriffe, z.B.

- Lebesgue-Integration: approximiere Fläche unter Funktion horizontal statt vertikal, bzw. definiere Integral  $\int f(x)dx$  als Limes von Integralen  $\int f_n(x)dx$  für Treppenfunktionen, die gegen  $f$  konvergieren.
- Stieltjes-Integration: Integrale vom Typ  $\int f(x)dg(x)$  mit Riemann-Stieltjes-Summe  $\sum f(\xi_j)(g(x_j) - g(x_{j-1}))$ . Falls  $g$  differenzierbar ist, dann ist

$$\int f(x)dg(x) = \int f(x)g'(x)dx.$$

- Integralbegriffe von Henstock-Kurzweil (und anderen), Itô (für Stochastik) und Feynman (pfadweises Integral, konsistent mit Schrödinger-Gleichung), ...

### 11.3 Vertauschen von Grenzprozessen

Im Satz von Schwarz (Satz 2.30) hatten wir gesehen, dass die Reihenfolge der partiellen Ableitungen nur dann irrelevant ist, wenn die Funktion ausreichend oft stetig differenzierbar ist. Auch andere Grenzprozesse (Limes, Reihenbildung, Differentiation, Integration) können nicht beliebig vertauscht werden, wie folgende Beispiele illustrieren sollen.

**Beispiel 11.1** (Vertauschen von zwei Limiten). *Betrachten wir die Folge  $a_{m,n} = 2^{m-n}$ . Dann gilt*

$$\begin{aligned}\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{m,n} &= \lim_{m \rightarrow \infty} 0 = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} a_{m,n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \infty = \infty.\end{aligned}$$

**Beispiel 11.2** (Vertauschen von Grenzwert- und Reihenbildung). *Sei*

$$\delta_{kn} := \begin{cases} 1, & \text{falls } k = n, \\ 0, & \text{falls } k \neq n, \end{cases}$$

*man nennt  $\delta_{kn}$  Kronecker-Delta. Dann gilt:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{kn} = 0, \quad \text{jedoch} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{kn} = 1.$$

**Beispiel 11.3** (Vertauschen von Integration und Grenzwertbildung). *Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $f_n(x) = \frac{1}{2n} \mathbb{1}_{[-n,n]}(x)$ . Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ . Damit ist*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} 0 \, dx = 0.$$

*Andererseits ist*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \frac{1}{2n} \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Analog funktioniert auch als Gegenbeispiel:  $f_n(x) = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[0,n]}$ .

Vertauschungssätze basieren beispielsweise auf gleichmäßiger Konvergenz der Funktionenfolge (stärker als punktweise Konvergenz, verhindert, dass Masse verschwindet) oder dominierter Konvergenz (finde integrierbare Majorante).

**Beispiel 11.4** (Vertauschung von Integration und Reihenbildung). Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $f_n := \mathbb{1}_{[n, n+1]} - \mathbb{1}_{[n+1, n+2]}$ . Damit ist  $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = \int_n^{n+1} 1 dx - \int_{n+1}^{n+2} 1 dx = 0$ , also nach Summation

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = 0.$$

Andererseits ist  $\sum_{n=1}^N f_n(x) = \mathbb{1}_{[1,2]}(x) - \mathbb{1}_{[N+1, N+2]}(x)$  ("Teleskopsumme"), also gilt mit  $N \rightarrow \infty$ , dass  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \mathbb{1}_{[1,2]}(x)$  ist und damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[1,2]}(x) dx = \int_1^2 1 dx = 1.$$

Vertauschung von Integration und Reihenbildung ist beispielsweise möglich, wenn alle Summanden  $f_n(x) \geq 0$  sind.

**Beispiel 11.5** (Vertauschung von Differentiation und Grenzwertbildung). Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ . Es gilt einerseits

$$\frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{d}{dx} 0 = 0,$$

da die Zähler beschränkt und die Nenner unbeschränkt sind. Andererseits ist für  $n \in \mathbb{N}$  immer  $\frac{d}{dx} f_n(x) = \cos(nx)$  und diese Funktion ist fast überall nicht konvergent.

Die wünschenswerte Vertauschung  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  gilt, sofern die Funktionen  $f_n$  stetig differenzierbar sind und die Funktionen  $f'_n(x)$  gleichmäßig konvergieren.

## 11.4 Themenüberblick