



Material für die letzte Vorlesung am 13.02.2019

1. Seien X und Y Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}(X = a, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0, Y = a) = \mathbb{P}(X = -a, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0, Y = -a) = \frac{1}{4}$$

für einen Parameter $a \in \mathbb{R}$.

- Berechnen Sie die Randverteilungen p_X und p_Y , sowie $\mathbb{E}[X]$ und $\mathbb{E}[Y]$.
- Sind X und Y unkorreliert?
- Sind X und Y stochastisch unabhängig?
- Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X|Y]$.
- Bestimmen Sie die Massenfunktion von $X + Y$.
- Zeigen Sie, dass $X - Y$ und $X + Y$ stochastisch unabhängig sind.

Hinweis: Notieren Sie die gemeinsame Massenfunktion zuerst in einer Tabelle.

2. Es wird wiederholt mit einer fairen Münze geworfen. Bestimmen Sie die Verteilungen der folgenden Zufallsvariablen, d.h. geben Sie diese an und begründen Sie Ihre Entscheidung.

- $X_1 = 1$, falls *Zahl* erscheint und $X_1 = 0$, falls *Kopf* erscheint.
- X_2 ist die Anzahl der Würfe, bei denen *Zahl* erscheint, wenn die Münze insgesamt 20 Mal geworfen wird.
- X_3 gibt an, wie viele Würfe notwendig sind, bis erstmalig *Zahl* erscheint.

3. Es wird wiederholt ein fairer Würfel geworfen. Sei

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls im } i\text{-ten Wurf eine 6 fällt,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Bestimmen Sie die Massenfunktion, den Erwartungswert und die Varianz von X_1 .
- Was sagt Ihnen das schwache Gesetz der großen Zahlen?
- Was sagt Ihnen der zentrale Grenzwertsatz?
- Bestimmen Sie näherungsweise

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 17\right).$$

4. Seien X und Y zwei unabhängige ZVen mit $X \sim U[0, 1]$ und $Y \sim U[2, 4]$. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X \cdot Y]$ und $\mathbb{E}[X^2 + Y^2]$.

5. Es sei $X \sim U[0, 1]$. Wie ist $aX + b$ verteilt, wenn $a > 0$ ist?

6. Sie möchten beim Bäcker 2 Croissants kaufen. Es sind aber noch zwei Kunden vor Ihnen und im Regal sind noch 5 Croissants vorhanden. Als Stammkunde wissen Sie, dass die Kunden unabhängig voneinander 0 (bzw. 1 / 2 / 3 / 4) Croissants mit Wahrscheinlichkeit 0,3 (bzw. 0,2 / 0,3 / 0,1 / 0,1) kaufen. Wie wahrscheinlich ist es, dass Sie noch die gewünschten 2 Croissants bekommen?

7. Geben Sie für folgende Situationen die Nullhypothese und die Alternative an.

- (a) Der Hersteller behauptet, der Ausschussanteil bei der Herstellung eines Massenartikels betrage höchstens 1%. Ein Mitarbeiter des potentiellen Käufers soll diese Behauptung für den Käufer überprüfen.
- (b) In einer Diskussion mit einem Mediziner fällt die Behauptung, dass Jungen- und Mädchengeburten gleich häufig seien. Der Mediziner vermutet, dass das nicht korrekt ist, und möchte das statistisch überprüfen.
- (c) Für eine bestimmte Sorte Blumensamen wird eine Keimfähigkeit von mindestens 80% angegeben. Da die Samen sehr preisgünstig sind, zweifelt ein Großabnehmer diese Aussage an und möchte dies statistisch belegen.

8. Die gemeinsame Dichte zweier Zufallsvariablen X und Y sei gegeben durch

$$f(x, y) = 2e^{-x}e^{-2y}\mathbb{1}_{(0, \infty)}(x)\mathbb{1}_{(0, \infty)}(y).$$

- (a) Überprüfen Sie, dass dies tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.
- (b) Bestimmen Sie die Randdichten f_X und f_Y .
- (c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X > 1, Y < 1)$.