Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik

Dr. Jana Bielagk

STOCHASTIK (KOMBIBACHELOR) BLATT 11 WINTERSEMESTER 2018/19

AUFGABE 1 (2+2 Punkte). Seien X eine standardnormalverteilte Zufallsvariable und I eine Zufallsvariable, unabhängig von X, mit $\mathbb{P}(I=1)=\frac{1}{2}=\mathbb{P}(I=0)$. Weiterhin sei die Zufallsvariable Y definiert durch

$$Y=(-1)^I X=\begin{cases} X: & I=0 \\ -X: & I=1 \end{cases} .$$

a) Sind X und Y unabhängig und / oder unkorreliert?

b) Sind I und Y unabhängig und / oder unkorreliert?

AUFGABE 2 (2+2 Punkte). Ein Würfel wird n-mal geworfen, wobei $n \geq 3$ sei.

a) Es bezeichne X_j die im j-ten Wurf erzielte Augenzahl und

$$X=\sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_j \leq X_{j+1}\}}.$$

Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X]$ und $\operatorname{Var}(X)$.

b) Es bezeichne Y die Anzahl an geworfenen Einsen und Z die Anzahl an geworfenen Zweien. Berechnen Sie $\operatorname{Cov}(Y,Z)$.

AUFGABE 3 (2+2+1 Punkte). Seien X und Y absolutstetige Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte f zum Parameter $\rho \in (-1,1)$, gegeben durch

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{x^2+y^2-2\rho xy}{2(1-\rho^2)}\right), \qquad x,y \in \mathbb{R}.$$

a) Berechnen Sie die Randdichten f_X und f_Y von X und Y. Existiert ein Parameter ρ, für den X und Y unabhängig sind?

b) Berechnen Sie die bedingte Dichte $f_{X|Y}(x|y)$ von X gegeben Y.

c) Berechnen Sie die Kovarianz von X und Y.

AUFGABE 4 (2+2 Punkte).

a) Ein Würfel wird zweimal geworfen. Es bezeichne X die Augenzahl des ersten Wurfs und Y die maximale geworfene Augenzahl. Bestimmen Sie die lineare Regression $\widehat{Y}=a+bX$ von Y bezüglich X; d. h. bestimmen Sie die bezüglich der mittleren quadratischen Abweichung optimalen Koeffizienten a und b gemäß der Formel aus der Vorlesung.

b) Seien X_1 und X_2 zwei unabhängige Zufallsvariablen mit gleichem Erwartungswert μ und existierenden Varianzen $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma_1^2 > 0$ und $\mathrm{Var}(X_2) = \sigma_2^2 > 0$. Der Wert von μ ist nicht bekannt und soll durch ein gewichtetes Mittel $Z = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2$ geschätzt werden. Wie sollte man λ wählen, um die mittlere quadratische Abweichung der Vorhersage Z vom wahren Wert μ zu minimieren?

Abgabe: Montag, den 21.01.2019, zu Beginn der Vorlesung.
Bitte geben Sie Ihren Namen und den Wochentag Ihrer Übungsgruppe an.