



AUFGABE 1 (2+2 Punkte).

- a) Im Modell des zweifachen Würfelwurfs bezeichne X_i die Augenzahl des i -ten Wurfs und $M := \max\{X_1, X_2\}$. Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}(X_1|M) = \frac{M^2 + M(M-1)/2}{2M-1}.$$

- b) Die Anzahl Personen, die den Fahrstuhl eines n -stöckigen Wohnhauses im Erdgeschoss besteigen, sei Poisson-verteilt mit Erwartungswert 10. Bestimmen Sie die erwartete Anzahl an Stopps des Fahrstuhls pro Auffahrt. Nehmen Sie dafür an, dass jede Person unabhängig von den anderen Passagieren den Fahrstuhl rein zufällig in einem der n Stockwerke verlässt.

Hinweis: Das Ergebnis hängt von n ab.

AUFGABE 2 (4 Punkte). Aus Erfahrung weiß ein Professor, dass die erreichte Punktzahl in der Abschlussklausur eine Zufallsvariable mit Erwartungswert 75 ist.

- a) Geben Sie mit Hilfe der Markov-Ungleichung eine obere Abschätzung für die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Student mehr als 85 Punkte erreicht.

Nehmen Sie im Folgenden an, dass der Professor zudem noch weiß, dass die Varianz der erreichten Punktzahl 25 beträgt.

- b) Was kann über die Wahrscheinlichkeit gesagt werden, dass ein Student zwischen 65 und 85 Punkte erreicht?
- c) Wie viele Studenten müssen an der Klausur teilnehmen, damit die durchschnittlich erreichte Punktzahl mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,9 maximal um 5 Punkte vom Erwartungswert 75 abweicht? Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe der Tschebyschow-Ungleichung.
- d) Lösen Sie (c) unter Verwendung des zentralen Grenzwertsatzes.

AUFGABE 3 (4 Punkte). In der Geburtsabteilung eines Krankenhauses entbinden in einer bestimmten Woche n Frauen. Es werde angenommen, dass keine Mehrlingsgeburten auftreten und dass die Wahrscheinlichkeit bei jeder Geburt für einen Jungen bzw. ein Mädchen gleich sei. Außerdem werde angenommen, dass das Geschlecht der Neugeborenen für alle Geburten stochastisch unabhängig sei. Es sei a_n die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 60% der Neugeborenen Mädchen sind.

- a) Bestimmen Sie den exakten Wert a_{10} .
- b) Beweisen Sie: $a_{100} < a_{10}$ und es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Hinweis: Schätzen Sie a_{100} nach oben mit Hilfe der Tschebyschow-Ungleichung ab.

AUFGABE 4 (2+2 Punkte).

- a) Ein Würfel wird solange geworfen, bis die Summe der geworfen Augenzahlen 300 überschreitet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Würfel mindestens 80 mal geworfen?
- b) Fünfzig Zahlen werden zur nächsten ganzen Zahl gerundet und dann aufaddiert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die resultierende Summe um mehr als 3 von der exakten Summe ab, wenn die einzelnen Rundungsfehler gleichverteilt auf $[-0.5, 0.5]$ sind?

Hinweis: Berechnen Sie beide Wahrscheinlichkeiten approximativ mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes und achten Sie darauf, ob eine Stetigkeitskorrektur nötig ist.

Abgabe: Montag, 28.01.2019, zu Beginn der Vorlesung.

Bitte geben Sie Ihren Namen und den Wochentag Ihrer Übungsgruppe an.