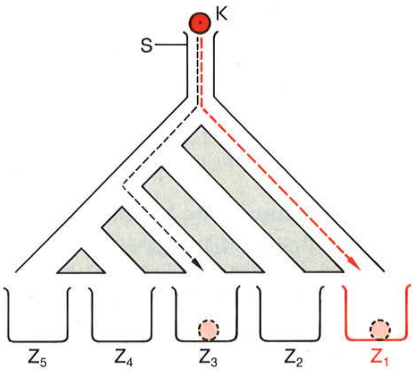
Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik

Dr. Jana Bielagk

STOCHASTIK (KOMBIBACHELOR) ÜBUNGSKLAUSUR WINTERSEMESTER 2018/19

AUFGABE 1.

Die Kugel K im rechts abgebildeten Spielautomaten läuft von S in eine der Zellen Z_i, $i = 1, \ldots, 5$. An jeder der vier Gabelungen rollt die Kugel mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach rechts oder nach links. Fällt die Kugel in Zelle Z_i, $i = 1, \ldots, 5$, so erhält der Spieler i Euro. Die Zufallsvariable X beschreibe den Gewinn des Spielers bei einem Spiel.



a) Bestimmen Sie die Massenfunktion von X.
b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt ein Spieler bei drei Spielen insgesamt mehr als 13 Euro?

AUFGABE 2. Es seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit den Erwartungswerten $\mathbb{E}[X] = 2$ und $\mathbb{E}[Y] = 1$ sowie den Varianzen $\mathrm{Var}(X) = 1$ und $\mathrm{Var}(Y) = 4$.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariablen $Z = 3X - Y + 1$.

b) Es gelte zusätzlich, dass $\mathbb{P}(X > 1) = \frac{3}{4}$ und $\mathbb{P}(Y > 1) = \frac{1}{2}$. Berechnen Sie $\mathbb{P}(\max\{X,Y\} > 1)$ und $\mathbb{P}(\min\{X,Y\} \leq 1 | \max\{X,Y\} > 1)$.

AUFGABE 3. Einstein kommt täglich vom Bahnhof Adlershof ins Erwin-Schrödinger-Zentrum. Bei schönem Wetter läuft er an 80% der Tage, bei schlechtem Wetter läuft er nur 30% der Tage. Erfahrungsgemäß ist in Adlershof an 60% der Tage schönes Wetter.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit läuft Einstein an einem zufällig gewählten Tag des Jahres?

b) Einstein erzählt seinem Kollegen, der gerade in Princeton ist, dass er heute vom Bahnhof aus gelaufen ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann dieser davon ausgehen, dass das Wetter schön ist?

AUFGABE 4. Die gemeinsame Dichte von X und Y sei gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy & : 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ 0 < x + y < 1 \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die Randdichte f_X von X. Sind X und Y unabhängig?

b) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

c) Berechnen Sie die Kovarianz zwischen X und Y.

Aufgabe 5. Ein Mitarbeiter einer Service-Firma wartet Maschinen eines Kunden. Die Wartung erfordert zwei Schritte, deren Dauer jeweils als exponentialverteilt und unabhängig voneinander angenommen werde. Für den ersten Schritt benötigt der Mitarbeiter durchschnittlich 0,2 Stunden und für den zweiten Schritt durchschnittlich 0,3 Stunden.

a) Sei X die Zeit (in Stunden), die der Mitarbeiter für die Wartung einer Maschine benötigt. Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$ und $\mathrm{Var}(X)$.

b) Der Mitarbeiter soll am nächsten Arbeitstag 20 Maschinen warten. Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass er dies innerhalb von 8 Stunden schafft.

c) Bestimmen Sie $t \in \mathbb{R}_+$ so, dass der Mitarbeiter die 20 Maschinen mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95% innerhalb von t Stunden warten kann.

Hinweis: Eine zum Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilte Zufallsvariable hat den Erwartungswert $\frac{1}{\lambda}$ und die Varianz $\frac{1}{\lambda^2}$.

Aufgabe 6. In einer Fabrik wird Zucker in Packungen abgefüllt, auf denen das Füllgewicht mit 2kg angegeben ist. Aus Voruntersuchungen ist bekannt, dass X annähernd normalverteilt ist mit Standardabweichung $\sigma = 0{,}01$ kg. Aus einer Stichprobe von 10 Packungen wird das mittlere Füllgewicht von 1,996 kg errechnet. Treffen Sie mit Hilfe eines geeigneten statistischen Tests eine Aussage darüber, ob es sich um eine systematische Unterschreitung des Soll-Gewichts handelt. Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art soll 5% nicht überschreiten.