Analysis IIIb von
Prof. PhD. A. Griewank

Sommersemester 2010
Vorlesungsmitschrift von Paul Boeck
Korrektur durch Dr. Lutz Lehmann
Letzte Änderung: 20. August 2010

Inhaltsverzeichnis

XI Maß- und Integrationstheorie

§46 σ–Algebren und Maße

Wünschenswerte Eigenschaften eines Volumenmaßes μ auf $\mathbb{R}^n \equiv X$

(i) Monotonie: $A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$

(ii) Quaderwert: $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots [a_n, b_n] \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i\} \implies \mu(A) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$ „ geometrisches Volumen“

(iii) Translationsinvarianz: $A \subset X, r \in \mathbb{R}^n \implies \mu(A + r) = \mu(A)$

(iv) σ–Additivität: $A_i \subset X$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{N} \implies \mu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$, wobei schon vorausgesetzt ist, dass $\mu(A) \geq 0$.

Lemma 46.1
Es ist nicht möglich, ein solches μ für alle Teilmengen $A \subset X = \mathbb{R}^n$, d.h. als Abbildung $\mu : \mathcal{P}(X) = 2^X \to \mathbb{R}$ mit $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge zu definieren.

Beweis: (Auswahlaxiom vorausgesetzt) Betrachte $X = \mathbb{R}^n$ mit Äquivalenzrelation $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}^n$, d.h. Differenzvektor $x - y \in \mathbb{Q}^n$. Sei $A \subset [0,1]^n$ eine Menge von Repräsentanten dieser Äquivalenzklassen. (Dabei ist $|A| > |\mathbb{Q}^n|$)

$$B = \bigcup_{r \in [-1,1]^n \cap \mathbb{Q}^n} (A + r) \subset [-1, 2]^n \qquad B \supset [0,1]^n$$

Also verlangt Monotonie und σ–Additivität

$$\begin{aligned} \mu\left([0,1]^n\right) = 1 \leq \mu(B) = \mu\Big(\bigcup_{r \in [-1,1]^n \cap \mathbb{Q}^n} (A + r)\Big) &\overset{\text{(iv)}}{=} \sum_{r \in [-1,1]^n \cap \mathbb{Q}^n} \mu(A + r) \\ &\overset{\text{(iii)}}{=} \sum_{r \in [-1,1]^n \cap \mathbb{Q}^n} \mu(A) \leq \mu([-1,2]^n) = 3^n \end{aligned}$$

Widerspruch, da linke Ungleichung für $\mu(A) = 0$ verletzt und rechte Ungleichung für $\mu(A) > 0$ verletzt ist. $\square$

Beispiel (Banach–Tarski–Paradox) „Eine Erbse kann zerschnitten und dann zur Sonne zusammengesetzt werden“.

Man kann die Kugeln $B_1 = B_1(0) \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ und $B_2 = B_2(0)$ in einer Dimension $n \geq 3$ so in endlich viele disjunkte Teilmengen $A_i, \tilde{A}_i$ für $i = 1 \dots m$ zerlegen, dass

$$\begin{aligned} B_1 &= \bigcup_{i=1}^m A_i, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{falls} \quad i \neq j \\ B_2 &= \bigcup_{i=1}^m \tilde{A}_i, \quad \tilde{A}_i \cap \tilde{A}_j = \emptyset \quad \text{falls} \quad i \neq j \end{aligned}$$

und die Stücke bis auf Drehungen und Verschiebungen übereinstimmen. D.h., es gibt Euklidische, den Abstand erhaltende lineare Transformationen

$$T_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad T_i(x) = Q_i x + q_i$$

mit $T_i(A_i) = \tilde{A}_i$.

Schlussfolgerung: Mengen A müssen auf geeignete Systeme $S \subset \mathcal{P}(X)$ eingeschränkt werden.

Definition 46.2
$S \subset \mathcal{P}(X)$ heißt

(i) Ring, *falls $\emptyset \in S$, sowie $A, B \in S \implies A \cup B,\ A \setminus B \in S$*

(ii) Algebra, *falls Ring und zusätzlich $A \in S \implies A^c \equiv X \setminus A \in S$*

(iii) σ–Algebra, *falls Algebra und $A_i \in S$ für $i \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{i=1}^\infty A_i \in S$*

Bemerkung Diese Eigenschaften sind realisierbar.

Beispiel $\{\emptyset, X\} = S$ ist σ–Algebra. Für $A \subset X$ ist $\{\emptyset, A\}$ Ring und $\{\emptyset, A, A^c, X\}$ σ–Algebra.

$$S \equiv \{A \subset X \text{ mit } A \text{ oder } A^c \text{ abzählbar}\} \quad \text{ist } \sigma\text{–Algebra}$$

Prüfung der Eigenschaften:

(i) $A \in S \iff A^c = X \setminus A \in S$ per Definition. Ist X abzählbar, so $S = \mathcal{P}(X)$. Sei also X überabzählbar, z.B. $X = \mathbb{R}^n$.

(ii)

$A \backslash B$	1	0
1	1	0
0	0	0

1 bedeutet Menge selbst abzählbar
0 bedeutet Komplement abzählbar
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Tabelle für $A \cup B$, welches immer eindeutigen Status hat, d.h. zu S gehört.

(iii) Für $A \cap B$ entsprechend.

(iv) Abzählbare Vereinigung σ–Abgeschlossenheit

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad A_i \in S \quad \text{für} \quad i \in \mathbb{N}$$

Falls alle A_i abzählbar sind, ist auch A abzählbar nach Diagonalisierungsargument $\implies A \in S$. Andernfalls existiert ein A_i mit A_i^c abzählbar. Daraus folgt $A^c = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j^c \subset A_i^c$ auch abzählbar.

Definition 46.3

(i) Die Eigenschaft, σ–Algebra zu sein, bleibt erhalten unter endlichen oder unendlichen Schnittbildungen. Also

$$S_i, i \in I \quad \sigma\text{–Algebren} \quad \implies \bigcap_{i \in I} S_i \equiv S \quad \text{ist auch } \sigma\text{–Algebra}$$

(ii) Für beliebiges *System $S \subset \mathcal{P}(X)$ nennt man* $\mathcal{A}_\sigma(S) = \bigcap_{S \subset \tilde{S}\ \sigma\text{–Algebra}} \tilde{S}$ *die durch S erzeugte σ–Algebra.*

(iii) Speziell mit $S = \mathcal{O}(X) \equiv$ Menge aller offenen Teilmengen in X oder $S \equiv \mathcal{F}(X) \equiv$ Menge aller geschlossenen Teilmengen von X erhält man das System $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}(X)) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{F}(X))$ der Borel–Mengen

Beweis: In Teilen in Übung.

Definition 46.4

Eine Funktion $\mu : S \to M \equiv [0, \infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ heißt

(i) Inhalt, *falls $A, B \in S$, $A \cap B = \emptyset \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, was insbesondere verlangt, dass $\mu(\emptyset) = 0$ (wenn nicht $\mu \equiv \infty$).*

(ii) σ–Inhalt, *falls $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset S$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in S$ und $A_i \cap A_j = \emptyset \implies \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$. Diese Eigenschaft heißt* σ–Additivität..

(iii) Maß *, falls σ–Inhalt auf σ–Algebra.*

(iv) $A \in S$ mit Maß μ heißt messbar.

*(v) Falls $\mu(A) = 0$ für Inhalt μ heißt A (μ–)*Nullmenge.

Satz 46.5 (Eigenschaften von Inhalt μ auf S)

(i) $A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$ *(Monotonie)*

(ii) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$ *(de Moivre)*

(iii) $\mu(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) \leq \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i)$ *(Subadditivität)*

(iv) Falls $A_i \in S$ paarweise disjunkt $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, vorausgesetzt, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset S$.

Beweis:

(i) $B = A \cup (B \setminus A) \overset{\text{Add.}}{\implies} \mu(B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0} \geq \mu(A)$

(ii)

$$\begin{aligned} A\cup B = A\cup (B\setminus A) &\implies \mu(A\cup B) = \mu(A)+\mu(B\setminus A)\\ (B\setminus A)\cup(B\cap A) = B &\implies \mu(B\setminus A)+\mu(B\cap A) = \mu(B)\\ \text{Einsetzen ergibt}\quad & \mu(A\cup B) = \mu(A)+\mu(B)-\mu(B\cap A)\end{aligned}$$

(iii)

$$B_i = A_i\setminus\{A_1\cup A_2\cup\ldots A_{i-1}\} \implies B_i\cap B_j=\emptyset,\quad \bigcup_{i=1}^m B_i = \bigcup_{i=1}^m A_i,\quad B_i\subset A_i$$

$$\mu(\bigcup_{i=1}^m A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^m B_i) \overset{\text{Add.}}{=} \sum_{i=1}^m \mu(B_i) \overset{\text{Monot.}}{\leq} \sum_{i=1}^m \mu(A_i)$$

(iv) Für beliebiges m

$$\mu(\bigcup_{i=1}^m A_i) = \sum_{i=1}^m \mu(A_i) \xrightarrow[m\to\infty]{} \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i) \leq \mu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) \quad \text{wie behauptet}$$

$$\text{Monotonie:}\quad \mu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) \geq \mu(\bigcup_{i=1}^m A_i)$$

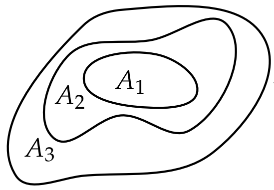
□

Satz 46.6 (Eigenschaften von σ–Inhalten)

(i) $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in S \implies \mu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$ *(σ–Subadditivität)*

(ii) Stetigkeit von unten $A_1\subset A_2\subset \ldots A_{i-1}\subset A_i$
$\lim_{i\to\infty}\mu(A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i)$

(iii) Stetigkeit von oben $A_1\supset A_2\supset\ldots A_{i-1}\supset A_i$
$\lim_{i\to\infty}\mu(A_i) = \mu(\bigcap_{i=1}^\infty A_i)$



$A_\infty = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$

Beweis:

(i)

$$B_i = A_i\setminus\{A_1\cup A_2\cup\ldots A_{i-1}\} \implies \bigcup_{i=1}^\infty B_i = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$$

$$\mu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^\infty B_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(B_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$$

(ii)

$$B_i = A_i\setminus A_{i-1},\quad B_1 = A_1$$

$$\mu(A_m) = \mu(\bigcup_{i=1}^m B_i) = \sum_{i=1}^m \mu(B_i) \xrightarrow[m\to\infty]{} \sum_{i=1}^\infty \mu(B_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i)$$

(iii) durch Rückführung auf (ii). Setze $B_i = A_1\setminus A_i$

$A_1\supset A_2\supset A_3\supset\ldots A_i\supset A_{i+1}$

$$B_1=\emptyset\subset B_2 = A_1\setminus A_2\subset B_3 = A_1\setminus A_3\subset\ldots B_i = A_1\setminus A_i\subset B_{i+1} = A_1\setminus A_{i+1} \implies \bigcup_{i=1}^\infty B_i = A_1\setminus\bigcap_{i=1}^\infty A_i$$

$$\text{Nach (ii)}\ \lim_{i\to\infty}\mu(B_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^\infty B_i) = \mu(A_1\setminus\bigcap_{i=1}^\infty A_i) = \mu(A_1)-\mu(\bigcap_{i=1}^\infty A_i)$$

$$\mu(B_i) = \mu(A_1\setminus A_i) = \mu(A_1)-\mu(A_i)\quad\text{da}\quad A_i\subset A_1$$

$$\lim_{i\to\infty}\mu(A_1)-\mu(A_i) = \mu(A_1)-\mu(\bigcap_{i=1}^\infty A_i) \implies \mu(A_i)\xrightarrow[i\to\infty]{}\mu(\bigcap_{i=1}^\infty A_i)$$

□

Idee: Maße lassen sich als Restriktionen von äußeren Maßen auf messbaren Mengensystemen definieren. Die äußeren Maße lassen sich aus Inhalten auf Ringen $S \subset \mathcal{P}(X)$ für $\mathcal{P}(X)$ Potenzmenge definieren. Zunächst Restriktionsschritt nach Carathéodory.

Definition 46.7
Eine Funktion $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty] = \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ heißt äußeres Maß, *falls*

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) $A \subset B \subset X \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ *(Monotonie)*

(iii) $\mu^*(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu^*(A_i)$ *(σ–Subadditivität)*

Definition 46.8
*Eine Menge $A \subset \mathcal{P}(X)$ heißt μ^*–*messbar *für ein gegebenes äußeres Maß μ^* auf X, falls*

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \quad \text{für alle } E \subset X$$

Satz 46.9 (Carathéodory)
Die Menge aller μ^*–messbaren Mengen $A \subset X$ bilden eine σ–Algebra $S_{\mu^*} = S$ und die Restriktion $\overline{\mu} = \mu^*\big|_{S_{\mu^*}}$ von μ^* auf $S \subset \mathcal{P}(X)$ ist ein Maß.

Beweis: Nach Definition (von μ^*–messbar) gilt $A \in S \iff A^c \in S$. Für die Algebra–Eigenschaft ist nur noch zu zeigen, dass $A, B \in S \implies A \cup B \in S$.

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) && \text{da } B\ \mu^*\text{–messbar ist} \\ &= \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c \cap A) + \mu^*(E \cap B^c \cap A^c) && \text{da } A\ \mu^*\text{–messbar ist} \end{aligned}$$

Vereinigung $(E \cap B) \cup (E \cap B^c \cap A) = E \cap (A \cup B)$ leicht nachzuprüfen. Diese ergibt wegen Subadditititivität

$$\mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c \cap A) \geq \mu^*(E \cap (A \cup B))$$

Einsetzen in obige Gleichung ergibt

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c)$$

Wegen Subadditivität gilt auf jeden Fall

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c)$$

und somit Gleichheit, die die μ^*–Messbarkeit von $A \cup B$ garantiert.

Zwischenergebnis: S ist Algebra. Zu zeigen bleibt die σ–Algebra–Eigenschaft. Seien

$$A = \bigcup_{i=1}^\infty A_i \quad \text{mit} \quad A_i \in S \quad \text{und o.B.d.A.} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{falls } i \neq j \quad .$$

Dann ist $B_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$, $n \in \mathbb{N}$, eine monoton wachsende Mengenkette von μ^*–messbaren Mengen.

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) \overset{\text{Monot.}}{\geq} \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap A^c) && \text{da } B_n \subset A \text{ und } B_n^c \supset A^c \\ \mu^*(E \cap B_n) &= \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^c) && \text{da } A_n\ \mu^*\text{–messbar} \\ &= \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1}) \\ &= \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap A_{n-1}) + \mu^*(E \cap B_{n-2}) = \dots \\ &= \sum_{i=1}^n \mu^*(E \cap A_i) \end{aligned}$$

Einsetzen in obige Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N} && \mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A^c) + \sum_{i=1}^n \mu^*(E \cap A_i) \\ &\xrightarrow[n \to \infty]{} && \mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A^c) + \sum_{i=1}^\infty \mu^*(E \cap A_i) \overset{\text{Subadd.}}{\geq} \mu^*(E \cap A^c) + \mu^*(E \cap A) \end{aligned}$$

Die Umkehrung $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A^c) + \mu^*(E \cap A)$ folgt aus der Subadditivität, so dass Gleichheit entsteht, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in S$. Also ist S eine σ–Algebra.

Noch zu zeigen: Maßeigenschaften von μ^* auf S.

$$\begin{array}{rl}
\text{Additivität} & A \cap B = \emptyset, \quad A, B \in S \\
& \mu^*(A \cup B) = \mu^*((A \cup B) \cap B) + \mu^*((A \cup B) \cap B^c) \quad \text{da } B\ \mu^*\text{–messbar} \\
& \qquad\qquad = \mu^*(B) + \mu^*(A) \\
\sigma\text{–Additivität} & A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \text{mit} \quad A_i \in S, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{falls } i \neq j \\
& \mu(A) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \geq \mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \quad \text{für beliebiges } n \\
n \to \infty \quad \text{ergibt} & \mu(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \\
\text{Da für } A \in S \text{ gilt} & \mu^*(A) = \mu(A) \quad \text{und } \mu^*\ \sigma\text{–subadditiv gilt umgekehrt} \\
& \mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)
\end{array}$$

und somit Gleichheit, d.h. σ–Additivität. □

Definition 46.10
Ein Maß μ auf $S \subset \mathcal{P}(X)$ heißt

(i) vollständig, *falls aus $A \subset B \in S$ mit $\mu(B) = 0$, auch $A \in S$ mit $\mu(A) = 0$ folgt.*

(ii) endlich, *falls $\mu(X) < \infty$.*

(iii) σ–endlich, *falls $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ mit $A_i \in S$, $\mu(A_i) < \infty$.*

Korollar 46.11
Jedes nach Satz 46.9 konstruierte Maß ist vollständig.

Beweis: $A \subset B \in S$ mit $\mu(B) = 0 = \mu^*(B) \implies \mu^*(A) = 0 \implies \mu^*(A \cap E) = 0$ für $E \subset X$.
$E \subset X \implies \mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = 0 + \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E)$ wegen Monotonie.
Also gilt Gleichheit $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ und A ist μ^*–messbar und deshalb $A \in S$. □

Frage: Wie konstruiert man ein äußeres Maß?
Antwort: Durch „Erweiterung“ von Inhalten auf Ringen.

Satz 46.12
Falls μ ein Inhalt auf einem Ring $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ ist, dann wird durch

$$\mu^*(A) \equiv \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ A_i \in \mathcal{R} \right\} \quad \textit{für} \quad A \subset \mathcal{P}(X)$$

ein äußeres Maß auf $\mathcal{P}(X)$ definiert.

Beweis: Da $\emptyset \in \mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ gilt $\mu^*(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Falls $B \subset A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, dann gilt $B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, d.h. die A_i sind auch abzählbare Überdeckung von B, so dass

$$\mu^*(B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Nimmt man nun das Infimum über die Überdeckungen von A, so folgt $\mu^*(B) \leq \mu^*(A)$.
Zum Beweis der σ–Subadditivität betrachte $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ mit $A_i \in \mathcal{P}(X)$. Dann existiert für beliebiges $\varepsilon > 0$ und jedes i eine Folge $(C_{ij})_{j=1}^{\infty}$, mit $C_{ij} \in \mathcal{R}$, so dass

$$\mu^*(A_i) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(C_{ij}) - \varepsilon 2^{-i}$$

und $A_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_{ij}$. Also folgt

$$\mu^*(A) = \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \overset{\text{Monot.}}{\leq} \mu^*(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} C_{ij}}_{\in\mathcal{R}})$$
$$\leq \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\mu^*(C_{ij})\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty}(\mu^*(A_i) + \varepsilon 2^{-i}) = \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)$$

Damit ist μ^* tatsächlich σ–subadditiv, da ε beliebig klein gemacht werden kann. □

Beispiel Ring $\mathcal{R} = \{(a,b] \subset \mathbb{R} \text{ mit } -\infty \leq a \leq b < \infty\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ mit $\mu(a,b] = (b-a)$.
Behauptung: $\mu^*(\mathbb{Q}) = 0$ und damit $\mathbb{Q}$ messbar bezüglich μ^*.

Beweis: Betrachte Aufzählung $\mathbb{Q} = \{q_i\}_{i=1}^{\infty}$ und Überdeckung durch $A_i = (q_i - \varepsilon 2^{-i}, q_i]$ für festes $\varepsilon > 0$ und $i = 1\ldots\infty$.
$\Longrightarrow$ $\mathbb{Q} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i \in \mathcal{R}$, $\mu^*(\mathbb{Q}) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon 2^{-i} = \varepsilon \Longrightarrow \mu^*(\mathbb{Q}) = 0$ da ε beliebig. □

Satz 46.13
Sei μ^* das nach Satz 46.12 aus Inhalt μ auf Ring $\mathcal{R}$ konstruierte äußere Maß und $\overline{\mu}$ das nach Satz 46.9 daraus konstruierte Maß auf der σ–Algebra S. Dann gilt $\mathcal{R} \subset S$, d.h. alle $A \subset \mathcal{R}$ sind μ^*–messbar und $\mu = \overline{\mu}_{|\mathcal{R}}$, falls μ schon ein σ–Inhalt ist.

Beweis: Betrachte $A \in \mathcal{R}$ und $E \subset X$. Falls $\mu^*(E) = \infty$ folgt aus Subadditivität $\mu^*(E \cap A) = \infty$ oder $\mu^*(E \cap A^c) = \infty$ und damit Gleichheit. Andernfalls existiert Überdeckung $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ mit $A_i \in \mathcal{R}$ und $\mu^*(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i) - \varepsilon$. Dann gilt

$$A_i = (A_i \cap A) \cup (A_i \cap A^c) = \underbrace{(A_i \cap A)}_{\in\mathcal{R}} \cup \underbrace{(A_i \setminus A)}_{\in\mathcal{R}}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad & \mu(A_i) = \mu(A_i \cap A) + \mu(A_i \setminus A) \\
\text{Einsetzen} \quad & \varepsilon + \mu^*(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i \cap A) + \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i \setminus A) \\
\sigma\text{–Subadditivität} \quad & \geq \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap A) + \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus A) \\
\text{Monotonie} \quad & \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \\
\varepsilon \to 0 \Longrightarrow \quad & \mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) \cup \mu^*(E \cap A^c)
\end{aligned}$$

+ Subadditivität $\Longrightarrow$ Gleichheit $\Longrightarrow$ A ist messbar $\Longrightarrow$ $\mathcal{R} \subset S$. $A \in \mathcal{R} \Longrightarrow \mu^*(A) = \overline{\mu}(A) \leq \mu(A)$. Zu zeigen ist, dass $\mu^*(A) < \mu(A)$ zum Widerspruch führt. Wenn das so wäre, müsste eine Überdeckung $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset A$ existieren, mit $A_i \in \mathcal{R}$ und

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i) < \mu(A)$$

O.B.d.A. ist die Überdeckung disjunkt ($A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$), ansonsten $\tilde{A}_i = A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \in \mathcal{R}$.

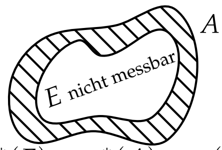
$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i) \overset{\text{Monot.}}{\geq} \sum_{i=1}^{\infty}\mu(\underbrace{A_i \cap A}_{\in\mathcal{R}}) \overset{\sigma\text{–Add.}}{=} \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap A) = \mu(A)$$

$\Longrightarrow \overline{\mu}(A) < \mu(A)$ ist Widerspruch, d.h. $\mu^*(A) = \overline{\mu}(A) = \mu(A)$. □

Lemma 46.14
Das aus μ auf $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ konstruierte äußere Maß μ^* ist regulär in dem Sinne, dass für alle $E \subset X$ ein A in der von $\mathcal{R}$ erzeugten σ–Algebra S_0 existiert, so dass

$$\mu^*(E) = \mu^*(A) \quad \textit{mit} \quad E \subset A \in S_0 \subset S$$

Beweis: Wegen Monotonie gilt es auszuschließen, dass



$\mu^*(E) = \mu^*(A) = \overline{\mu}(A)$

$$\mu^*(E) < \inf\left(\mu^*(A),\ E \subset A \in S_0\right),$$

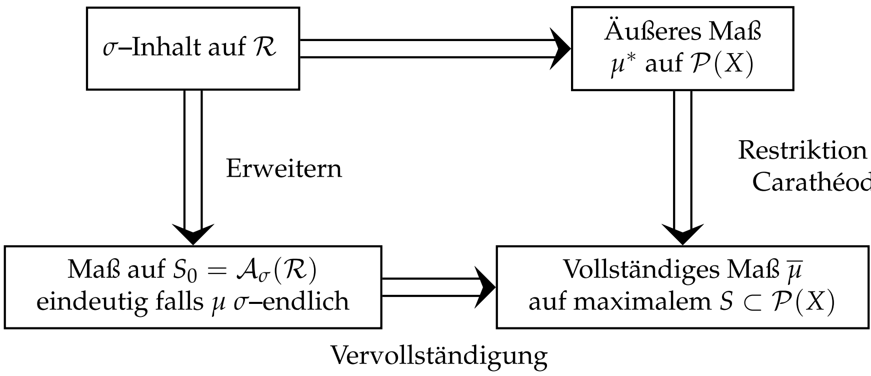
was nur für $\mu^*(E) < \infty$ eintreten kann. Dann existiert wiederum eine disjunkte Überdeckung $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ mit $A_i \in \mathcal{R}$.

$$\mu^*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) < \inf\left(\mu^*(A),\ E \subset A \in S_0\right)$$

O.B.d.A. seien die A_i disjunkt und da $\hat{A} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in S_0 \subset S$ folgt

$$\mu^*(\hat{A}) = \overline{\mu}(A) < \inf\left(\mu^*(A),\ E \subset A \in S_0\right).$$

Das ist ein Widerspruch. □



Satz 46.15 (Vervollständigung eines Maßes)
Sei μ ein Maß auf $S \subset \mathcal{P}(X)$ und

$$N \equiv \left\{B \subset X \mid \exists \overline{B} \in S:\ \ \overline{B} \supset B\ \wedge\ \mu(\overline{B}) = 0\right\}$$

die Familie der Nullmengen. Dann ist

$$\overline{S} \equiv \left\{A \cup B:\ A \in S,\ B \in N\right\}$$

eine σ–Algebra und die Funktion

$$\overline{\mu}(E) = \mu(A) \quad \textit{für} \quad E = A \cup B \quad \textit{mit} \quad A \in S,\ B \in N$$

ein vollständiges Maß auf $\overline{S}$.

Beweis: σ–Abgeschlossenheit

$$\begin{aligned}
E &= \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,\ E_i = A_i \cup B_i \quad \text{und} \quad B_i \subset \overline{B}_i \in \mu^{-1}(0) \\
&= \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = A \cup B \\
A &= \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in S \quad \text{und} \quad B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \subset \overline{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{B}_i
\end{aligned}$$

wobei $\overline{B}_i$ und $\overline{B}$ messbar, so dass

$$\mu(\overline{B}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\overline{B}_i) = 0$$

Also gilt $E = A \cup B \in \overline{S}$ da $B \in N$.

Abgeschlossenheit bzgl. Komplementierung

$$\begin{aligned}(A\cup B)^c &= A^c\cap B^c,\ B\subset\overline{B}\\ B^c &= \overline{B}^c\cup(\overline{B}\setminus B),\ \overline{B}\setminus B\in N\\ (A\cup B)^c &= A^c\cap(\overline{B}^c\cup(\overline{B}\setminus B))\\ &= \underbrace{A^c\cap\overline{B}^c}_{\in S}\cup\underbrace{(A^c\cap\overline{B}\setminus B)}_{\in N \text{ da Teilmenge von } \overline{B}}\in\overline{S}\end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt σ–Additivität von $\overline{\mu}$

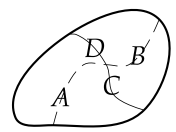
$$\overline{S}\ni E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i\cup B_i)\quad\text{mit}\quad(A_i\cup B_i)\cap(A_j\cup B_j)=\emptyset\quad\text{für}\quad i\neq j$$

$$\begin{aligned}\overline{\mu}(E)&=\overline{\mu}(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\cup\underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i}_{\in N})\overset{\text{Def}}{=}\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)\\ &\overset{\sigma\text{–Add.}}{=}\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\overline{\mu}(A_i\cup B_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\overline{\mu}(E_i)\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $\overline{\mu}$ auch σ–Additiv und damit Maß.

Zum Beweis der Vollständigkeit von $\overline{\mu}$ betrachte $F\subset X$

$$\begin{aligned}&F\subset A\cup B\in\overline{S}\quad\text{mit}\quad\overline{\mu}(A\cup B)=\mu(A)=0\\ \Longrightarrow\ &F\subset A\cup\overline{B}\in S\ \Longrightarrow\ \mu(A\cup\overline{B})\leq\mu(A)+\mu(\overline{B})=0\\ \Longrightarrow\ &F\in N\subset\overline{S}\end{aligned}$$



Eindeutigkeit von $\overline{\mu}$:

$$E=A\cup B=C\cup D\quad\text{mit}\quad B,D\in N,\ A,C\in S$$

Zu zeigen ist, dass $\mu(A)=\mu(C)$.

$$\mu(A)+\mu(C)=\mu(A\cap C)+\mu(A\cup C),\quad\text{da}\quad A,C\in S$$

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c=(C\cup D)^c=C^c\cap D^c$$

$$\left.\begin{aligned}\mu(A)=\mu(A\cap C)+\mu(A\cap D)\\ \mu(C)=\mu(A\cap C)+\mu(C\cap B)\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\ \mu(A)=\mu(A\cap C)=\mu(C)=\overline{\mu}(A\cup C)=\overline{\mu}(B\cup D)$$

$$\begin{aligned}&\mu(A)\leq\mu(A\cap C\cup A\cap\overline{D})\leq(A\cap C)+\mu(A\cup\overline{D})=\mu(A\cap C)\overset{\text{Monot.}}{\leq}\mu(A)\\ \Longrightarrow\ &\mu(A)=\mu(A\cap C)\quad\text{entsprechend nach Austausch}\quad A\leftrightarrow C\quad\text{und}\quad B\leftrightarrow D\\ &\mu(C)=\mu(A\cap C)\ \Longrightarrow\ \mu(A)=\mu(C)\ \Longrightarrow\ \overline{\mu}(A\cup B)\quad\text{eindeutig definiert.}\end{aligned}$$

□

Satz 46.16
Sei μ ein (σ–endlicher) σ–Inhalt auf dem Ring $\mathcal{R}\subset\mathcal{P}(X)$ und μ^* ein durch μ auf $\mathcal{P}(X)$ erzeugte äußeres Maß. $S_0=\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})\subset\mathcal{P}(X)$ ist die durch $\mathcal{R}$ erzeugte σ–Algebra, S das System der μ^*–messbaren Elemente von $\mathcal{P}(X)$. $\overline{S}_0$ ist die Erweiterung von S_0 gemäß dem Satz 46.15 mit $\overline{\mu}=\mu^*_{|S}$ und $\mu_\sigma=\mu^*_{|S_0}$.

Dann ist $\overline{\mu}$ die Verallgemeinerung von μ_σ auf $S=\overline{S}_0$ gemäß Satz 46.15.

Beweis:

(i) $\overline{S}_0\subset S$:

$$\begin{aligned}&E\subset\overline{S}_0\ \Longrightarrow\ E=A\cup B\quad\text{mit}\quad A\in S_0\quad\text{und}\quad B\subset\overline{B}\quad\text{mit}\quad\mu^*(B)=\mu^*(\overline{B})=0\\ &A\in S\supset S_0,\quad\mu^*(B)=0\ \Longrightarrow\ B\in S\quad\text{da alle }\mu^*\text{–Nullmengen messbar}\end{aligned}$$

(ii) $S \subset \overline{S}_0$:

$$E \in S \overset{46.14}{\Longrightarrow} \exists A \in S_0 \quad \text{mit} \quad A \supset E \quad \text{so dass} \quad \mu^*(A) = \mu^*(E) = \overline{\mu}(E)$$

Da E messbar ist, folgt $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) = \mu^*(E) + \mu(A \setminus E)$. Außerdem existiert nach 46.14 $B \in S_0$, so dass $B \supset A \setminus E$ und $\mu^*(B) = \mu^*(A \setminus E) = 0$.

Also gilt schließlich

$$E = \underbrace{(A \setminus B)}_{\in S_0} \cup \underbrace{(E \cap B)}_{\in N \text{ da } \mu^*(B) = 0}$$

$(A \setminus B) \subset A \setminus (A \setminus E) = E \cap B^c$. Hierbei wurde vorausgesetzt, dass $\mu^*(E) < \infty$. Falls $\mu^*(E) = \infty$ folgt aus vorausgesetzter σ–Endlichkeit

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \quad \text{mit} \quad X_i \in \mathcal{R} \quad \text{wobei} \quad \mu(X_i) < \infty$$

nach obiger Aussage gilt für $E \in S$, dass $E_i = E \cap X_i = A_i \cup C_i$ mit $A_i \in S_0$ und $C_i \in N$.

Daraus folgt

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cup C_i) = \underbrace{\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)}_{\in S_0} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \right) \in \overline{S}_0$$

□

Satz 46.17 (Eindeutigkeit der Erweiterung)
Falls μ ein σ–endlicher σ–Inhalt auf $\mathcal{R}$ ist, dann exisitiert genau ein erweitertes Maß μ_0 auf der von $\mathcal{R}$ erzeugten σ–Algebra $S_0 = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})$.

Beweis: Annahme: $\tilde{\mu}$ ist ein weiteres Maß auf S_0 mit $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$ für $A \in \mathcal{R}$. Sei μ^* wiederum das durch μ erzeugte äußere Maß auf $\mathcal{P}(X)$. Für beliebiges $A \in S_0$ gilt

$$\mu_0(A) = \mu^*(A) = \inf \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \right) \quad \text{mit } A_i \in \mathcal{R} \text{ disjunkt und } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset A$$

$$\Longrightarrow \inf \left(\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_i) \right) \overset{\tilde{\mu}\ \sigma\text{–Add.}}{=} \inf \left(\tilde{\mu}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \right) \geq \inf \tilde{\mu}(A) = \tilde{\mu}(A)$$

da $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ und $\tilde{\mu}$ auch monoton. Also gilt $\tilde{\mu}(A) \geq \mu_0(A)$ für $A \in S_0$. Betrachte $\overline{A} \supset A$ mit $\overline{A} \in \mathcal{R}$. Dann folgt $\overline{A} \setminus A \in S_0$ und somit nach Symmetrie $\tilde{\mu}(\overline{A} \setminus A) \leq \mu_0(\overline{A} \setminus A)$.

Daraus folgt wegen Additivität

$$\tilde{\mu}(\overline{A}) = \tilde{\mu}(\overline{A} \setminus A) + \tilde{\mu}(A) \leq \mu_0(\overline{A} \setminus A) + \mu_0(A) = \mu_0(\overline{A})$$

Da $\overline{A} \in \mathcal{R}$ vorausgesetzt, gilt $\tilde{\mu}(\overline{A}) = \mu_0(\overline{A})$ und somit überall Gleichheit, d.h. $\tilde{\mu}(A) = \mu_0(A)$.

Da μ σ–endlich vorausgesetzt ist, gilt $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ mit $X_i \subset \mathcal{R}$, $\mu(X_i) < \infty$

$$\Longrightarrow A \in S_0 \Longrightarrow A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap X_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

mit $A_i \in S_0$, $A_i \subset X_i \in \mathcal{R}$. Für $\overline{A} = X_i$ folgt aus obigem Beweis

$$\tilde{\mu}(A_i) = \mu_0(A_i) \overset{\sigma\text{–Add.}}{\Longrightarrow} \tilde{\mu}(A) = \mu_0(A) \quad \forall A \in S_0$$

□

§47 Lebesgue Maß auf $\mathbb{R}^n$

Betrachte halboffenen *Quader*

$$Q = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \ldots [a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^n \qquad \text{mit} \quad -\infty < a_i \leq b_i < \infty$$
$$\text{d.h.} \quad Q = \big\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i < b_i \text{ für } i = 1 \ldots n\big\}$$

und entsprechende *Figuren A*,

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} Q_i \quad \text{mit disjunkten Quadern } Q_i \quad .$$

Die Figuren bilden einen Ring, aber keine Algebra, da nur Differenzen, aber keine Komplemente enthalten sind. Der Inhalt λ_n ist definiert durch

$$\lambda_n(Q) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \implies \lambda_n(Q) = 0 \quad \text{falls} \quad a_i = b_i \quad \text{für ein } i \qquad \iff Q = \emptyset$$

und entsprechend für Figuren

$$\tilde{\lambda}_n(A) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_n(Q_i) \in [0, \infty)$$

Lemma 47.1
$\tilde{\lambda}_n$ ist auf $\mathcal{R}$ ein σ–endlicher σ–Inhalt.

Beweis: siehe Übung

Definition 47.2
Sei λ_n^* das durch $\tilde{\lambda}_n$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ erzeugte äußere Maß, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ die λ_n^*–messbaren Mengen in $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda_n = (\lambda_n^*)_{|\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$ das entsprechende Lebesgue–Maß.

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist die von $\mathcal{R}$ erzeugte σ–Algebra der sogenannten Borel–Mengen.

$$\overline{\lambda}_n = (\lambda_n)_{|\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)} \quad \textit{ist das Borel–Lebesgue Maß} \quad .$$

Bemerkung Nach Satz 46.15 ist $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ die Vervollständigung von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ durch Nullmengen und $\overline{\lambda}_n$ die einzige Erweiterung von $\tilde{\lambda}_n$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Satz 47.3 (Notwendige und hinreichende Bedingung für Lebesgue–Messbarkeit)
$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ gdw. es gibt für jedes $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $U_\varepsilon \supset A$ und eine abgeschlossene Menge $F_\varepsilon \subset A$, so dass

(i) $\lambda_n^*(U_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$ *und*

(ii) $\lambda_n^*(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$.

Beweis: (i) „$\Rightarrow$" $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es eine Überdeckung $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ durch Figuren $A_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} Q_{ij}$ mit

$$\tfrac{\varepsilon}{2} + \lambda_n(A) = \lambda_n^*(A) + \tfrac{\varepsilon}{2} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\lambda}_n(A_i) = \sum_{i,j} \tilde{\lambda}_n(Q_{ij}) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\lambda}_n(Q_k)$$

für eine geeignete Abzählung der Q_{ij} als Q_k. Für jedes k existiert ein offenes $\tilde{Q}_k$

$$\tilde{Q}_k = (\tilde{a}_1, b_1) \times (\tilde{a}_2, b_2) \ldots \times (\tilde{a}_n, b_n) \supset Q_k$$

mit $\tilde{a}_i < a_i$ nahe genug, so dass

$$\lambda_n(\tilde{Q}_k) = \prod_{j=1}^{n}(b_i - \tilde{a}_i) < \lambda_n(Q_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

Einsetzen in erste Ungleichung ergibt

$$U_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{Q}_k \quad \text{offen und deswegen in } \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$$

mit Maß

$$\lambda_n^*(U_\varepsilon) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(\tilde{Q}_k) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(Q_k) \leq \varepsilon + \lambda_n(A) \implies \lambda_n(U_\varepsilon \setminus A) = \lambda_n(U_\varepsilon) - \lambda_n(A) < \varepsilon$$

„$\Leftarrow$“ Sei $B = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_{1/k} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ mit $\lambda_n^*(U_{1/k} \setminus A) < \frac{1}{k}$. Dann ist $A \subset B$. Sei $N = B \setminus A$. Zu zeigen ist $\lambda^*(N) = 0$, denn dann ist $A = B \setminus N \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Es gilt

$$N \subset U_{1/k} \setminus A \implies \lambda_n^*(N) \leq \lambda_n^*(U_{1/k} \setminus A) < \tfrac{1}{k} \overset{k\to\infty}{\implies} \lambda_n^*(N) = 0$$

(ii) „$\Rightarrow$“ Betrachte $X \setminus A$. Dann existiert nach (i) eine offene Menge $U_\varepsilon \supset X \setminus A$ mit $\lambda_n^*(U_\varepsilon \setminus (X \setminus A)) < \varepsilon$. Sei dann $F_\varepsilon = X \setminus U_\varepsilon$.

„$\Leftarrow$“ Sei $B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_{1/k}$ mit $F_{1/k} \subset A$ abgeschlossen und $\lambda_n^*(A \setminus F_{1/k}) < \frac{1}{k}$. Setze $N = A \setminus B$

$$\overset{\text{analog}}{\implies} \lambda_n^*(N) = 0 \implies \underbrace{B}_{\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} \cup \underbrace{N}_{\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} = A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$$

$\square$

Bemerkung

(i) Wie aus dem Beweis ersichtlich, reicht es für die Lebesgue–Meßbarkeit von A aus, dass A nur nach (i) von außen oder nur nach (ii) von innen approximierbar ist.

(ii) Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, dann ist

$$\lambda_n(A) = \inf\{\lambda_n(U) \mid U \text{ offen}, A \subset U\} = \sup\{\lambda_n(F) \mid F \text{ abgeschlossen}, F \subset A\}$$

(iii)

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) &\iff A = (\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i) \cup N \qquad F_i \text{ abgeschlossen, } N \text{ ist } \lambda_n\text{–Nullmenge} \\ &\iff A = (\bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_i) \setminus N \qquad U_i \text{ offen, } N \text{ ist } \lambda_n\text{–Nullmenge} \end{aligned}$$

(iv) A ist genau dann eine λ_n^*–Nullmenge, falls $\forall \varepsilon > 0$ Würfel $W_1, W_2, \ldots$ existieren mit

$$A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \operatorname{Int}(W_i) \quad \text{und} \quad \sum_i \lambda_n(W_i) < \varepsilon$$

Verhalten von λ_n unter Abbildungen

Satz 47.4
Sei $T : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^1$–Abb. Ist A eine λ_n–Nullmenge, dann ist $T(A)$ eine λ_n–Nullmenge.

Beweis: Sei $U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i$ mit $\operatorname{cl} Q_i \subset U$.

$$T(A) = T(A \cap \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i) = T(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A \cap Q_i) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} T(A \cap Q_i)$$

Also reicht es zu zeigen, dass $T(A \cap Q_i)$ eine λ_n–Nullmenge ist.

Sei $\varepsilon > 0$ fix und $W_1, W_2, \ldots$ Würfel mit

$$A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \operatorname{Int}(W_i) \quad \text{und} \quad \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_n(W_i) < \varepsilon$$

Sei $x \in A \cap Q_i \cap \operatorname{Int} W_j$. Bezeichne $2r_j$ die Kantenlänge von W_j und ξ_j den Mittelpunkt von W_j. Weil $T_{|\operatorname{cl} Q_i}$ lipschitzstetig mit Konstante M_i ist, gilt

$$\|T(\xi_j) - T(x)\| < M_i r_j, \quad \text{denn} \quad \|x - \xi_j\| < r_j$$

Daher liegt $T(x)$ in einem Würfel $\hat{W}_j$ mit Kantenlänge $2M_i r_j$.

$$\implies \qquad T(A\cap Q_i) = T\left((A\cap Q_i)\cap \bigcup_j \operatorname{Int} W_j\right) = \bigcup_j T(A\cap Q_i \cap \operatorname{Int} W_j)$$

$$\implies \qquad T(A\cap Q_i) \subset \bigcup_j \operatorname{Int}\hat{W}_j \quad \text{und} \quad \sum_j \lambda_n(\hat{W}_j) \le \sum_j 2^n (r_j M_i)^n \le M_j^n \sum \lambda_n(W_i) < M_i^n \varepsilon$$

Also ist $T(A\cap Q_i)$ λ_n–Nullmenge. □

Satz 47.5

(i) Sei $T : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene (d.h. das Bild einer abgeschlossenen Menge ist abgeschlossen) $\mathcal{C}^1$–Abbildung. Dann folgt aus $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \implies T(A) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung mit $\det L \neq 0$

$$\implies \lambda_n(L(A)) = |\det L| \cdot \lambda_n(A) \quad \forall A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$$

Beweis: (i) O.B.d.A. $A = (\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i) \cup N$, F_i abgeschlossen, N eine λ_n–Nullmenge

$$T(A) = \underbrace{(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} T(F_i))}_{\text{abg.}} \cup \underbrace{T(N)}_{\text{Nullmenge}} \overset{47.4}{\in} \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$$

(ii) a) Sei $A = Q = [a_1, b_1) \times \ldots \times [a_n, b_n)$. Betrachte

$$\begin{aligned} P &= Q - \mathbf{a} \quad \text{mit} \quad \mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \\ &= [0, b_1 - a_1) \times \ldots \times [0, b_n - a_n) \end{aligned}$$

Setze $\mathbf{b}_j = (b_j - a_j)\mathbf{e}_j$

$$\implies P = \mathcal{P}([\mathbf{b}_1, \ldots \mathbf{b}_n]) := \{x \in \mathbb{R}^n | x = \sum x_j \mathbf{b}_j, \quad 0 \le x_j \le 1\}$$

das *Parallelepiped* von $\{\mathbf{b}_i\}$. Dann gilt $L(P) = \mathcal{P}([L(\mathbf{b}_1), \ldots, L(\mathbf{b}_n)]) = L(Q) - L(\mathbf{a})$.

$$\begin{aligned} \implies \lambda_n(L(Q)) &\overset{\substack{\lambda_n\text{–Translations-}\\ \text{invarianz}}}{=} \lambda_n(L(P)) \overset{!}{=} \operatorname{vol}(P([L(\mathbf{b}_1), \ldots L(\mathbf{b}_n)])) \\ &\overset{\text{Lin.Alg.}}{=} |\det(L(\mathbf{b}_1), \ldots, L(\mathbf{b}_n))| \\ &= \prod (b_i - a_i) |\det(L(\mathbf{e}_1), \ldots, L(\mathbf{e}_n))| \\ &= \lambda_n(Q) |\det L| \end{aligned}$$

b) Sei U offen $\implies U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i$ Quader

$$\begin{aligned} \overset{L \text{ bij.}}{\implies} \lambda_n(L(U)) = \lambda_n(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (Q_i)) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_n(L(Q_i)) \\ &\overset{a)}{=} |\det L| \sum_i \lambda_n(Q_i) \\ &= |\det L| \lambda_n(U) \end{aligned}$$

c) $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ beliebig. Sei ε fix und $A \subset U_\varepsilon$ offen mit $\lambda_n(U_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} &\implies \lambda_n(L(A)) \le \lambda_n(L(U_\varepsilon)) = |\det L| \lambda_n(U_\varepsilon) \le |\det L| \cdot (\lambda_n(A) + \varepsilon) \\ &\overset{\varepsilon\to 0}{\implies} \lambda_n(L(A)) \le |\det L| \cdot \lambda_n(A) \end{aligned}$$

Analog $\exists F_\varepsilon \subset A$ abgeschlossen mit $\lambda_n(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ so dass

$$\begin{aligned}
\lambda_n(A) &= \lambda_n(F_\varepsilon) + \lambda_n(A \setminus F_\varepsilon) < \lambda_n(F_\varepsilon) + \varepsilon \\
\implies |\det L|(\lambda_n(A) - \varepsilon) &\leq |\det L|\lambda_n(F_\varepsilon) \leq |\det L|\lambda_n(U_\varepsilon) \\
&\overset{\text{b)}}{=} \lambda_n(L(U_\varepsilon)) = \lambda_n(L(F_\varepsilon)) + \lambda_n(L(\underbrace{U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon}_{\text{offen}})) \\
&\leq \lambda_n(L(A)) + |\det L| \cdot 2\varepsilon \\
\overset{\varepsilon \to 0}{\implies} |\det L|\lambda_n(A) &\leq \lambda_n(L(A))
\end{aligned}$$

□

Bemerkung Ist $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine euklidische Bewegung, d.h.

$$\begin{aligned}
&F(x) = L(x) + \mathbf{a} \quad \text{mit} \quad L \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \text{ (orth. Abb.)} \quad \text{und} \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \\
\implies &\lambda_n(F(A)) = \lambda_n(L(A)) = \lambda_n(A), \quad \text{da} \quad \det L = \pm 1
\end{aligned}$$

§48 Messbare Funktionen

Es soll ein Integralbegriff definiert werden, der das Riemann–Integral erweitert. Bekanntlich ist die

$$\text{Dirichlet–Funktion} \quad f : [0,1] \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ irrational} \\ 1 & x \text{ rational} \end{cases}$$

nicht Riemann–integrierbar, da in jeder endlichen Zerlegung von $[0,1]$ jedes Teilintervall rationale und irrationale Punkte enthält.

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Es sollen Integrale für Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ definiert werden. Es muss dazu eine Teilmenge „geeigneter“ Funktionen ausgewählt werden (da es sonst Gegenbeispiele analog zum Banach–Tarski–Paradox gibt).

Definition und Eigenschaften messbarer Funktionen

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $E \subset X$ beliebig.

$$\mathcal{A}_E = \mathcal{A} \cap E = \{A \cap E : A \in \mathcal{A}\}$$

$\mathcal{A}_E$ ist wieder eine σ–Algera. Die „(von $\mathcal{A}$) auf E induzierte“ σ–Algebra.

Definition 48.1
*Seien $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ messbare Räume, $E \subset X$. $f : E \to Y$ heißt $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$–*messbar, *wenn für alle $B \in \mathcal{B}$ gilt $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_E$.*

Es gelten folgende erste Eigenschaften:

Satz 48.2
$(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ messbare Räume

(i) *Falls $\mathcal{B}$ von einem System $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$ erzeugt wird, dann ist $f : X \to Y$ genau dann $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$–messbar, falls $\forall S \in \mathcal{S} : f^{-1}(S) \in \mathcal{A}$, bzw. allgemeiner*

$$E \subset X, f : E \to Y \quad \textit{messbar} \qquad \iff \forall S \in \mathcal{S} : f^{-1}(S) \in \mathcal{A}_E$$

(ii) *$f : X \to Y$ $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$–messbar, $E \subset X$, dann ist auch $f_{|E} : E \to Y$ $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$–messbar.*

(iii) *Sei $X = \bigcup_{i=1}^\infty X_i$, $X_i \in \mathcal{A}$ eine Überdeckung, $f : X \to Y$ eine Abbildung mit $f_{|X_i}$ $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$–messbar für alle $i \in \mathbb{N}$, dann ist auch f $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$–messbar.*

(iv) *$(X, \mathcal{A}, \mu)$ sei ein vollständiger Maßraum, $N \subset X$ eine Nullmenge, dann ist jede Abbildung $f : N \to Y$ $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$–messbar. Insbesondere gilt: Sind $f, g : X \to Y$ Abbildungen mit f messbar, g ist nur auf einer Nullmenge $N \subset X$ von f verschieden, dann ist auch g messbar.*

Beweis: (i) Betrachte $\tilde{\mathcal{B}} = f_*(\mathcal{A}_E) = \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_E\}$, diese ist eine σ–Algebra (nach Aufgabe 1.3).

$$\mathcal{S} \subset \tilde{\mathcal{B}} \implies \mathcal{B} = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S}) \subset \tilde{\mathcal{B}} \implies f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_E$$

(ii) Für alle $B \in \mathcal{B}$ gilt

$$f_{|E}^{-1}(B) = \underbrace{f^{-1}(B)}_{\in \mathcal{A}} \cap E \in \mathcal{A}_E$$

(iii) $X_i \in \mathcal{A} \implies \mathcal{A}_{X_i} \subset \mathcal{A}$.

$$\forall B \in \mathcal{B} \quad (f_{|X_i})^{-1}(B) =: A_i \in \mathcal{A}_{X_i} \subset \mathcal{A} \implies f^{-1}(B) = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

(iv) 1) $f : N \to Y$, $f^{-1}(B) \subset N \; \forall B \in \mathcal{B}$. Da $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vollständig, ist auch $f^{-1}(B)$ als Nullmenge in $\mathcal{A}$ enthalten.

2) $f, g : X \to Y$, $N = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ Nullmenge.

$$X = X_1 \cup X_2, \quad X_1 = X \setminus N, \quad X_2 = N$$

Wende iii) und iv.1) an.

□

Ist (Y, d) ein metrischer Raum, so wird, falls nicht anders angegeben, die σ–Algebra der Borelmengen

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(Y) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}(Y)) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{F}(Y))$$

verwendet.

Definition 48.3
Seien $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer und (Y, d) ein metrischer Raum. Dann heißt $f : X \to Y$ $\mathcal{A}$–messbar, falls f $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(Y))$–messbar ist. Insbesondere ist f $\mathcal{A}$–messbar, falls $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ für alle offenen Teilmengen $U \subset Y$.

Korollar 48.4
Seien $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer und (Y_1, d_1), (Y_2, d_2) metrische Räume, sowie $h : Y_1 \to Y_2$ stetig. Dann ist für jede $\mathcal{A}$–messbare Abbildung $f : X \to Y$ auch die Verknüpfung $h \circ f$ $\mathcal{A}$–messbar.

Beweis: Sei $V \subset Y_2$ offen. Dann ist auch $U = h^{-1}(V)$ offen und

$$(h \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(h^{-1}(V)) = f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$$

□

Die Borelmengen von $\mathbb{R}$ werden von den Intervallen $[a, +\infty)$ bzw. $(a, +\infty)$ erzeugt.

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_\sigma\left(\{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}\right)$$

Korollar 48.5
Seien $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) f *ist* $\mathcal{A}$*–messbar*

(ii) $\{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathcal{A} \; \forall a \in \mathbb{R}$

(iii) $\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{A} \; \forall a \in \mathbb{R}$

(iv) $\{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathcal{A} \; \forall a \in \mathbb{R}$

(v) $\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{A} \; \forall a \in \mathbb{R}$

Zur einfacheren Formulierung von Konvergenzaussagen erweitert man $\mathbb{R}$ durch Hinzufügen von $+\infty$ und $-\infty$ zu

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

mit den Rechenregeln:

(i) $(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$

(ii) $(\pm\infty) + a = a + (\pm\infty) = \pm\infty$

(iii) $(\pm\infty) \cdot a = a \cdot (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty & \text{, falls } a \in (0, +\infty] \\ \mp\infty & \text{, falls } a \in [-\infty, 0) \end{cases}$

und den Vereinbarungen:

$$(+\infty) + (-\infty) = (-\infty) + (+\infty) = 0 \qquad (\pm\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (\pm\infty) = 0$$

Damit ist $\overline{\mathbb{R}}$ bzgl. „+“ und „·“ abgeschlossen. Die Operationen sind weiterhin kommutativ, aber *nicht mehr* assoziativ.

Eine Teilmenge $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ ist offen, falls $A \cap \mathbb{R}$ offen ist und

$$+\infty \in A \implies \exists a \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad (a, +\infty] \subset A \qquad -\infty \in A \implies \exists b \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad [-\infty, b) \subset A$$

Abbildungen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ werden „numerische“ Funktionen genannt.

Die Borelmengen von $\overline{\mathbb{R}}$ ergeben sich als

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}(\overline{\mathbb{R}})) = \{A \cup E : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ E \subset \{-\infty, +\infty\}\}$$

Definition 48.6
Sei $(\mathcal{A}, X)$ ein messbarer Raum. Dann heißt $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$–messbar, falls f $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$–messbar ist.

Bemerkung Die Charakterisierung $\mathcal{A}$–messbarer Funktionen in 48.5 gilt auch für numerische Funktionen.

Satz 48.7
Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum.

(i) Sind $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$–messbar, so auch $f \pm g$, $f \cdot g$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$, $|f|$.

(ii) $f = (f_1, \ldots, f_n) : X \to \mathbb{R}^n$ ist $\mathcal{A}$–messbar gdw. jedes f_i, $i = 1, \ldots, n$ $\mathcal{A}$–messbar ist.

(iii) $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}, n \in \mathbb{N}$, seien $\mathcal{A}$–messbar. Dann sind auch $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ und $\liminf_{n\to\infty} f_n$ $\mathcal{A}$–messbar.

Aus (iii) folgt, dass falls $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in X$, d.h. f ist punktweiser Grenzwert der f_n, dann dies ein messbares f ergibt, falls f_i messbar. Im Gegensatz dazu wird Stetigkeit bei (nur) punktweise Konvegenz nicht erhalten.

Beweis: Hilfsaussage für beliebiges $a \in \overline{\mathbb{R}}$

$$N \equiv \{x \in X : f(x) + g(x) < a\} \stackrel{!}{=} \bigcup_{y\in\mathbb{Q}} \{f(x) < y\} \cap \{g(x) < a - y\} \equiv M$$

„$\supset$“ trivial, da $x \in M \implies f(x) < y$ und $g(x) < a - y \implies f(x) + g(x) < a - y + y = a$, so dass $x \in f^{-1}(-\infty, a)$

„$\subset$“

$$\begin{aligned} x \in N &\implies f(x) < y < a - g(x) \quad \text{für ein} \quad y \in \mathbb{Q}, \quad \text{da die rationalen Zahlen dicht liegen} \\ &\implies f(x) < y \wedge g(x) < a - y \implies x \in M \\ &\implies N = M, \quad \text{damit gilt die Hilfsaussage.} \end{aligned}$$

(i) Laut Voraussetzung sind f, g messbar und somit alle $\{f(x) < y\}$ und $\{g(x) < a - y\}$ Elemente aus der σ–Algebra $\mathcal{A}$. Wegen deren Abgeschlossenheit bzg. abzählbarer Schnitte und Vereinigungen gilt auch $N = M \in \mathcal{A}$.

$$f - g = f + (-1)g \quad \text{messbar, da für beliebiges } c \neq 0$$
$$\{c\, g(x) < a\} = \begin{cases} \{g(x) < a/c\} & \text{falls } c > 0 \\ \{g(x) > a/c\} & \text{falls } c < 0 \end{cases}$$

Also erbt $(-1)g$ die Messbarkeit von g und damit auch $f - g$.

(ii) Da $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ von Quadern $Q = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \ldots [a_n, b_n)$ erzeugt wird, betrachte Urbild

$$f^{-1}(Q) = \{x \in X : a_i \leq f_i(x) < b_i \quad \text{für} \quad i = 1 \ldots n\} = \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}([a_i, b_i)) = \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : a_i \leq f_i(x) < b_i\}$$

Also folgt aus der Messbarkeit aller Komponentenfunktionen f_i unmittelbar die Messbarkeit der Vektorfunktion f. Umkehrung in Übung.

(iii) $\{x \in X : \sup f_n(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \in X : f_n(x) > a\}$. Also folgt Messbarkeit von $\sup f_n$ aus Messbarkeit der f_n ($\implies$ inf entsprechend).

$$\limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \inf_m \sup_{n\geq m} f_n(x) = \inf_m \overline{f}_m \quad \text{mit} \quad \overline{f}_m(x) = \sup_{n\geq m} f_n(x) \quad \text{messbar nach (iii) erste Aussage}$$

Damit ist $\inf_{m\geq 0} \overline{f}_m$ auch messbar. Daraus folgt, wenn

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x), \quad \text{dann ist auch } f \text{ messbar.}$$

Reste siehe Übung. Hinweis für $f \cdot g$: Nutze die *Apollonius–Identität*

$$f \cdot g = \tfrac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2]$$

□

Bemerkung (zu „Numerische" Funktion, d.h. Bildbereich $\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$)

(i) Name merkwürdig. Erklärung: Analytiker denken „numerisch" bedeutet „keine strenge Mathematik" Englisch: „Extended Real Valued Function", d.h. erweiterter reeller Wertebereich

(ii) Hierachie

$c/0 = \text{sign}(c)\infty$	für $c \neq 0$ okay
$= \pm\infty$	in IEEE Arithmetik
$0 \cdot \infty = ???$	$= NaN \equiv$ (Not a Number)
Test in C:	$(x == x)$ ergibt $\begin{cases} 1 = wahr & \text{falls } x \neq NaN \\ 0 = falsch & \text{falls } x \equiv NaN \end{cases}$

(iii) Es gab und gibt viele Versuche, $\mathbb{R}$ um unendliche Größen zu erweitern, so dass algebraische und topologische Eigenschaften erhalten bleiben („Nonstandard Analysis")

(iv) Bis auf Weiteres sind Fallunterscheidungen nötig.

Definition 48.8 (Einfache Funktionen)
auch Treppenfunktionen, stückweise konstante Funktionen

(i) Für $A \subset X$ definiert man die charakteristische Funktion $\chi_A : X \to \{0, 1\}$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } x \in A \\ 0 & \textit{falls } x \notin A \end{cases}$$

χ_A ist offensichtlich messbar gdw. $\chi_A^{-1}(1) = A \in \mathcal{A}$

(ii) $f : X \to \mathbb{R}$ heißt einfach, *wenn für n paarweise disjunkte Mengen $A_i \subset X$ ($A_i \cap A_j = \emptyset$ falls $i \neq j$) und reelle Koeffizienten $c_i \in \mathbb{R}$*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}(x)$$

Äquivalenterweise kann man verlangen, dass f auf X nur endlich viele unterschiedliche Werte in $\mathbb{R}$ annimmt.

Satz 48.9
Falls $f : X \to [0, \infty]$ messbar, dann ist es monoton von unten durch messbare einfache Funktion $f_k : X \mapsto [0, \infty)$ annäherbar, d.h. $f_k(x) \nearrow f(x)$ für alle $x \in X$.

Beweis: Betrachte zunächst einfache Funktionen $\varphi_k : [0,\infty) \to [0,\infty)$ mit $\varphi_k(y) \nearrow y$ für alle $y \in [0,\infty)$, Konstruktion später. Dann folgt unmittelbar für $f_k(x) = \varphi_k(f(x))$, dass

$$f_k(x) = \varphi_k(f(x)) \underset{k\to\infty}{\nearrow} \varphi(f(x)) = f(x)$$

Aus der Kettenregel folgt die Messbarkeit von f_k aus der Messbarkeit von f und φ_k.

Definition der φ_k

$$\varphi_k(y) = \begin{cases} k & \text{falls } y \geq k \\ \frac{i-1}{2^k} & \text{falls } \frac{i-1}{2^k} \leq y < \frac{i}{2^k} \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq k \cdot 2^k \end{cases}$$

□

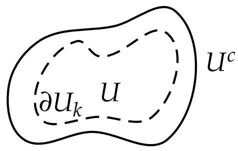
Satz 48.10 (Erhaltung von Messbarkeit bei punktweiser Konvergenz)
$(X, \mathcal{A})$ messbarer, (Y, d) metrischer Raum, $f_i : X \to Y$ messbar und $f(x) = \lim_{i\to\infty} f_i(x)$ für alle $x \in X$, dann ist auch f messbar.

Beweis: Es reicht zu zeigen, dass für alle offenen (und deswegen auch messbaren) $U \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(U)$ messbar ist. Es ist

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k\,, \quad U_k \equiv \left\{ y \in Y : d(y, U^c) > \tfrac{1}{k} \right\}$$

wobei die U_k für alle k offen und damit auch messbar sind.

$$\begin{aligned} f^{-1}(U_k) &= \left\{ x \in X : d(f(x), U^c) > \tfrac{1}{k} \right\} \quad \text{sowie} \quad \lim f_i(x) = f(x) \\ &= \left\{ x \in X : \exists j \in \mathbb{N} \forall i \geq j : \; d(f_i(x), U^c) > \tfrac{1}{k} \right\} \\ &= \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{i=j}^{\infty} \underbrace{\left\{ x \in X : d(f_i(x), U^c) > \tfrac{1}{k} \right\}}_{f_i^{-1}(U_k)} \end{aligned}$$



Messbarkeit der $f_i^{-1}(U_k)$ folgt aus der Messbarkeit der Folgenelemente f_i. Schnitt und Vereinigung bleibt in σ–Algebra $\Longrightarrow$ f messbar. □

Satz 48.11
Sei $E \subset X$ messbar mit $\mu(E) < \infty$. Betrachte die Funktionenfolge $f_k : E \to \mathbb{R}$, messbar und $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ für $x \in E$. Dann existieren für alle Paare $\delta > 0 < \varepsilon$ ein messbares $A \subset E$ und ein k_0, so dass $\mu(A) < \delta$ und

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \textit{für} \quad x \in E \setminus A \quad \textit{und} \quad k \geq k_0$$

Beweis: Betrachte

$$G_k = \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \quad \text{und} \quad E_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} G_k \equiv \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon \quad \text{für ein } k \geq m \quad \}$$

Offensichtlich ist E_m eine monotone Folge, d.h. $E_{m-1} \supset E_m \supset E_{m+1} \ldots$

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} E_m = \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ für unendlich viele } k\} = \emptyset \quad \text{wegen punktweiser Konvergenz.}$$

Wegen Stetigkeit von oben nach Satz 46.6 gilt

$$\lim_{m\to\infty} \mu(E_m) = \mu\Big(\bigcap_{m=1}^{\infty} E_m\Big) = \mu(\emptyset) = 0$$

Also existiert ein m, so dass für $A = E_m$ gilt $\mu(A) < \delta$ und $X \in E \setminus A$ impliziert $|f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ für alle $k \geq m$. □

§49 Integration messbarer Funktionen

Einfache Funktionen sind Verallgemeinerungen von Treppenfunktionen, so dass man sinnvollerweise das Riemannintegral in $[a,b] \subset \mathbb{R}$ verallgemeinert zu

$$\int_E \varphi \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(A_k \cap E) \quad \text{für} \quad \varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{A_k} \quad \text{und} \quad A_k, E \text{ messbar}$$

Satz 49.1 (Eigenschaften des Integrals für einfache φ)

(i) unabhängig vom Repräsentanten von φ (Eindeutigkeit)

(ii) $\int_E (\alpha\varphi + \beta\psi)\, d\mu = \alpha \int_E \varphi\, d\mu + \beta \int_E \psi \, d\mu$ (Linearität)

(iii) $\int_{E_1 \cup E_2} \varphi \, d\mu = \int_{E_1} \varphi\, d\mu + \int_{E_2} \varphi \, d\mu$ für $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ (Additivität bzgl. E)

(iv) $\int_E \varphi\, d\mu \leq \int_E \psi \, d\mu$ falls $\varphi(x) \leq \psi(x)$ für $x \in E$ (Monotonie)

(v) $\left|\int_E \varphi \, d\mu\right| \leq \int_E |\varphi|\, d\mu \leq \mu(E)\|\varphi\|_\infty$ für $\|\varphi\|_\infty = \sup_{x\in E} |\varphi(x)|$

(vi) $\int_A \varphi\, d\mu \leq \int_B \varphi \, d\mu$ falls $\varphi \geq 0$ und $A \subset B$

wobei E messbar, φ, ψ einfach auf X und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $|\cdot|$ der übliche Betrag.

Beweis: Einfaches Nachrechnen, eventuell in Übung

Ziel: Integral so auf möglichst alle messbaren Funktionen erweitern, dass (i)-(vi) gültig bleiben. Abgesehen von unendlichen Werten ist Messbarkeit hinreichend und notwendig für Integrierbarkeit.

Satz 49.2
Sei $E \subset X$ messbar, $\mu(E) < \infty$ und $f : E \to \mathbb{R}$ mit Schranke $M \geq |f(x)|$ für $x \in E$. Dann gilt mit φ und ψ einfache Funktionen

$$\sup_{\varphi \leq f} \int_E \varphi \, d\mu = \inf_{\psi \geq f} \int_E \psi \, d\mu$$

gdw. f messbar.

Beweis: „$\Leftarrow$" Für beliebiges, aber festes m betrachte Niveaumengen (messbar)

$$E_k = \left\{ x \in E : \tfrac{(k-1)M}{m} < f(x) \leq \tfrac{k}{m} M \right\} \quad \text{für} \quad k = -m, -m+1, \dots, m$$

$$\begin{aligned}
\varphi_m(x) &= \sum_{k=-m}^{m} \frac{(k-1)M}{m} \chi_{E_k}(x) \\
\psi_m(x) &= \sum_{k=-m}^{m} \frac{kM}{m} \chi_{E_k}(x) \\
&\implies \varphi_m(x) \leq f(x) \leq \psi_m(x) \quad \text{für} \quad x \in E \\
\int_E \varphi_m \, d\mu &\equiv \sum_{k=-m}^{m} \frac{(k-1)M}{m} \mu(E_k) \leq \int_E \psi_m \, d\mu \equiv \sum_{k=-m}^{m} \frac{kM}{m} \mu(E_k) \\
\int_E \psi_m \, d\mu - \int_E \varphi_m \, d\mu &= \int_E (\psi_m - \varphi_m)\, d\mu = \sum_{k=-m}^{m} \left(\frac{kM}{m} - \frac{(k-1)M}{m} \right) \mu(E_k) \\
&= \sum_{k=-m}^{m} \frac{M}{m} \mu(E_k) = \frac{M}{m} \sum_{k=-m}^{m} \mu(E_k) = \frac{M}{m} \mu(E) \\
\inf_{\psi \geq f} \int_E \psi \, d\mu - \sup_{\varphi \leq f} \int_E \varphi\, d\mu &\leq \inf_{\psi_m \geq f} \int_E \psi_m \, d\mu - \sup_{\varphi_{\tilde{m}} \leq f} \int_E \varphi_{\tilde{m}} \, d\mu \\
&\leq \inf_{\psi_m \geq f} \int_E \psi_m \, d\mu + \inf_{\varphi_m \leq f} \int_E (-\varphi_m)\, d\mu \\
&\leq \inf_{m \in \mathbb{N}} \int_E (\psi_m - \varphi_m)\, d\mu \leq \inf_{m\in\mathbb{N}} \frac{M}{m} \mu(E) = 0 \implies \inf_{\psi \geq f} \int_E \psi \, d\mu \quad \leq \sup_{\varphi \leq f} \int_E \varphi \, d\mu
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Gleichheit wie behauptet, da aus $\varphi \leq f \leq \psi$ wegen Monotonie des Integrals bei einfachen Funktionen folgt $\int_E \varphi \, d\mu \leq \int_E \psi \, d\mu \implies \sup \leq \inf$.

„$\Rightarrow$“ Seien $\varphi_n \leq f$ eine wachsende und $\psi_n \geq f$ eine fallende Folge einfacher Funktionen, für die gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \varphi_n \, d\mu = \sup_{\varphi \leq f} \int_E \varphi \, d\mu = \inf_{\psi \geq f} \int_E \psi \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E \psi_n \, d\mu$$

Diese müssen nach Voraussetzung von „$\Rightarrow$“ existieren. Daraus folgt, dass

$$\int_E \psi_n \, d\mu - \int_E \varphi_n \, d\mu = \int_E (\psi_n - \varphi_n) \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Seien $\varphi_* = \lim_{n\to\infty} \varphi_n$ und $\psi_* = lim_{n\to\infty}\psi_n$, diese erfüllen punktweise $\varphi_*(x) \leq f(x) \leq \psi_*(x)$ und sind nach Satz 48.7 messbar.

Annahme

$$\mu\{x \in E : \psi_*(x) > \varphi_*(x)\} > 0$$

dann folgt für ein $\varepsilon > 0$, dass auch

$$\mu \underbrace{\{x \in E : \psi_*(x) > \varphi_*(x) + \varepsilon\}}_{\equiv A_\varepsilon} > 0$$

$$\text{und für alle } n: \ \psi_n(x) \geq \psi_*(x) > \varphi_*(x) + \varepsilon \geq \varphi_n(x) + \varepsilon \quad \forall x \in A_\varepsilon$$

Dann gilt

$$\int_E \underbrace{(\psi_n - \varphi_n)}_{\geq 0} \, d\mu \geq \int_{A_\varepsilon} (\psi_n - \varphi_n) \, d\mu \geq \int_{A_\varepsilon} \varepsilon \, d\mu \geq \varepsilon\mu(A_\varepsilon) > 0$$

Da rechte untere Schranke für alle n gilt, widerspricht dies der Voraussetzung, dass $\int_E (\psi - \varphi) \, d\mu \to 0$.

Also gilt $\mu\{x \in E : \varphi_*(x) < \psi_*(x)\} = 0$ und daher $\int_E \varphi_*(x) \, d\mu = \int_E \psi_*(x) \, d\mu$ und mit $\mu\{x \in E : f(x) \neq \varphi_*(x)\} = 0$ folgt aus der Vollständigkeit des Maßes, dass auch f messbar ist. □

Definition 49.3
Falls $E \subset X$ und f messbar mit f beschränkt, setze (bei $\psi \geq f$ einfache Funktion)

$$\int_E f \, d\mu = \inf_{\psi \geq f} \int_E \psi \, d\mu$$

Falls $\mu = \lambda_n$ das Lebesgue–Maß spricht man vom Lebesgue–Integral *und schreibt einfach*

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f(x) dx$$

M.a.W. „Default–Maß“ ist Lebesgue–Maß.

Korollar 49.4
Falls $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann–integrierbar, dann ist f messbar und das Lebesgue–Integral ergibt den selben Wert wie das Riemann–Integral.

Beweis: Wie beim Riemann–Integral auftretenden Unter- und Obersummen lassen sich als Integral über einfache, d.h. Treppenfunktionen interpretieren, die mit der „neuen“ Definition übereinstimmen. Konvergenz und damit nach Satz 49.2 Messbarkeit von f folgen. □

Beispiel (die Umkehrung gilt nicht)

$$\tilde{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cap [0, 1], \qquad \chi_{\tilde{\mathbb{Q}}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \tilde{\mathbb{Q}}; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

ist nicht Riemann–integrierbar auf $[0, 1]$, da alle Untersummen $= 0$ und alle Obersummen $= 1$ für beliebig feine Zerlegung. $\chi_{\tilde{\mathbb{Q}}}$ ist Borel–messbar $\Longrightarrow$ Lebesgue–messbar.

$$\chi_{\tilde{\mathbb{Q}}}^{-1}(U) = \begin{cases} [0, 1] & \text{, falls } 0 \in U \ni 1 \\ \tilde{\mathbb{Q}}^c & \text{, falls } 1 \notin U \ni 0 \\ \tilde{\mathbb{Q}} & \text{, falls } 0 \notin U \ni 1 \\ \emptyset & \text{, falls } 0, 1 \notin U \end{cases} \quad \text{für offenes } U \subset \mathbb{R}$$

$\tilde{\mathbb{Q}} = \bigcup_{j=1}^{\infty}\{q_i\}$ mit $\tilde{\mathbb{Q}} = \{q_1, q_2, \ldots\}$ auszählen ist Borelmenge und auch $\tilde{\mathbb{Q}}^c$ und damit

$$\int_{[0,1]} \chi_{\tilde{\mathbb{Q}}}(x)dx = 0$$

Definition 49.5
Falls $f : X \to [0, \infty]$ *messbar und* $E \subset X$ *messbar, setze*

$$\int_E f\,d\mu = \sup\left\{\int_E \varphi\,d\mu : 0 \le \varphi \le f, \textit{einfach}\right\}$$

Lemma 49.6
Das obige Integral erfüllt aus 49.1 die Eigenschaften (iii),(v), (vi) und $\int_E \alpha f\,d\mu = \alpha \int_E f\,d\mu$ *falls* $\alpha \ge 0$.

Beweis: Siehe Übung

Lemma 49.7 (von Fatou)
$0 \le f_n$ *messbar,* $f = \liminf_{n\to\infty} f_n$ *punktweise,* $E \subset X$ *messbar.*

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu \ge \int_E \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu = \int_E f\,d\mu \qquad \left(= \sup_{\varphi \le f \text{ einfach}} \int_E \varphi\,d\mu\right)$$

(Vergleiche $\liminf(a_n + b_n) \ge \liminf a_n + \liminf b_n$.)

Beweis: Es reicht zu zeigen, dass $\liminf \ge \int_E \varphi\,d\mu$ für beliebiges einfaches $\varphi \le f$.

1. Fall: $\int_E \varphi\,d\mu = \infty$. Setze $A = E \setminus \varphi^{-1}(0)$, dann ist auch $\mu(A) = \infty$. Es gibt ein $a > 0$ mit $\varphi(x) > a > 0$ für jedes $x \in A$. Konstruiere

$$A_n = \{x \in E : f_k(x) > a \quad \text{für alle} \quad k \ge n\} \implies A_n \subset A_{n+1},$$
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset A \implies \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \ge \mu(A) = \infty;$$
$$\int_E f_n\,d\mu \ge a\mu(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \implies \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu = \infty$$

2. Fall: $0 \le \int_E \varphi\,d\mu < \infty$. Sei $0 \le \varepsilon$ beliebig,

$$A_n \equiv \{x \in E : f_k(x) > (1-\varepsilon)\varphi(x) \text{ für alle } k \ge n\}$$
$$A_n \subset A_{n+1} \ldots \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset A, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} (A \setminus A_n) = \emptyset$$

$\mu(A \setminus A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. D.h., ab einem bestimmten n_0 gilt $\mu(A \setminus A_n) < \varepsilon$ falls $n \ge n_0$. Mit $\varphi(x) \le M$ für $x \in E$:

$$\begin{aligned}\int_E f_n\,d\mu &\overset{f_n \ge 0 \text{ + Monot.}}{\ge} \int_{A_n} f_n\,d\mu \ge (1-\varepsilon)\int_{A_n} \varphi\,d\mu \\ &= (1-\varepsilon)\left(\int_A \varphi\,d\mu - \int_{A\setminus A_n} \varphi\,d\mu\right) \\ &\ge (1-\varepsilon)\left(\int_E \varphi\,d\mu - \varepsilon M\right) \quad \text{da} \quad \varphi(x) \le M\end{aligned}$$

für $\varepsilon \to 0$ ergibt sich genau die Behauptung. □

Korollar 49.8 (Monotone Konvergenz)
Falls $0 \le f_n \le f$ *auf* E*, alles messbar, und* $\liminf_{n\to\infty} f_n = f$ *punktweise in* E*, dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu = \int_E f\,d\mu$$

Beweis: Aus Monotonie des Integrals folgt zunächst

$$\int_E f\,d\mu \geq \int_E f_n\,d\mu$$
$$\implies \int_E f\,d\mu \geq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu \overset{\text{Fatou}}{\geq} \int_E f\,d\mu$$

Also gilt Gleichheit und $\liminf f_n$ ist ein echter Grenzwert. □

Lemma 49.9 (Linearität des Integrals für nichtnegative Funktionen $f \geq 0 \leq g$)

$$\int_E (\alpha f + \beta g)\,d\mu = \alpha \int_E f\,d\mu + \beta \int_E g\,d\mu \quad mit \quad \alpha \geq 0 \leq \beta$$

Beweis: Nach Satz 48.9 gibt es einfache Funktionen $\varphi_n \nearrow f$ und $\psi_n \nearrow g$. O.B.d.A. $\varphi_n \geq 0$ und $\psi_n \geq 0$ da sonst $\varphi_n \to \max(0, \varphi_n)$ und $\psi_n \to \max(0, \psi_n)$ ersetzt werden kann.

$$\lim_{n\to\infty} \alpha\varphi_n(x) + \beta\psi_n(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) \quad \text{auch von unten}$$

Aus monotoner Konvergenzaussage folgt

$$\int_E (\alpha f + \beta g)\,d\mu \overset{49.8}{=} \lim_{n\to\infty} \int_E (\alpha\varphi_n + \beta\psi_n)\,d\mu \overset{49.1}{=} \lim_{n\to\infty} \alpha \int_E \varphi_n\,d\mu + \beta \int_E \psi_n\,d\mu \overset{49.8}{=} \alpha \int_E f\,d\mu + \beta \int_E g\,d\mu$$

□

Korollar 49.10
$f_n \geq 0$, E messbar

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n\,d\mu$$

Beweis: Folgt aus Anwendung von 49.8 auf Partialsummen

$$\tilde{f}_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \nearrow f(x) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

□

Definition 49.11

(i) $f : X \to [0, \infty]$ *heißt* integrierbar *auf $E \subset X$ falls*

$$\int_E f\,d\mu < \infty$$

(ii) $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *heißt integrierbar auf E, wenn* $f^+(x) = \max(0, f(x))$ *und* $f^-(x) = \max(0, -f(x))$ *beide integrierbar sind. Man setzt dann*

$$\int_E f\,d\mu = \int_E f^+\,d\mu - \int_E f^-\,d\mu$$

da $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ *nach Definition.*

Lemma 49.12
Falls f, g auf E integrierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(i) $\int_E (\alpha f + \beta g)\,d\mu = \alpha \int_E f\,d\mu + \beta \int_E g\,d\mu$

(ii) für messbares h folgt aus $|h| \leq g \geq 0$ dass auch h integrierbar ist mit

$$\left| \int_E h\,d\mu \right| \leq \int_E |h|\,d\mu \leq \int_E g\,d\mu < \infty$$

Beweis: (i) siehe Übung

(ii)

$$\begin{aligned}
0 &\le h^+(x) \le |h(x)| \le g(x) \\
0 &\le h^-(x) \le |h(x)| \le g(x) \\
E^+ &= \{x \in E : h(x) > 0\} \\
E^- &= \{x \in E : h(x) \le 0\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_E h^+ \, d\mu = \int_{E^+} h^+ \, d\mu \le \int_{E^+} |h| \, d\mu \le \int_{E^+} g \, d\mu < \infty \\
\int_E h^- \, d\mu = \int_{E^-} h^- \, d\mu \le \int_{E^-} |h| \, d\mu \le \int_{E^-} g \, d\mu < \infty
\end{aligned}$$

$\implies$ h integrierbar

$$\left| \int_E h \, d\mu \right| = \left| \int_{E^+} h^+ \, d\mu - \int_{E^-} h^- \, d\mu \right| \le \int_{E^+} h^+ \, d\mu + \int_{E^-} h^- \, d\mu \le \int_E |h| \, d\mu \le \int_E g \, d\mu$$

□

Satz 49.13 (Beschränkte Konvergenz nach Lebesgue)
Falls $f_n(x) \to f(x)$ und $|f_n(x)| \le g(x)$ für $x \in E$ mit g auf E integrierbar, dann gilt f integrierbar und

$$\int_E f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu$$

Beweis: Betrachte die nicht–negativen Funktionen

$$\begin{aligned}
0 \le g + f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g + f \ge 0 \\
0 \le g - f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g - f \ge 0
\end{aligned}$$

Nach Fatou

$$\int_E g \, d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_E \pm f_n \, d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_E (g \pm f_n) \, d\mu \overset{\text{Fatou}}{\ge} \int_E (g \pm f) \, d\mu = \int_E g \, d\mu \pm \int_E f \, d\mu$$

$$\begin{aligned}
&\cancel{\int_E g \, d\mu} + \liminf \int_E \pm f_n \, d\mu \ge \cancel{\int_E g \, d\mu} \pm \int_E f \, d\mu \\
&\liminf_n \int_E f_n \, d\mu \ge \int_E f \, d\mu \\
&\liminf_n \int_E -f_n \, d\mu = -\limsup_n \int_E f_n \, d\mu \ge -\int_E f \, d\mu \\
&\liminf_n \int_E f_n \, d\mu \ge \int_E f \, d\mu \ge \limsup_n \int_E f_n \, d\mu
\end{aligned}$$

Daraus folgt Gleichheit und damit die behauptete Konvergenz der Integrale. □

§50 Produktmaße und Integration

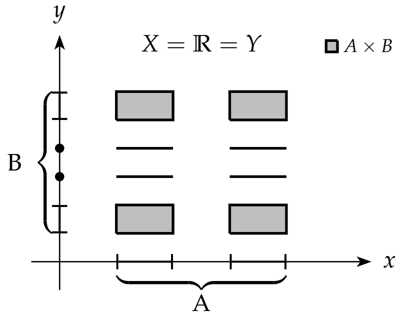
Ziel: Definition und Auswertung von Maßen und Integralen in $\mathbb{R}^n$ durch wiederholte = geschachtelte Integration in $\mathbb{R}$.

Voraussetzung: im ganzen Kapitel: Zwei σ–endliche Maßräume $(X, \mathcal{A}_\sigma, \mu)$, (Y, B_σ, ν) und deren *Cartesisches Produkt* $Z \equiv X \times Y \equiv \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$.
Für einfache Teilmengen von Z, sogenannte Rechtecke

$$A \times B \quad \text{mit} \quad A \in \mathcal{A}_\sigma, \quad B \in \mathcal{B}_\sigma,$$

definiere den Produktinhalt $\lambda = \mu \times \nu$

$$\lambda(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B).$$



Aufgabe: erweitere λ eindeutig von $(\mathcal{A}_\sigma \times \mathcal{B}_\sigma) \subset \mathcal{P}(Z) \equiv \mathcal{P}(X \times Y)$ auf die von $(\mathcal{A}_\sigma \times \mathcal{B}_\sigma)$ in $\mathcal{P}(Z)$ erzeugte σ–Algebra $\mathcal{C}_\sigma$.

Satz 50.1
Die Menge

$$\mathcal{C}_0 \equiv \left\{ \bigcup_{i=1}^{m} (A_i \times B_i) : A_i \in \mathcal{A}_\sigma,\ B_i \in \mathcal{B}_\sigma \text{ für } i = 1 \dots m \right\}$$

bildet eine Algebra, wobei o.B.d.A. Disjunktheit der $(A_i \times B_i)$, d.h. $(A_i \times B_i) \cap (A_j \times B_j) = \emptyset$ falls $i \neq j$, angenommen werden kann. Dann ist für $E = \bigcup_{i=1}^m E_i \in \mathcal{C}_0$ mit $E_i \equiv A_i \times B_i$ durch

$$\lambda(E) = \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i) \cdot \nu(B_i)$$

ein σ–endlicher und σ–additiver Inhalt definiert.

Korollar 50.2
Der Inhalt $\lambda \equiv \mu \times \nu$ lässt sich nach Satz 46.17 eindeutig zu einem Maß λ auf die von $\mathcal{C}_0$ erzeugte σ–Algebra $\mathcal{C}_\sigma$ erweitern. λ wird als Produktmaß *bezeichnet.*

Beweis: Schnittbildung $E = A \times B$, $\tilde{E} = \tilde{A} \times \tilde{B}$

$$E \cap \tilde{E} = \underbrace{(A \cap \tilde{A})}_{\in \mathcal{A}_\sigma} \times \underbrace{(B \cap \tilde{B})}_{\in \mathcal{B}_\sigma} \in \mathcal{C}_0$$

Entsprechend für endliche Vereinigungen $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$, $\tilde{E} = \bigcup_{j=1}^m \tilde{E}_j$

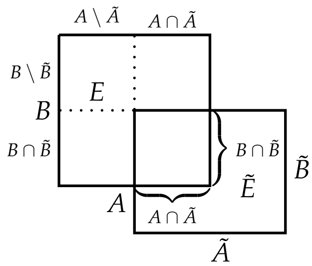
$$E \cap \tilde{E} = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (E_i \cap \tilde{E}_j) \in \mathcal{C}_0$$

weiter $E \setminus \tilde{E} = \left[(B \setminus \tilde{B}) \times (A \setminus \tilde{A})\right] \cup \left[(A \cap \tilde{A}) \times (B \setminus \tilde{B})\right] \cup \left[(B \cap \tilde{B}) \times (A \setminus \tilde{A})\right]$

$E \cup \tilde{E} = (E \setminus \tilde{E}) \cup \tilde{E}$ ist disjunkte Zerlegung $\in \mathcal{C}_0$

$E^c = Z \setminus E = (X \times Y) \setminus E \in \mathcal{C}_0$

$\Longrightarrow$ Algebraeigenschaften gegeben.



Die σ–Endlichkeit folgt allgemein aus der vorausgesetzten σ–Endlichkeit von μ und ν, da

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = X \quad \text{mit} \quad \mu(X_i) < \infty \quad \text{und} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i = Y \quad \text{mit} \quad \nu(Y_i) < \infty$$

und o.B.d.A. $X_i \subset X_{i+1}$, $Y_i \subset Y_{i+1}$, dann gilt für $Z_i = X_i \times Y_i$

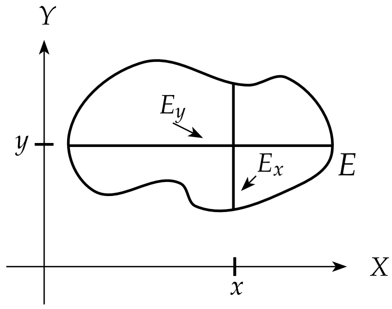
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i = Z \quad \text{und} \quad \lambda(Z_i) = \mu(X_i)\nu(Y_i) < \infty$$

Die σ–Additivtät als Übung. □

Satz 50.3
Falls $E \subset \mathcal{C}_\sigma$, dann sind die Schnitte (eng. „slice")

$$E_x \equiv \{z : (x,z) \in E\} \subset Y \quad \textit{und} \quad E_y \equiv \{z : (z,y) \in E\} \subset X$$

$\mathcal{B}_\sigma$ bzw. $\mathcal{A}_\sigma$ messbar.



Beweis: Sei $S \subset \mathcal{C}_\sigma$ die Menge der E für die diese Behauptung wahr ist. Dann ist zu zeigen, dass $\mathcal{C}_0 \subset S$ und S bzgl. abzählbarer Vereinigungen eine abgeschlossene Algebra ist.

$$\begin{aligned}
E \in \mathcal{C}_0 \implies E &= \bigcup_{i=1}^{m} E_i,\ E_i = A_i \times B_i \\
E_x &= \Big\{ z \in Y : (x,z) \in E \Big\} = \Big\{ z \in Y : (x,z) \in E_i \text{ für ein } i \Big\} \\
&= \Big\{ z \in Y : z \in (E_i)_x \text{ für ein } i \Big\} = \bigcup_{i=1}^{m} (E_i)_x \\
&\text{wobei } (E_i)_x = \Big\{ z : (x,z) \in E_i \Big\} = \Big\{ z : X \in A_i \wedge z \in B_i \Big\} \\
&\qquad\qquad = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } x \notin A_i \\ B_i, & \text{falls } x \in A_i \end{cases} \\
E_x &= \bigcup_{i:\, x \in A_i} B_i \subset \mathcal{B}_\sigma \quad \text{da} \quad B_i \in \mathcal{B}_\sigma \quad \text{nach Voraussetzung.}
\end{aligned}$$

Entsprechend gilt wegen Symmetrie $E_y \subset X$ ist $\mathcal{A}_\sigma$–messbar.

Es wird nun gezeigt, dass für $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ mit $E_i \in S$ auch $E_x \in \mathcal{B}_\sigma$ und $E_y \in \mathcal{A}_\sigma$ und damit $E \in S$. Es gilt

$$\begin{aligned}
E_x &= \Big\{ z \in Y : (x,z) \in E_i \text{ für ein } i \Big\} = \Big\{ z \in Y : z \in (E_i)_x \text{ für ein } i \Big\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Big\{ z \in Y : z \in (E_i)_x \Big\} \\
&= \bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{(E_i)_x}_{\in \mathcal{B}_\sigma \text{ da } E_i \in S} \implies E_x \subset \mathcal{B}_\sigma \quad \text{da dieses System } \sigma\text{–Algebra}
\end{aligned}$$

Entsprechend gilt $E_y \subset \mathcal{A}_\sigma$ und daher $E \subset S$.

Es bleibt der Abschluss unter Komplementbildung zu zeigen.

$$E \in S \implies (Z \setminus E)_x = \Big\{ z \in Y : (x,z) \in Z \setminus E \Big\} = \Big\{ z \in Y : (x,z) \notin E \Big\} = \Big\{ z \in Y : z \notin E_x \Big\} = Y \setminus E_x \in B_\sigma$$

Also gilt $S = \mathcal{C}_\sigma$. □

Satz 50.4
Für $E \in \mathcal{C}_\sigma$ gilt

$$\begin{aligned}
x \to \nu(E_x) &\quad \textit{ist eine } \mathcal{A}_\sigma\textit{–messbare Funktion} \\
y \to \mu(E_y) &\quad \textit{ist eine } \mathcal{B}_\sigma\textit{–messbare Funktion}
\end{aligned}$$

$$\int_X (\nu(E_x))\, d\mu(x) = \int_Y (\mu(E_y)) d\nu(y)$$

Beweis: Sei $S \subset \mathcal{C}_\sigma$ die Menge der $E \in \mathcal{C}_\sigma$, für die die Behauptung gilt. Die erste Aussage ist dann $\mathcal{C}_0 \subset S$.

Betrachte $E \in \mathcal{C}_0$

$$E = \bigcup_{i=1}^{m} \underbrace{A_i \times B_i}_{E_i} \quad \text{disjunkt}$$

$$E_x = \bigcup_{i=1}^{m} (E_i)_x = \bigcup_{x \in A_i} B_i \quad \text{wie im letzten Beweis}$$

$$\nu(E_x) = \sum_{x \in A_i} \nu(B_i) = \sum_{i=1}^{m} \chi_{A_i}(x)\nu(B_i)$$

ist eine einfache Funktion und deshalb messbar.

Entsprechend ist $\mu(E_y)$ einfach und messbar mit $\mu(E_y) = \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i)\chi_{B_i}(y)$. Integration ergibt unmittelbar

$$\begin{aligned}\int_X \nu(E_x)\, d\mu &= \sum_{i=1}^{m} \nu(B_i) \int_X \chi_{A_i}(x)\, d\mu(x) = \sum_{i=1}^{m} \nu(B_i)\mu(A_i) \\ &= \int_Y \mu(E_y) d\nu(y)\end{aligned}$$

Betrachte $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ mit $E_i \in S$, d.h. erfüllt Behauptung. O.B.d.A. $E_i \subset E_{i+1}$ monoton steigend in $X \times Y$ und daher $(E_i)_x \subset (E_{i+1})_x$ monoton steigend in Y.

$$(E_x) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i)_x \implies \nu(E_x) = \lim_{i \to \infty} \nu((E_i)_x)$$

wegen Stetigkeit von unten des Maßes. Die $\nu((E_i)_x)$ sind eine monoton steigende Folge nichtnegativer, messbarer Funktionen. Also ist nach Satz über monotone Konvergenz auch $\nu(E_x)$ messbar und es gilt

$$\int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) = \lim_{i \to \infty} \int_X \nu((E_i)_x)\, d\mu(x)$$

Entsprechend gilt symmetrisch

$$\int_Y \mu(E_y) d\nu(y) = \lim_{i \to \infty} \int_Y \mu((E_i)_y) d\nu(y)$$

Beide Grenzwerte sind gleich, da die E_i bereits die Aussage erfüllen, so dass für alle i gilt, dass

$$\int_Y \mu((E_i)_y) d\nu(y) = \int_X \nu((E_i)_x) d\mu(x)$$

Um Abschluss bzgl. Schnitten zu zeigen, betrachte eine abfallende Folge

$$E_1 \supset \ldots \supset E_i \supset E_{i+1} \supset \ldots$$

1. Fall $E_1 \subset A \times B$ mit $\mu(A) < \infty > \nu(B)$. Wegen Stetigkeit von oben gilt für $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$, dass

$$\nu(E)_x = \lim_{i \to \infty} \nu((E_i)_x) \quad \text{mit} \quad \nu((E_i)_x) < \nu(E_1) < \infty$$

Also haben die $\nu((E_i)_x)$ die messbare Grenzfunktion $\nu(E_x)$ und es gilt wiederum

$$\int_X \nu(E_x)\, d\mu = \lim_{i \to \infty} \int_X \nu((E_i)_x) d\mu = \lim_{i \to \infty} \int_Y \mu((E_i)_y) d\nu = \int_Y \mu(E_y) d\nu$$

wie bei der Vereinigung.

2. Fall $E \not\subset A \times B$ ist in keinem endlichen Rechteck enthalten. Wegen vorausgesetzter σ–Endlichkeit

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i, \quad X_i \subset X_{i+1}, \quad Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i, \quad Y_i \subset Y_{i+1}$$

mit $\mu(X_i) < \infty > \nu(Y_i)$ für alle i.

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{(X_i \times Y_i)}_{Z_i} = Z = X \times Y$$

$E_i = E \cap (X_i \times Y_i)$ erüllen schließlich Behauptung nach Fall 1.

$$\int_X \nu((E_i)_x)\, d\mu = \int_Y \mu((E_i)_y)\, d\nu,$$
$$\int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(E_y)\, d\nu(y),$$

da die $\nu((E_i)_x)$ eine monoton steigende Folge nichtnegativer Funktionen bilden, die gegen die deshalb messbare Funktion $\nu(E_x) : X \to [0, \infty]$ konvergieren.

$\square$

Bemerkung Algebra–Eigenschaften und Abschluss bzgl. abzählbarer Vereinigung und Schnitte ergibt σ–Algebra Eigenschaft. (Monotones System nach Baum)

Korollar 50.5
Unter den Voraussetzungen von Satz 50.4 wird durch

$$\lambda(E) \equiv \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(E_y)\, d\nu(y)$$

ein Maß definiert, dass gerade die Erweiterung des Inhaltes $\lambda = \mu \times \nu$ auf $\mathcal{C}_0$ darstellt. (Wegen σ–Endlichkeit eindeutig.)

Beweis: Übereinstimmung auf $\mathcal{C}_0$ ergibt wie folgt $A \times B$, $A \in \mathcal{A}_\sigma$, $B \in \mathcal{B}_\sigma$

$$\begin{aligned}\lambda(A \times B) &= \int_{X\times Y} \chi_{A\times B}\, d\lambda = \int_X \nu\left[(A \times B)_x\right] d\mu(x) = \int_X \chi_A \nu(B)\, d\mu(x) = \nu(B) \int_X \chi_A\, d\mu(x) \\ &= \mu(A)\nu(B) = (\mu \times \nu)(A \times B) \quad \text{wie ursprünglich definiert}\end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt, dass die neue Definition von λ auch σ–additiv ist. Betrachte $E = \bigcup_{i=1}^\infty E_i$, mit E_i disjunkt.

$$\begin{aligned}\lambda(E_i) &= \int_X \nu((E_i)_x)\, d\mu(x) \\ \sum_{i=1}^\infty \lambda(E_i) &= \sum_{i=1}^\infty \int_X \underbrace{\nu((E_i)_x)}_{\substack{\text{nichtnegative} \\ \text{messbare Fkt. auf } X}} d\mu(x) \overset{\text{Korollar 49.10}}{=} \int_X \left(\sum_{i=1}^\infty \nu(E_i)_x\right) d\mu(x) \\ &= \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) = \lambda(E)\end{aligned}$$

da $E_x = \bigcup_{i=1}^\infty (E_i)_x$ disjunkte Vereinigung messbarer Mengen. Also ist λ tatsächlich ein Maß, das genau die Erweiterung des ursprünglichen Inhaltes ist. $\square$

Satz 50.6 (Fubini)
$(X, \mathcal{A}_\sigma, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}_\sigma, \nu)$ σ–endlich. $f : X \times Y \to [0, \infty]$ messbar bzgl. C_σ. Dann sind die Funktionen

$$x \mapsto \int_Y f(x, y)\, d\nu(y) \quad \mathcal{A}_\sigma\text{–messbar},$$
$$y \mapsto \int_X f(x, y)\, d\mu(x) \quad \mathcal{B}_\sigma\text{–messbar}.$$

Für die Integrale gilt die Identität

$$\int_{X\times Y} f(x, y)\, d(\mu \times \nu) = \int_X \left[\int_Y f(x, y)\, d\nu(y)\right] d\mu(x) = \int_Y \left[\int_X f(x, y)\, d\mu(x)\right] d\nu(y)$$

Einfache Interpretation: Unter bestimmten Voraussetzungen kommutiert die Integration bzgl. verschiedenen Variablen, ähnlich wie die Differentiation nach Schwarzschen Satz.

Beweis: Zunächst betrachte $f = \chi_E$ mit $E \subset X \times Y$

$$\int_Y f(x, y)\, d\nu(y) = \int_Y \chi_E\, d\nu(y) = \int_Y \chi_{E_x}\, d\nu(y) = \nu(E_x) \quad \text{messbar nach Satz 50.4}$$

wegen Symmetrie ist $\int_X f(x,y)\,d\mu(y) = \mu(E_y)$ $\mathcal{B}_\sigma$–messbar und

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int_X \nu(E_x)\,d\mu(x) & = & \displaystyle\int_Y \mu(E_y)\,d\nu(y) \\ || & & || \\ \displaystyle\int_X \left[\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right] d\mu(x) & = & \displaystyle\int_Y \left[\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right] d\nu(y) \end{array}$$

wurde bereits in 50.4 gezeigt.

Behauptung gilt wegen Linearität dann unmittelbar auch für einfache Funktionen, d.h. endliche Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen. Beliebige messbare $f \geq 0$ sind Grenzwerte monoton steigender Folgen einfacher Funktionen

$$f(x,y) = \lim_{i\to\infty} f_i(x,y) \quad \text{mit} \quad f_i(x,y) \leq f_{i+1}(x,y) \quad \text{für alle } i$$

Dann sind wegen Monotonie des Integrals auch die Funktionenfolgen

$$x \mapsto \int_Y f_i(x,y)\,d\nu(y) \quad \text{und} \quad y \mapsto \int_X f_i(x,y)\,d\mu(x)$$

monoton steigend und es gilt nach monotoner Konvergenz

$$\lim_{i\to\infty} \int_Y f_i(x,y)\,d\nu(y) = \int_X \lim_{i\to\infty} f_i(x,y)\,d\nu(y)$$

□

Da die Aussage für jede einfache Funktion $f_i(x,y)$ gilt

$$\int_X \left[\int_Y f_i(x,y)\,d\nu(y)\right] d\mu(x) = \int_Y \left[\int_X f_i(x,y)\,d\mu(x)\right] d\nu(y)$$

gilt auch im Grenzwert $i \to \infty$

$$\int_X \left[\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right] d\mu(x) = \int_Y \left[\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right] d\nu(x)$$

Bemerkung Wird beim letzten Satz die Messbarkeit bzgl. $\mathcal{C}_\sigma$ ausgetauscht durch integrierbar bzgl. $\mu \times \nu$ und Messbarkeit bzgl. $\mathcal{A}_\sigma$ ausgetauscht durch μ–integrierbar für fast alle x (und $\mathcal{B}_\sigma$ entsprechend), so wird der Beweis wie folgt verallgemeinert:

Nach Vorausgesetzter Integrierbarkeit gilt

$$\int_{X\times Y} f^+(x,y)\,d(\mu\times\nu) < \infty > \int_{X\times Y} f^-(x,y)\,d(\mu\times\nu)$$

Der Satz 50.6 ist auf $f^\pm$ jeweils anwendbar, so dass

$$\int_{X\times Y} f^\pm(x,y)\,d(\mu\times\nu) = \int_X \underbrace{\left[\int_Y f^\pm(x,y)\,d\nu(y)\right]}_{(*)} d\mu(x)$$

$(*)$: nichtnegative Funktion von x mit endlichem Integral bzgl $\mu(x)$. Daher kann sie nur auf einer Menge $A \ni x$ mit $\mu(A) = 0$ unendlich sein.

$\displaystyle\int_Y f^\pm(x,y)\,d\nu(y)$ endlich für fast alle $x \in X$ entsprechend $\displaystyle\int_X f^\pm(x,y)\,d\mu(x)$ endlich für fast alle $y \in Y$

$$\begin{aligned} \int_{X\times Y} f(x,y)\,d(\mu\times\nu) &= \int_{X\times Y} f^+(x,y)\,d(\mu\times\nu) - \int_{X\times Y} f^-(x,y)\,d(\mu\times\nu) \\ &= \int_X \left[\int_Y f^+(x,y)\,d\nu(x)\right] d\mu(x) - \int_X \left[\int_Y f^-(x,y)\,d\nu(x)\right] d\mu(x) \\ &= \int_X \left[\underbrace{\int_Y f^+(x,y)\,d\nu(y)}_{\text{fast überall}} - \int_Y f^-(x,y)\,d\nu(y)\right] d\mu(x) \end{aligned}$$

Beispiel (i) $f(x,y) = xe^{x+y}$ auf $[0,1]^2$, $\mu = \nu = \lambda =$Lebesgue–Maß

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 xe^{x+y}\,dx\right]\,dy = \int_0^1 \left[xe^{x+y}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{x+y}\,dx\right]\,dy = \int_0^1 \left[e^{1+y} - 0 - e^{x+y}\Big|_0^1\right]\,dy$$
$$= \int_0^1 e^{1+y}\,dy - \int_0^1 e^{1+y}\,dy + \int_0^1 e^y\,dy = e-1$$
$$\int_0^1 \left[\int_0^1 xe^{x+y}\,dy\right]\,dx = \int_0^1 \left[xe^{x+y}\right]_0^1\,dx = \int_0^1 \left[xe^{1+x} - xe^x\right]\,dx$$
$$= (e-1)\int_0^1 xe^x\,dx = (e-1)\left[xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx\right] = (e-1)\,[e-e+1] = e-1$$

(ii)

$$\int_0^\pi \left[\int_0^1 x\cos(xy)\,dy\right]\,dx = \int_0^1 \left[\sin(xy)\Big|_0^\pi\right]\,dx$$
$$= \int_0^1 (\sin(\pi x))\,dx = -\tfrac{1}{\pi}\cos(\pi x)\Big|_0^1 = \tfrac{1}{\pi}(- \ -1+1) = \tfrac{2}{\pi}$$
$$\int_0^\pi \left[\int_0^1 x\cos(xy)\,dx\right]\,dy = \int_0^\pi \left[\frac{x}{y}\sin(xy)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{y}\sin(xy)\,dx\right]\,dx$$
$$= \int_0^\pi \left[\frac{\sin(y)}{y} + \frac{\cos(xy)}{y^2}\Big|_0^1\right]\,dy = \int_0^\pi \underbrace{\left[\frac{\sin(y)}{y} + \frac{\cos(y)-1}{y^2}\right]}_{\text{ganze Funktionen}} = \frac{2}{\pi}$$

(iii) Gegenbeispiel zu Fubini (nach Cauchy)

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\underbrace{\arctan(\tfrac{x}{y})}_{\varphi} \quad \text{auf} \quad X\times Y = [0,1]^2 \quad \text{mit} \quad f(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{(1+\frac{x^2}{y^2})y} = \frac{y}{y^2+x^2} \underset{\partial_y}{\longrightarrow} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{1}{(1+\frac{x^2}{y^2})}\left(\frac{-x}{y^2}\right) = \frac{-x}{x^2+y^2} \underset{\partial_x}{\longrightarrow} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\right]\,dy = \int_0^1 \frac{-x}{x^2+y^2}\Big|_0^1\,dy = -\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}dy = -\arctan(y)\Big|_0^1 = -\frac{\pi}{4}$$
$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\right]\,dx = \int_0^1 \frac{y}{x^2+y^2}\Big|_0^1\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Schlussfolgerung: Voraussetzung verletzt. (Integrierbarkeit ist nicht gegeben). Messbarkeit ist wegen Stetigkeit gegeben.

Motivation: Wir wollen den Satz von Fubini auf Lebesgue–integrierbare Funktionen im $\mathbb{R}^n$ anwenden.

$$X = \mathbb{R}^n, \quad Y = \mathbb{R}^m, \quad X\times Y = \mathbb{R}^{n+m}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{B} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^m), \quad \mathcal{C} = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{L}(\mathbb{R}^m))$$

Problem: $\mathcal{C} \neq \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$. Genauer: Es ist bekannt, dass

(i) $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$ (Übung)

(ii) $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$

(iii) $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)) \neq \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$

Beispiel $E = \{p\}\times B$, $B\subset\mathbb{R}^m$ nicht messbar. E ist Nullmenge in $\mathbb{R}^{n+m}$, aber

$$E \not\subset \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)) \quad \text{denn } E_p \text{ ist nicht messbar.}$$

(iv) $(\lambda_{n+m})|_{\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{L}(\mathbb{R}^m))} = \lambda_n \times \lambda_m$

(v) $\overline{\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m))}_{\lambda_n\times\lambda_m} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$ (Vervollständigung des Produktmaßes). Denn für die σ–Algebren der Borelmengen gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)) &= \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m}) \\ \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) &\subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m}) \\ \implies \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m}) &\subset \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m}) \\ \implies \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m}) &= \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})}_{\lambda_{n+m}} \subset \overline{\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m))}_{\lambda_n\times\lambda_m} \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m}) \end{aligned}$$

Allgemeiner: Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ vollständige Maßräume, $\mathcal{C} = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$, $\lambda = \mu \times \nu$ Produktalgebra und –Maß und $\mathcal{C}_{\overline{\lambda}}$ die Vervollständigung bzgl. λ. Untersuchen nun die Integration von $\mathcal{C}_{\overline{\lambda}}$–messbaren bzw. –integrierbaren Funktionen.

Korollar 50.7 (aus 50.5)
Sei $E \in \mathcal{C}$. Dann gilt $\lambda(E) = 0$ gdw.

$$\begin{aligned} &\mu(E_y) = 0 \quad \text{für } y \in Y \ \nu\text{–fast überall} \\ \iff &\nu(E_x) = 0 \quad \text{für } x \in X \ \mu\text{–fast überall} \end{aligned}$$

Beweis: Satz 50.5 und Übung 5.1b

„$\Rightarrow$“ $x \mapsto \nu(E_x) \geq 0$, μ–messbar, $A \subset X$ messbar

$$0 \leq \int_A \nu(E_x)\, d\mu \leq \int_X \nu(E_x) \overset{50.5}{=} \lambda(E) = 0 \overset{\text{Ü. 5.1b}}{\Longrightarrow} \nu(E_x) = 0 \quad \mu\text{–fast überall}$$

„$\Leftarrow$“ $\nu(E_x) = 0$ μ–fast überall $\implies \int_x \nu(E_x)\, d\mu = 0$ □

Satz 50.8
$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ vollständige Maßräume. $\mathcal{C}, \lambda, \mathcal{C}_{\overline{\lambda}}$ wie oben.

Wenn $E \in \mathcal{C}$, eine Nullmenge und $F \subset E$ sind, dann gilt

$$\begin{aligned} \mu(F_y) = 0 \quad &\nu\text{–fast überall} \\ \nu(F_x) = 0 \quad &\mu\text{–fast überall} \end{aligned}$$

Beweis: Für die Fasern gilt auch $F_x \subset E_x$.

Nach 50.7 gibt es ein $X_0 \subset X$ messbar mit $\mu(X \setminus X_0) = 0$, so dass $\mu(E_x) = 0\ \forall x \in X_0$.

Nach Definition der Vollständigkeit ist für $x \in X_0$ auch F_x messbar und $\nu(F_x) = 0$. Für F_y analog. □

Satz 50.9 (vervollständigter Fubini)
$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ vollst. Maßräume, $\mathcal{C} = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$, $\lambda = \mu \times \nu$, $\mathcal{C}_{\overline{\lambda}}$ Vervollst. bzgl. λ, d.h. $(X \times Y, \mathcal{C}_{\overline{\lambda}}, \overline{\lambda})$ ist vollst. Maßraum.

1. *Wenn $f : X \times Y \to [0, \infty]$ $\mathcal{C}_{\overline{\lambda}}$–messbar ist, dann*
   a) *$x \mapsto f(x, y_0)$ ist $\mathcal{A}$–messbar ν–fast überall $(y_0 \in Y_0)$ und $y \mapsto f(x_0, y)$ ist $\mathcal{B}$–messbar μ–fast überall $(x_0 \in X_0)$*
   b) *$X_0 \ni x_0 \mapsto \int_Y f(x_0, y)\, d\nu(y)$ ist $\mathcal{A}$–messbar und $Y_0 \ni y_0 \mapsto \int_X f(x, y_0)\, d\mu(x)$ ist $\mathcal{B}$–messbar*
   c) *$\int_{X\times Y} f(x,y)\, d\lambda(x,y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y)$*
2. *Wenn $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{C}_{\overline{\lambda}}$–integrierbar ist, dann*
   a) *$x \mapsto f(x, y_0)$, $y \mapsto f(x_0, y)$ sind fast überall integrierbar*
   b) *$x \mapsto \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)$, $y \mapsto \int_X f(x,y)\, d\mu(x)$ sind integrierbar.*

c) $\int_{X\times Y} f(x,y)\,d\lambda = \int_X \int_Y f\,d\nu\,d\mu = \int_Y \int_X f\,d\mu\,d\nu$

Beweis: Es genügt, 1. für charakteristische Funktionen χ_H, $H \in \mathcal{C}_{\overline{\lambda}}$, zu zeigen. Die Schlussfolgerung auf einfache und dann messbare nichtnegative Funktionen sowie nachfolgend auf integrierbare Funktionen erfolgt wie in Satz 50.6.

Sei also $H = G \cup F \in \mathcal{C}_{\overline{\lambda}}$ mit $G \in \mathcal{C}$, F eine Nullmenge, d.h. $F \subset E \in \mathcal{C}$ mit $\lambda(E) = 0$. Betrachten $f = \chi_H$. Für die vertikalen Schnitte gilt

$$H_x = G_x \cup F_x, \quad G_x \in \mathcal{B}, \quad F_x \subset E_x \in \mathcal{B}.$$

Nach 50.8 gibt es ein $X_0 \subset X$, $\mu(X \setminus X_0) = 0$ mit

$$\nu(E_x) = 0 \quad \forall x \in X_0 \implies F_x \in \mathcal{B} \quad \text{und} \quad \nu(F_x) = 0$$
$$\implies H_x \in \mathcal{B}^{(1)}, \quad \nu(H_x) \le \nu(G_x) + \underbrace{\nu(F_x)}_{=0} = \nu(G_x) \le \nu(H_x)$$
$$\implies \nu(H_x) = \nu(G_x) \quad \mu\text{–fast überall}$$
$$\int_Y \chi_H(x,y)\,d\nu(y) = \nu(H_x) = \nu(G_x) = \int_Y \chi_G(x,y)\,d\nu(y)^{(2)}$$

$^{(1)}$: $y \mapsto \chi_H(x_0,y)$ ist $\mathcal{B}$–messbar μ–fast überall, $^{(2)}$: $x \mapsto \int \chi_H(x,\cdot)\,d\nu$ ist $\mathcal{A}$–messbar.

Analog für die horizontalen Schnitte, und zusammen

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} \chi_H\,d\overline{\lambda} &= \overline{\lambda}(H) = \lambda(G) = (\mu \times \nu)(G)\\ &\overset{50.5}{=} \int_X \left(\int_Y \chi_G\,d\nu\right) d\mu = \int_X \int_Y \chi_H\,d\nu\,d\mu\\ &= \int_Y \int_X \chi_G\,d\mu\,d\nu = \int_Y \int_X \chi_H\,d\mu\,d\nu\end{aligned}$$

□

Korollar 50.10 (Fubini für Lebesgue–integrierbare Fkt.)
Seien $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ Lebesgue–messbare Mengen und $f : A \times B \to \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue–integrierbar bzw. nicht negativ und messbar. Dann gilt

$$\int_{A\times B} f\,d\lambda_{n+m} = \int_A \left(\int_B f\,d\lambda_m\right) d\lambda_n = \int_B \left(\int_A f\,d\lambda_n\right) d\lambda_m$$

Ist $f = g \cdot h$ mit messbaren Funktionen $g : A \to \overline{\mathbb{R}}$, $h : B \to \overline{\mathbb{R}}$, dann ist

$$\int_{A\times B} f\,d\lambda_{n+m} = \left(\int_A g\,d\lambda_n\right)\left(\int_B h\,d\lambda_m\right)$$

Korollar 50.11
$E \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}$–messbar, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{L}$–integrierbar

$$\begin{aligned}\int_E f\,d\lambda_n &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E \cdot f\,d\lambda_n\\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\chi_E \cdot f)(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)\,d\lambda_{n-1}(x_1,\dots\hat{x}_i,\dots x_n)\right) dx_i\\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{E_{x_i}} f\,d\lambda_{n-1}\right) dx_i\end{aligned}$$

Korollar 50.12 (Prinzip von Cavalieri)
Für $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\lambda_n(E) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}(E_x)\,d\lambda_1(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \lambda_1(E_y)\,d\lambda_{n-1}(y)$$

Beispiel (i) Sei $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $f : E \to [0,\infty]$ $\mathcal{L}$–messbar. Betrachte das Volumen

$$V_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \middle| x \in E, y \in [0, f(x)]\right\}$$

unter dem Graphen von f. Dann gilt

$$\lambda_{n+1}(V_f) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_1(V_{f_x})\, d\lambda_n(x) = \int_E f(x)\, d\lambda_n(x)$$

denn

$$V_{f_x} = \{y \in \mathbb{R} |\, 0 \le y \le f(x)\} = \begin{cases} \emptyset & \text{,falls } x \notin E \\ [0, f(x)] & \text{,sonst} \end{cases}$$

(ii) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ $\mathcal{L}$–integrierbar. Betrachten den Rotationskörper K des Graphen von f um die x–Achse. Dann gilt

$$\lambda_3(K) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_2(K_x)\, d\lambda_1(x) = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx \quad \text{denn} \quad K_x = \begin{cases} \emptyset & \text{,falls } x \notin [a,b] \\ \text{Kreisscheibe mit Radius } f(x) & \text{,sonst} \end{cases}$$

§51 Transformationsformel für das Lebesgue–Integral

Wir wollen die *Transformationsformel* für das Riemann–Integral

$$\int_{\varphi(I)} f(t)\, dt = \int_I f(\underbrace{\varphi(x)}_{t})|\varphi'(x)|\, dx$$

mit $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \varphi(I) \subset \mathbb{R}$ ein $\mathcal{C}^1$–Diffeomorphismus sowie $f : \varphi(I) \to \mathbb{R}$ stetig, auf das mehrdimensionale Lebesgue–Integral verallgemeinern.

Satz 51.1
Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : U \to V = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ ein $\mathcal{C}^1$–Diffeomorphismus. Dann gilt

$$\forall\, A \in \mathcal{L}(U) : \ \varphi(A) \text{ ist } \mathcal{L}\text{–messbar und}$$
$$(*) \quad \lambda_n(\varphi(A)) = \int_A |\det \nabla\varphi|\, d\lambda_n$$

Korollar 51.2
Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : U \to V = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ ein $\mathcal{C}^1$–Diffeomorphismus. Dann gilt für alle $A \in \mathcal{L}(U)$ und $f : \varphi(A) \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{L}$–messbar.

$$(**) \quad f \circ \varphi \quad \text{ist } \mathcal{L}\text{–messbar und} \quad \int_{\varphi(A)} f\, d\lambda_n = \int_A (f \circ \varphi) \cdot |\det \nabla\varphi|\, d\lambda_1$$

Insbesondere ist f über $\varphi(A)$ $\mathcal{L}$–integrierbar gdw. $(f \circ \varphi)\,|\det \nabla\varphi|$ über A $\mathcal{L}$–messbar ist.

Beweis: Folgt aus Lemma 51.3

Bemerkung $(*)$ und $(**)$ sind äquivalent.

Beweis: (von Satz 51.1) Messbarkeit von $\varphi(A)$ folgt aus der Abgeschlossenheit von φ. (Bild von abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen)

(i) Brauchen nur zu zeigen, dass $\forall p \in U \exists W \subset U$ offen, so dass $\varphi_{|W}$ $(*)$ erfüllt. Denn linke und rechte Seite von $(*)$ sind σ–additiv und jedes $A \in \mathcal{L}(U)$ kann man in eine abzählbare, disjunkte Vereinigung von Teilmengen A_i solcher W_i zerlegen.

(ii) Brauchen für $n \ge 2$ die lokale Eigenschaft nur für solche φ zu zeigen, für die

$$\varphi(\underbrace{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n}_{x}) = \big(\varphi_1(x), \dots, \varphi_{i-1}(x), x_i, \varphi_{i+1}(x), \dots, \varphi_n(x)\big)$$

für mindestens ein $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt. Denn:

a) Sind $U_1 \underset{\varphi_1}{\longrightarrow} U_2 \underset{\varphi_2}{\longrightarrow} U_3$ $\mathcal{C}^1$–Diffeomorphismus die $(*)$ erfüllen, dann erfüllt auch $\varphi_2 \circ \varphi_1$ $(*)$.

$$\lambda_n(\varphi_2(\varphi_1(U_1)) \overset{\varphi_2,(*)}{=} \int_{\varphi_1(U_1)} |\det \nabla \varphi_2| \, d\lambda_n \overset{\varphi_2,(**)}{=} \int_{U_1} \underbrace{|\det \nabla \varphi_2| \circ \varphi_1 |\det \nabla \varphi_n|}_{|\det \nabla(\varphi_2 \circ \varphi_1)|} \, d\lambda_n$$

b) Sei T_{ij} die Vertauschung der i–ten und j–ten Koordinate. Gilt für $T_{ij} \circ \varphi \circ T_{kl}$ $(*)$, dann gilt $(*)$ auch für φ. Aus der Linearität von T_{ij} folgt

$$\lambda_n \left(T_{ij}(\varphi(T_{kl}(U')))\right) = |\det T_{ij}| \lambda_n \left(\varphi(T_{kl}(U'))\right)$$

und $(*)$ für T_{ij}, sowie

$$\lambda_n \left(T_{ij}(\varphi(T_{kl}(U')))\right) = \int_{U'} \left|\det \nabla (T_{ij} \circ \varphi \circ T_{kl})\right| \, d\lambda_n$$

$$\iff \lambda_n(\varphi(\underbrace{T_{kl}(U')}_{U})) = \int_{U'} |\det \nabla \varphi| \circ T_{kl} \circ |\det T_{kl}| \, d\lambda_n \overset{T_{kl},(**)}{=} \int_U |\det \nabla \varphi| \, d\lambda_n$$

c) Sei $\varphi : U \to \varphi(U)$ ein $\mathcal{C}^1$–Diffeomorphismus und $p \in U$ fix. Aus $|\det \nabla \varphi(p)| \neq 0$ kann man durch Vertauschen der Koordinaten im Bild– und Definitionsbereich $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(p) \neq 0$ erlangen. Setzen $\psi(x) = (\varphi_1(x), x_2, \ldots, x_n)$, dann ist $\det \nabla \psi = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \neq 0$ und es existiert *lokal* eine Umkehrung ψ^{-1}. Für $p(y) = \varphi \circ \psi^{-1}$ und $y = \psi(x)$ folgt

$$p(y) = (y_1, p_2(y), \ldots, p_n(y))$$

Daraus folgt, dass man (Modulo Vertauschung) für $n \geq 2$ jeden $\mathcal{C}^1$–Diffeomorphismus lokal als Komposition zweier $\mathcal{C}^1$–Diffeomorphismen schreiben, die mindestens eine Koordinate fest lassen.

(iii) Eigentlicher Beweis durch Induktion über n

IA: $n = 1$ Betrachten die Maße $\mu_1(A) = \lambda_1(\varphi(A))$ und $\mu_2(A) = \int_A |\varphi'| \, d\lambda_1$ auf $\mathcal{L}(U)$.

Für $A = [a, b]$ folgt dies aus der Transformationsformel für das Riemann–Integral.

Wegen $[a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a, b - \frac{1}{n}]$ und der Unterhalbstetigkeit für Maße gilt die Gleichheit von μ_1 und μ_2 auf dem Ring der halboffenen Intervalle. Weil μ_1 und μ_2 σ–endlich sind, folgt die Gleichheit auf $\mathcal{L}(U)$ aus der Eindeutigkeit der Fortsetzung.

IV: $(*)$ gilt für alle $\mathcal{C}^1$–Diff. in Dimension $n - 1 \in \mathbb{N}$.

IB: Sei $U \ni (t, x) \overset{\varphi}{\mapsto} (t, \varphi_t(x)) \in \mathbb{R}^n$ mit $\varphi_t : U_t = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} | (t, x) \in U\} \to \mathbb{R}^{n-1}$.

$$\implies |\det \nabla \varphi|(t, x) = |\det \nabla \varphi_t|(x) \quad \text{und} \quad \varphi(A)_t = \varphi_t(A_t) \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_n(\varphi(A)) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}(\varphi(A)_t) \, dt = \int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}(\varphi_t(A_t)) \, dt \\
&\overset{IV}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{A_t} |\det \nabla \varphi_t|(x) \, d\lambda_{n-1}(x) \, dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \underbrace{\chi_{A_t}(x)}_{\chi_A(t,x)} |\det \nabla \varphi|(t, x) d\lambda_{n-1} \, dt \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_A |\det \nabla \varphi| \, d\lambda_n
\end{aligned}$$

□

Beispiel Sei $K_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq R\}$ die Vollkugel mit Radius R und

$$(x, y, z) = \psi(\alpha, \beta, r) = (r \cos(\alpha), r \cos(\alpha) \sin(\beta), r \sin(\alpha))$$

Dann ist $\psi : U = (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, \mathbb{R}) \to \psi(U) \subset \mathbb{R}^3$ ein $\mathcal{C}^1$–Diffeom. $|\det \nabla \psi| = r^2 \cos(\beta)$ und $\lambda_3(K) = \lambda_3(\psi(U))$.

$$\overset{51.1}{\implies} \lambda_3(K) = \int_{\psi(U)} d\lambda_3 = \int_U r^2 \cos(\beta) \, d\lambda_3 = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r^2 \cos(\beta) \, dr \, d\beta \, d\alpha = \frac{4}{\pi} R^3$$

Lemma 51.3
Sei $\varphi : U : \mathbb{R}^n \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus. Dann gilt $(**) \iff (*)$.

Beweis: Siehe Übungsaufgabe. $\square$

XII Vektoranalysis

Motivation: Häufig möchte man Analysis auf gekrümmten Flächen und anderen sogenannten *Mannigfaltigkeiten* (eng. manifold) durchführen. Ein Beispiel ist die Berechnung vom Durchschnitt einer gegebenen Temperaturverteilung $T(\theta, \varphi)$ auf Erdoberfläche

$$\int_{\partial B_r} T(\theta, \varphi)\, d\mu(\theta, \varphi).$$

Letztlich betrachten wir den *Gaussschen Divergenzsatz*, der zum Beispiel das folgende formalisiert

$$\int_{\partial B_r} \text{Wärmeabstrahlung} - \int_{\partial B_r} \text{Wärmeabsorbtion} = \int_{B_r} \text{Wärmeerzeugung}$$

§52 Integration über Mannigfaltigkeiten

Definition 52.1
*Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt (Unter–)*Mannigfaltigkeit *der Dimension $d \leq n$, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:*

(i) ***(Lösung eines regulären Gleichungssystems)*** *Es existiert zu jedem $x \in M$ eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $x \in U$ und eine Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$, $F \in \mathcal{C}^1(U)$, so dass*

$$F^{-1}(0) \cap U = M \cap U \quad und \quad rang(F'(x)) = n - d \quad für \quad x \in U$$

m.a.W. Elemente der Mannigfaltigkeit sind lokal Lösungen von $n - d$ Gleichungen.

Beispiel 1) $M \equiv \{x^2 + y^2 + z^2 = r^2 : x, y, z \in \mathbb{R}\} = B_r \subset \mathbb{R}^3$ ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension $d = 2$ für $r > 0$, da

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \in \mathbb{R}^1, \quad d = 3 - 1 = 2$$
$$\text{mit} \quad \nabla F = 2(x, y, z) \neq 0 \quad \text{da} \quad \|\nabla F\| = 2\|(x, y, z)\| = r$$

2) $\tilde{M}_r \equiv \{(x, y, z) \in M : \alpha x + \beta y + \gamma z = 1\}$ ist Mannigfaltigkeit der Dimension $d = 1 = 3 - 2$, vorausgesetzt, dass $r > 1/\|(\alpha, \beta, \gamma)\|$

$$(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})(x, y, z) \leq \frac{1}{\|(\alpha, \beta, \gamma)\|} \quad \text{mit} \quad (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) = \frac{(\alpha, \beta, \gamma)}{\|(\alpha, \beta, \gamma)\|}$$

(ii) ***(Existenz von Karten)*** *Es existiert zu jedem $x \in M$ eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine stetige differenzierbare, injektive Abbildung (*Parametrisierung*)*

$$\gamma : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n \quad mit \quad \Omega \text{ offen und } \gamma \in \mathcal{C}^1(\Omega)$$

die ebenfalls ein Homöomorphismus

$$\gamma : \Omega \to U \cap M \quad \text{ist und so dass} \quad rang(\gamma'(\omega)) = d \quad für \quad \omega \in \Omega$$

(iii) ***(Graph einer glatten Abbildung)*** *Wie (ii) mit Einschränkung, dass*

$$P \cdot \gamma(\omega) = \begin{pmatrix} \omega \\ \hat{\gamma}(\omega) \end{pmatrix} \begin{matrix} \} \, d \quad \text{Komponenten} \\ \} \, n - d \text{ Komponenten} \end{matrix} \qquad \text{mit einer Permutationsmatrix } P$$

d.h. $M \cap U$ ist, bis auf Permutation der Koordinaten, der Graph der Abbildung $\hat{\gamma} : \Omega \to \mathbb{R}^{n-d}$.

(iv) ***(Bügelabbildung)*** *Für jedes $x \in M$ gibt es eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $x \in U$ und eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*

$$\Gamma : \Omega \to U \qquad \mathcal{C}^1\text{–Diffeomorphismus}$$

mit $\Gamma^{-1}(M \cap U) \subset \mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d}$

Beispiel (Parameterdarstellung von $M \equiv \partial B_r$) Nahe Nordpol/Südpol $= +/-$

$$\gamma(\omega) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \pm\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \end{pmatrix} \qquad \omega = (x, y)$$

Nahe Äquator, z.B. $(x, y, z) = (r, 0, 0)$ parametrisierende

$$\gamma \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{r^2 - y^2 - z^2} \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Breite $\theta \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, Länge $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Parametrisierung:

$$\gamma(\theta, \varphi) = r \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\varphi \\ \cos\theta \sin\varphi \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

surjektiv, aber nicht injektiv, da

$$\gamma(+\frac{\pi}{2}, \varphi) = (0, 0, 1) \quad \text{für alle } \varphi$$

$$U = \mathbb{R}^3 \setminus \{y = 0 \wedge x = 0\} \quad \text{geeignete offene Umgebung}$$

$$U \setminus M = \gamma\left((-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \times (-\pi, \pi)\right) \quad \text{ist reguläre Parametrisierung}$$

$$\gamma'(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\varphi & -\cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{matrix}\text{Drei } 2 \times 2 \\ \text{Untermatrizen} \\ \text{mit Determinanten}\end{matrix}$$

$$\det \gamma'(\theta, \varphi) = \begin{cases} -\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi - \sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi \\ \qquad = -2\sin\theta\cos\theta = -2\sin 2\theta \neq 0 & \text{, falls } \theta \neq 0 \quad \text{und} \quad |\theta| < \frac{\pi}{2} \\ -\cos^2\theta\sin\varphi \neq 0 & \text{, falls } \varphi \neq 0 \text{ und } |\theta| < \frac{\pi}{2} \\ \cos^2\theta\cos\varphi \neq 0 & \text{, falls } |\theta| < \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad |\varphi| < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Beweis: $(i) \Rightarrow (iii)$ O.B.d.A bzw. nach Permutation der Variablen in $\mathbb{R}^n$ nehme an, dass

$$F'(x, y) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) \quad \text{mit} \quad \frac{\partial F}{\partial y} \in \mathbb{R}^{(n-d)\times(n-d)}$$

nicht singulär an Stelle (x_0, y_0) mit $F(x_0, y_0) = 0$. Dann existiert nach IFT eine differenzierbare Funktion $g : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{n-d}$ mit

$$g(x_0) = y_0 \quad \text{und} \quad F(x, g(x)) = 0 \qquad \forall x \in \Omega$$

Setze $x = \omega$ und $\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix}$ mit $\gamma'(x) = \begin{pmatrix} I \\ g'(x) \end{pmatrix}$ also $rang(\gamma') = d$ und ist deshalb in hinreichend kleiner Umgebung Ω injektiv, sodass nach Einschränkung von U gilt

$$\gamma(\Omega) = M \cap U \ni (x_0, y_0)$$

$(iii) \Rightarrow (ii)$ trivial, da spezieller Fall

$(ii) \Rightarrow (i)$ O.B.d.A sei $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$ mit $\gamma_1' = \frac{\partial \gamma_1}{\gamma \omega} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ integrierbar.

Dann folgt aus Umkehrfunktionensatz nahe $\gamma(\omega_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1(\omega_0) \\ \gamma_2(\omega_0) \end{pmatrix}$ die Existenz einer Funktion $h : U(\gamma_1(\omega_0)) \to \mathbb{R}^d$, so dass $h(\gamma_1(\omega)) = \omega$ für alle $\omega \approx \omega_0$. Dann gilt

$$F(x, y) = \gamma_2(h(x)) - y \in \mathcal{C}^1(U(\gamma_1(\omega_0)) \times U(y_0)) \to \mathbb{R}^{n-d}$$

$$\text{mit} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -I \in \mathbb{R}^{(n-d)\times(n-d)}$$

$$\text{und} \quad F(x, y) = 0 \quad \text{falls} \quad y = \gamma_2(\omega),\ x = \gamma_1(\omega) \quad \text{für ein } \omega \approx \omega_0$$

F erfüllt Eigenschaften von (i) in hinreichend kleiner Umgebung U von $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Bemerkung Mannigfaltigkeiten brauchen nicht zusammenhängend sein und können durch Vereinigung mehrerer disjunkter Teilmannigfaltigkeiten entstehen.

Beispiel (i)

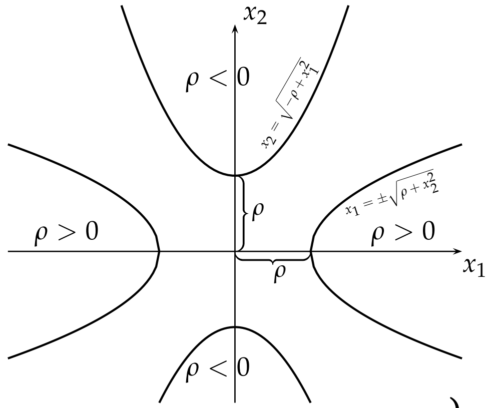
$M = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top A x = \rho\}$ mit $\rho \neq 0$ mit $A = A^\top$ nicht singulär.

$$F = x^\top A x - \rho, \quad \nabla F(x) = 2Ax \neq 0 \quad \text{da } x \neq 0 \text{ für } x \in M$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \implies x_1^2 - x_2^2 = \rho$$

$$\implies \text{Niveaumengen } f = x_1^2 - x_2^2$$

$$x_2^2 = -\rho + x_1^2 \implies x_2 = \pm\sqrt{-\rho + x_1^2}$$



(ii)

$$M \equiv \{A = A^\top \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \det(A) = 0,\ A \neq 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} : \det(A) = \underbrace{\alpha\gamma - \beta^2}_{F(\alpha,\beta,\gamma)} = 0,\ \alpha \neq 0 \vee \beta \neq 0 \vee \gamma \neq 0 \right\}$$

$\nabla F(\alpha, \beta, \gamma) = (\gamma, -2\beta, \alpha) \neq 0$ da $A = 0$ ausgeschlossen wurde. $\implies$ reguläre Mannigfaltigkeit der Dimension 2

$$M \equiv \left\{ A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta' & \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \beta = \beta', \det(A) = 0, A \neq 0 \right\}$$

$$\implies F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma) = \alpha\gamma - \beta\beta' \qquad F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma) = \beta - \beta'$$

$$\implies F'(\alpha, \beta, \beta', \gamma) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta' & -\beta & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

drei Unterdeterminanten $\gamma, \alpha, \beta' + \beta, -\gamma, -\alpha, 0$

$$= (0,0,0,0,0,0,0) \implies \gamma = 0, \alpha = 0, \beta\beta' = 0, \beta + \beta' = 0 \implies \beta = 0 = \beta'$$

ist 2–dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$. $\alpha\gamma = \beta^2 \geq 0 \implies sign(\alpha) = sign(\gamma) \implies (\alpha, \gamma)$ in erstem oder dritten Quadranten der (α, γ)–Ebene

$$\alpha + \gamma = 2\rho \implies \beta^2 = \alpha(2\rho - \alpha) = -(\alpha - \rho)^2 + \rho^2 \iff (\alpha - \rho)^2 + \beta^2 = \rho^2$$

M ist der Rand eines Doppelkegel ohne gemeinsame Spitze. Kegel besteht aus positiv semidefiniten und negativ semidefiniten Matrizen.

Reguläre Parametrisierung

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma_1} A = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} (\omega_1, \omega_2) = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & \omega_1\omega_2 \\ \omega_1\omega_2 & \omega_2^2 \end{pmatrix} = \omega\omega^\top \quad \text{pos. semidef.}$$

$$\xrightarrow{\gamma_2} A = -\omega\omega^\top \quad \text{neg. semidef.}$$

Definition 52.2
Ein offenes Teilgebiet $G = M \cap U$ mit U offen in $\mathbb{R}^n$ einer d–dimensionalen Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt Kartengebiet, *wenn es Bild einer injektiven regulären Parametrisierung $\gamma : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ ist, d.h. $\gamma(\Omega) = G$. Dann heißt γ auch* Karte *von G.*

Lemma 52.3
Je zwei Karten $\gamma : \Omega \to G$ und $\tilde{\gamma} : \tilde{\Omega} \to G$ sind äquivalent in dem Sinne, dass es einen Diffeomorphismus $T : \tilde{\Omega} \to \Omega$ gibt, so dass

$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ T \iff \tilde{\gamma}(\tilde{\omega}) = \gamma(T(\tilde{\omega})) \quad \textit{für} \quad \tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$$

Beweis: Wegen vorausgesetzter Injektivität von γ und $\tilde{\gamma}$ existiert $T = \gamma^{-1} \circ \tilde{\gamma}$ und $T^{-1} = \tilde{\gamma}^{-1} \circ \gamma$. Zu zeigen bleibt somit „nur“ noch die stetige Diffbarkeit von T, die von T^{-1} folgt analog aus Symmetriegründen.

Wegen vorausgesetzter Regularität von γ existiert Projektion $P = (e_j^\top)_{j\in J} \in \mathbb{R}^{d\times n}$ mit $e_j = (0,\dots,1,\dots,0)^\top \in \mathbb{R}^n$ und $J \subset \{1\dots,n\}$ und $|J| = d$ so dass

$$P\gamma(\omega) = (e_j^\top \gamma(\omega))_{j\in J} = (\gamma_j(\omega))_{j\in J} : \Omega \to \mathbb{R}^d$$

in offener Teilmenge $\Omega_0 \subset \Omega$ mit $\omega_0 \in \Omega_0$ eine reguläre Jacobimatrix $(P(\gamma(\omega))' = (\nabla\gamma_j(\omega))_{j\in J}$. Dann existiert nach Satz über Umkehrfunktionen eine Funktion $h : U(P(\gamma(\omega)) \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ so dass $h \circ P \circ \gamma(\omega) = \omega$ für alle $\omega \in \Omega_0$.

Außerdem ist h sogar stetig diffbar und das selbe gilt für P. Also ist auch $T = h \circ P \circ \tilde{\gamma}(\tilde{\omega}) : \tilde{\Omega} \to \Omega$ ist auf allen Umgebungen und damit auf ganz $\tilde{\Omega}$ differenzierbar. Entsprechend ist auch T^{-1} differenzierbar und es gilt $\tilde{\gamma} = \gamma \circ T$ sowie $\gamma = \tilde{\gamma} \circ T^{-1}$. □

Definition 52.4

(i) Für eine Karte $\gamma : \Omega \to G$ heißt

$$\Gamma_\gamma(\omega) = \gamma'(\omega)^\top \gamma'(\omega) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial\gamma_k(\omega)}{\partial\omega_i} \frac{\partial\gamma_k(\omega)}{\partial\omega_j} \right)_{j=1\dots d}^{i=1\dots d} \in \mathbb{R}^{d\times d}$$

die Grammatrix *von γ. Sie ist symmetrisch positiv definit so dass $g_\gamma(\omega) = \det(\Gamma_\gamma(\omega)) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$.*

(ii) $f : G \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar bzgl. γ falls $\sqrt{g_\gamma(\omega)} f(\gamma(\omega))$ auf der Menge Ω Lebesgue–integrierbar ist. Man setzt dann

$$\int^\gamma f\, d\lambda = \int_\Omega \sqrt{g_\gamma(\omega)} f(\gamma(\omega))\, d\omega$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times d}$ mit $rang(A) = d \implies \Gamma = A^\top A \implies v^\top \Gamma v = v^\top A^\top A v = \|Av\|^2 \geq 0$ für $v \neq 0$ gilt sogar $\|Av\|^2 > 0$ da sonst $Av = 0$ was der Vollrangeigenschaft widerspricht.

$$PA = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \quad \textit{mit} \quad \det(A_1) \neq 0,\ PAv = 0 \implies \begin{matrix} A_1 v = 0 \\ A_2 v = 0 \end{matrix} \implies v = 0$$

Satz 52.5

Die obige Definition ergibt für alle Karten γ den selben Wert, so dass wir setzen können

$$\int^G f\, d\lambda_d = \int^\gamma f\, d\lambda_d = \int_\Omega f(\gamma(\omega)) \sqrt{g_\gamma(\omega)}\, d\omega$$

Beweis: Betrachte alternative Karte $\tilde{\gamma} : \tilde{\Omega} \to G$ mit $\tilde{\gamma} = \gamma \circ T$, $T : \tilde{\Omega} \to \Omega$. Nach Kettenregel

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}'(\tilde{\omega}) &= \gamma'(T(\tilde{\omega}))T'(\tilde{\omega}) \\
\implies \Gamma_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\omega}) &= T'(\tilde{\omega})^\top (\gamma'(T(\tilde{\omega}))^\top \gamma'(T(\tilde{\omega})))T'(\tilde{\omega}) \\
\Gamma_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\omega}) &= T'(\tilde{\omega})^\top \Gamma_\gamma(T(\tilde{\omega})) \cdot T'(\tilde{\omega}) \\
g_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\omega}) &= \det(T'(\tilde{\omega}))^2 g_\gamma(T(\tilde{\omega})) \\
\int^{\tilde{\gamma}} f\, d\lambda &= \int_{\tilde{\Omega}} f(\tilde{\gamma}(\tilde{\omega})) \sqrt{g_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\omega})}\, d\tilde{\omega} \\
&= \int_{\tilde{\Omega}} f(\gamma \circ T(\tilde{\omega})) \sqrt{g_\gamma(T(\tilde{\omega}))} |\det(T'(\tilde{\omega}))|\, d\tilde{\omega} \\
&\overset{\text{nach Trafosatz}}{=} \int_\Omega f(\gamma(\omega)) \sqrt{g_\gamma(\omega)}\, d\omega \\
&\overset{\text{Def}}{=} \int^\gamma f\, d\lambda
\end{aligned}$$

Also ergibt sich für jede Karte der selbe Integralwert. □

Korollar 52.6

Falls $\gamma(\omega) = \begin{pmatrix} \omega \\ h(\omega) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d\times(n-d)}$ ergibt sich

$$\int^\gamma f\, d\lambda = \int_\Omega f(\gamma(\omega)) \sqrt{\det(I + \nabla h(\omega)^\top \nabla h(\omega))}\, d\omega$$

speziell für Hyperflächen, d.h. $n-d=1 \implies h \in \mathbb{R}$

$$\int^{\gamma} f\,d\lambda = \int_{\Omega} f(\omega, h(\omega))\sqrt{1+\|\nabla h(\omega)\|^2}\,d\omega$$

Beweis:

$$\gamma = \begin{pmatrix} \omega \\ h(\omega) \end{pmatrix} \implies \gamma' = \begin{pmatrix} I \\ \nabla h(\omega) \end{pmatrix}$$

$$\Gamma(\omega) = \gamma'(\omega)^{\top}\gamma'(\omega) = \begin{pmatrix} I & \nabla h(\omega)^{\top} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ \nabla h(\omega) \end{pmatrix} = I + \nabla h(\omega)^{\top}\nabla h(\omega)$$

$d = n-1$, d.h. M ist Hyperfläche.

$$\Gamma = I + \nabla h(\omega)^{\top}\nabla h(\omega) \quad \text{Rang 1 Störung von } I$$

$\det(I+aa^{\top}) = \prod_{j=1}^{n}\lambda_j$ mit λ_j die Eigenwerte von $I+aa^{\top}$
$v_1 \equiv a$ ist Eigenvektor mit $(I+aa^{\top})v_1 = a(1+\|a\|^2) \implies \lambda_1 = 1+\|a\|^2$. v_1 lässt sich durch Vektoren v_j für $j = 2\ldots n$ zu orthogonalen Basis erweitern und es gilt

$$(I+aa^{\top})v_j = v_j + aa^{\top}v_j = v_j + a\underbrace{v_1^{\top}v_j}_{0} \implies \lambda_j = 1 \quad \text{für} \quad j = 2\ldots n$$

Also ist $\det(I+aa^{\top}) = 1+\|a\|_2^2$ wie behauptet, $\|a\|_2^2 = a^{\top}a$. □

Beispiel Aufgabe: Berechne Fläche auf Nordhalbkugel, die durch Zylinder ausgeschnitten wird. (Darstellung in Eulerwinkeln.)

Auf Kugeloberfläche:

$$\begin{aligned} x &= 2\sin\theta\cos\varphi \\ y &= 2\sin\theta\sin\varphi \\ z &= 2\cos\varphi \\ \omega &= (\theta,\varphi) \end{aligned} \implies \gamma'(\omega) = 2\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma(\omega) = 4\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix} \implies \sqrt{g^{\gamma}(\omega)} = \sqrt{4\sin^2\theta} = 2\sin\theta$$

Es bleibt zu zeigen, was auf Parametrisierungsbereich $\Omega = \{0 < \theta < \frac{\pi}{2}\},\ \theta < \varphi < \pi - \theta\}$. Auf Schnittkurve gilt:

$$(2\sin\theta\cos\varphi)^2 + (2\sin\theta\sin\varphi - 1)^2 = 1 \implies 4\sin^2\theta\cos^2\varphi + 4\sin^2\theta\sin^2\varphi - 4\sin\theta\sin\varphi + 1 = 1$$

Im Inneren des kleineren Kreises gilt $\theta < \varphi < \pi - \theta$ Fläche des Ausschnittes

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 1\sqrt{g_{\gamma}(\omega)}\,d\omega &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\pi-\theta}^{\theta} 2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\sin\theta\int_{\pi-\theta}^{\theta}d\varphi\right)d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\theta(\pi-2\theta)\,d\theta = -2\cos\theta(\pi-2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\theta\cdot 2\,d\theta = 2(\pi) + 4\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\pi + 4 > 0 \end{aligned}$$

Mit Cartesischer Parametrisierung

$$z = \underbrace{\sqrt{4-x^2-y^2}}_{h(x,y)} \qquad \gamma' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} & \frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \end{pmatrix}$$

$$g_{\gamma} = 1 + \|\nabla h(x,y)\|_2^2 = 1 + \frac{x^2+y^2}{4-x^2-y^2} = \frac{4}{4-x^2-y^2} \qquad \nabla h(x,y) = \frac{(-\cancel{2}x, -\cancel{2}y)}{\cancel{2}\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

Ein alternativer Ausdruck für die Fläche ist

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} \frac{4}{4-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

die Auswertung erfolgt wiederum mit Hilfe von trigonometrischer Substitution.

Bemerkung Anwendung der jeweiligen Ergebnisse für Lebesgue–Integrale über $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ auf Funktionen $f(\gamma(\omega))\sqrt{g_\gamma(\omega)}$ ergibt unter Voraussetzung von Satz 52.5

(i) f integrierbar über $G \implies |f|$ ist integrierbar. f^-, f^+ integrierbar

(ii) f_k integrierbar auf G und monoton steigend $f_k \nearrow f$ punktweise, dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_G f_k\,d\lambda_d = \int_G f\,d\lambda_d \quad \text{Monotone Konvergenz}$$

(iii) $f_k \to f$ messbar und punktweise konvergent sowie $|f_k| \leq g$ mit g auf G integrierbar, dann ist auch f integrierbar mit $\int_G f\,d\lambda_d = \lim_{u\to\infty} \int_G f_k\,d\lambda_d$. (Lebesgue beschränkte Konvergenz).

Frage: Wie definiert man $\int_M f\,d\lambda_d$ wenn $M \subset \mathbb{R}^n$ d–dimensionale Untermannigfaltigkeit, aber kein Kartengebiet, zum Beispiel $S^2 \equiv \{x^2+y^2+z^2 = 1 : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$
Antwort: Benutze Zerlegung der 1 (partition of unity)

Definition 52.7
Eine abzählbare Menge von Funktionen $\varepsilon_i : M \to [0,1]$ heißt Zerlegung der 1 auf M, falls alle Träger

$$\operatorname{supp}(\varepsilon_i) = \operatorname{cl}\{x \in M : \varepsilon_i(x) > 0\}$$

im Inneren eines Kartengebietes von M enthalten sind und

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i(x) = 1 \quad \text{für} \quad x \in M$$

wobei jedes x nur zu endlich vielen Trägern gehören darf.

(f hat kompakte Träger genau dann, wenn supp f *beschränkt.)*

Beispiel („Hütchenfunktionen" auf $M = \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}
\varepsilon_k &= \max(0, 1-|x-k|)\\
\operatorname{supp}(\varepsilon_k) &= (k-1, k+1)\\
\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varepsilon_k(x) &= \varepsilon_k(x) + \varepsilon_{k+1}(x) \quad \text{für} \quad x \in [k, k+1)\\
&= 1-(x-k)+1-(k+1-x)\\
&= 1+1-1+k-k-x+x = 1
\end{aligned}$$

Bemerkung Hütchen sind zwar global Lipschitz–stetig, aber keinmal differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

Eine Alternative ist die beliebig oft differenzierbare Funktion

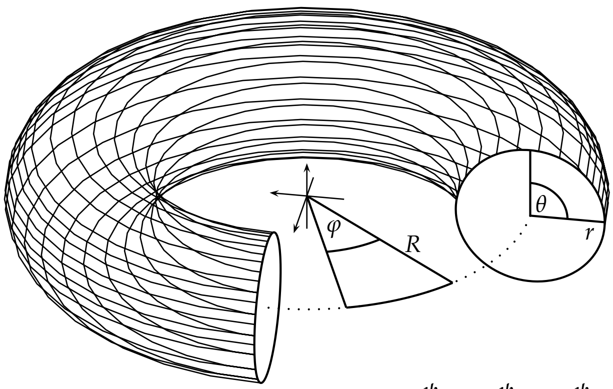
$$\psi_\rho(d) = e^{1-\rho^2/(\rho^2-d^2)} \quad \text{für} \quad -\rho < d < \rho \quad \psi_\rho(d) = 0 \quad \text{außerhalb.}$$

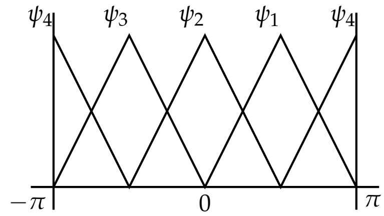
Sie ist ein Beispiel für Funktionen, die an einer Stelle, hier $d = \rho$, beliebig oft reell differenzierbar sind, aber nicht holomorph (Cauchy–Riemann nicht erfüllt), insbsondere nicht in eine Potenzreihe entwickelbar.

Beispiel (Torus) Mannigfaltigkeit der Dimension 2 da 1 definierende Funktion $(\sqrt{x^2+y^2}-R)^2 + z^2 = r^2$.

$$\gamma = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi + r\cos\varphi\cos\theta \\ R\sin\varphi + r\sin\varphi\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

$\gamma'(\varphi,\theta)$ hat überall Rang 2, aber kann nicht auf ganz M injektiv sein.
Offene Teilmenge $M = \{\gamma(\theta,\varphi) : 0 < \varphi < \pi, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$.





Zerlegung der 1: $\varepsilon_{ij}(\theta, \varphi) = \psi_i(\theta)\psi_j(\varphi)$ und

$$\begin{aligned}
\psi_1(\theta) &= \max\left(0, 1 - \tfrac{2}{\pi}|\theta + \tfrac{\pi}{2}|\right)\\
\psi_2(\theta) &= \max\left(0, 1 - \tfrac{2}{\pi}|\theta - 0|\right)\\
\psi_3(\theta) &= \max\left(0, 1 - \tfrac{2}{\pi}|\theta - \tfrac{\pi}{2}|\right)\\
\psi_4(\theta) &= \max\left(0, 1 - \tfrac{2}{\pi}|\theta - \pi|\right)\\
\operatorname{supp}(\psi_1) &= [-\pi, 0], \operatorname{supp}(\psi_1) = [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}, \ldots
\end{aligned}$$

$$\sum_{ij} \varepsilon_{ij}(\theta, \varphi) = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} \psi_i(\theta)\psi_j(\varphi) = \sum_{i=1}^{4} \psi_i(\theta) \underbrace{\sum_{j=1}^{4} \psi_j(\varphi)}_{1} = \sum_{i=1}^{4} \psi_i(\theta) = 1$$

Lemma 52.8
Sei M Untermannigfaltigkeit und $x \in V \subset M$ mit V offen. Dann existiert eine stetige Funktion $\varphi : M \to [0, 1]$ so dass $\varphi(x) \neq 0$ und $\operatorname{supp}(\varphi) \subset V$.

Erinnerung: *V offen in M, falls offenes U in $\mathbb{R}^n$ existiert, so dass $V = M \cap U$.*

Beweis: $\exists \rho > 0 : \operatorname{cl} B_\rho \cap M \subset V$.

$$\varphi(\tilde{x}) \equiv \psi_\rho(\|\tilde{x} - x\|) \quad \text{für} \quad \tilde{x} \in M,$$

□

Satz 52.9 (Kompakte Ausschöpfung)
Für jede Untermannigfaltigkeit M existiert eine aufsteigende Folge kompakter $K_i \subset M$, so dass

$$K_i \subset K^0_{i+1} \subset K_{i+1} \subset K^0_{i+2} \subset \cdots$$

und $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ wobei K^0_{i+1} = Innere von K_{i+1} in M.

Beweis: Definiere abzählbares System offener $V_i \subset M$ mit $\operatorname{cl} V_i \subset M$ z.B. $V_i = Q_i \cap M$ mit $Q_i \subset \mathbb{R}^n$ offener Quader mit rationalen Ecken und $\operatorname{cl} Q_i \cap M$ kompakt und

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i = M \qquad K_1 = \operatorname{cl} V_1 \quad \text{und} \quad K_i = \bigcup_{i=1}^{k_i} \operatorname{cl} V_i \subset \bigcup_{i=1}^{k_i+1} V_i$$

letztere Beziehung definiert die Teilfolge $K_1 < K_2 < \cdots < K_i < K_{i+1}$. Die so konstruierten kompakten Mengen K_i erfüllen die Behauptung. □

Korollar 52.10
Jede Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ hat einen abzählbaren Atlas *$\mathcal{A} = (G_i)_{i=1}^{\infty}$, d.h. ist die Vereinigung abzählbar vieler Kartengebiete G_i.*

Beweis: Wir wissen, dass jeder Punkt $x \in M$ zu einem Kartengebiet gehört. Jedes K_i wird also durch endlich viele dieser Kartengebiete überdeckt (wegen Kompaktheit). Das System aller dieser ausgewählten Kartengebiete ist somit abzählbar.

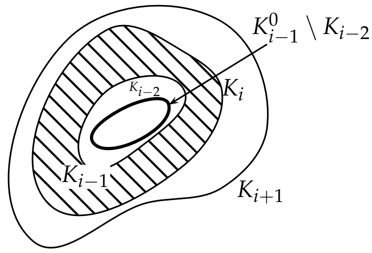
□

Satz 52.11
Zu jedem (abzählbaren, lokal endlichen) Atlas $\mathcal{A}$ einer Untermannigfaltigkeit M gibt eine Zerlegung der 1, die ihr untergeordnet ist in dem Sinne, dass

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i = 1 \quad mit \quad \varepsilon_i : M \to [0,1], \quad \varepsilon_i \in \mathcal{C}(M)$$

so dass es für jedes ε_i eine Karte $G_j \in \mathcal{A}$ gibt mit $\operatorname{supp}(\varepsilon_i) \subset G_j$.

Beweis: Abschluss der schraffierten Menge ist $K_i \setminus K_{i-1}^0$



$$K_i \setminus K_{i-1}^0 \subset K_{i+1}^0 \setminus K_{i-2} \quad \text{offen}$$

$\forall x \in K_i \setminus K_{i-1}^0$ existiert eine Umgebung $V \subset K_{i+1}^0 \setminus K_{i-2}$ und entsprechend eine Funktion $\varphi_{ix}; M \to [0,1]$ mit $\varphi_{ix}(x) > 0$ und $\operatorname{supp}(\varphi_{ix}) \subset G_j \cap (K_{i+1}^0 \setminus K_{i-2})$.

Die strikten Träger

$$\{\tilde{x} \in M : \varphi_{ix}(\tilde{x}) > 0\}$$

bilden eine offene Überdeckung des $K_i \setminus K_{i-1}^0$. Also gibt es eine endliche Teilüberdeckung durch die Träger von Funktion

$$\varphi_{ij} \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, n_j \quad \text{mit} \quad n_j < \infty$$

Da die Träger der φ_{ij} höchstens noch nach $K_{i+1} \setminus K_i$ oder $K_{i-1} \setminus K_{i-2}$ reichen, schneiden höchsten $n_{i-1} + n_i + n_{i+1}$ Träger die Menge $K_i \setminus K_{i-1}^0$. Folglich gehört jedes $x \in M$ höchstens zu endlich vielen Trägern der φ_{ij} und die Summe

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_i} \varphi_{ij}(x) : M \to (0, \infty)$$

ist eine stetige überall positive Funktion. Folglich ist auch

$$\varepsilon_{ij} = \varphi_{ij} / \varphi$$

eine stetige Funktion mit $\sum_{i,j} \varepsilon_{ij} = 1$. Nach Umnummerierung erhält man Folge $(\varepsilon_i)_{i=1}^{\infty}$ mit den geforderten Eigenschaften. □

Lemma 52.12
Falls $f : M \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{supp}(f) \subset G$ *Kartengebiet, dann ist f auf G integrierbar genau dann, wenn für jede Zerlegung der 1 die Produkte $f \cdot \varepsilon_i$ auf G integrierbar sind und $\sum_G \int |f\varepsilon_i| \, d\lambda_d < \infty$. Dann gilt*

$$\int_G f \, d\lambda_d = \sum_{i=1}^{\infty} \int_G f \varepsilon_i \, d\lambda_d$$

Man setzt dann auch $\displaystyle\int_M f \, d\lambda_d \equiv \int_G f \, d\lambda_d$.

Beweis: **1. Fall** ist $d = n$, d.h. $M = \Omega = G$ ist offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Da f integrierbar auf G, ist auch $|f|$ integrierbar auf G und daher $|\varepsilon_i f| \leq |f|$ für jedes i integrierbar (wegen Lebesgue–beschränkter Konvergenz).

$$\tilde{f}_n = \left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \right) |f|$$

ist monoton steigende punktweise konvergente Folge, so dass nach monotoner Konvergenzaussage

$$\int_G |f| \, d\lambda_n = \int_G \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i |f| \, d\lambda = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \int_G \varepsilon_i |f| \, d\lambda_n = \sum_{i=1}^{\infty} \int_G |\varepsilon_i f| \, d\lambda_n$$

d.h. aus Integrierbarkeit von f folgen die Beschränktheit der Summe über $\int_G \varepsilon_i |f| \, d\lambda$.

$$\lim_{k\to\infty} \int_G \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i f \, d\lambda = \int_G f \, d\lambda$$

folgt nach Lebesgue aus gemeinsamen Beschränkungen

$$\left| \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i f \right| \leq |f|$$

2. Fall G Gebiet von d–dimensionaler Untermannigfaltigkeit. Betrachten Parametrisierung $\gamma : \Omega \to G$ und wende Argumentation von Fall 1 an auf die Zerlegung der 1, nämlich $\eta_i = \varepsilon_i \circ \gamma$ auf Ω und Integranden

$$\tilde{f} = (f \circ \gamma) \cdot \sqrt{g_r}$$

folgt analog. □

Bemerkung Die Zerlegung der 1 ist eher ein theoretisches als praktisches Werkzeug. Integrale über Mannigfaltigkeiten müssen fast immer numerisch ausgewählt werden. Dann sind verschiedene Darstellungen über Zerlegungen auch nicht mehr exakt äquivalent.

Satz 52.13 (Integrierbarkeit auf Untermannigfaltigkeit)
$M \subset \mathbb{R}^n$, $f : M \to [-\infty, \infty]$ heißt integrierbar über M, falls für einen Atlas $\mathcal{A}$ und eine untergeordnete Zerlegung der 1

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i(x) \quad \textit{für} \quad x \in M$$

gilt:

$$f\varepsilon_i \quad \textit{mit} \quad \operatorname{supp}(\varepsilon_i) \subset G_j \quad \textit{sind integrierbar} \qquad \left(\Longrightarrow \int_M f\varepsilon_i \, d\lambda_d = \int_{G_j} f\varepsilon_i \, d\lambda_d \right)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_M |f| \varepsilon_i \, d\lambda_d < \infty$$

Dann setzt man

$$\int_M f \, d\lambda_d \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \int_M f\varepsilon_i \, d\lambda_d \quad \in (-\infty, \infty)$$

Diese Setzung ist von speziellem Atlas und Zerlegung unabhängig.

Beweis: Betrachten anderen Atlas $\mathcal{A}'$ und entsprechende Zerlegung $\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k = 1$. Zu zeigen ist

$$f\eta_k \quad \text{und} \quad |f|\eta_k \quad \text{sind integrierbar}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_M |f\eta_k| \, d\lambda_d < \infty$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_M f\eta_k \, d\lambda_d = \sum_{i=1}^{\infty} \int_M f\varepsilon_i \, d\lambda_d$$

Es ist $|f\eta_k\varepsilon_i|$ mit $\operatorname{supp}(f\eta_k\varepsilon_i) < \operatorname{supp}(f\varepsilon_i) \subset G_j$. Also sind sowohl $f\eta_k\varepsilon_i$ wie $|f\eta_k\varepsilon_i|$ integrierbar nach Lemma 52.12 und es gilt

$$\int_M f\eta_k \, d\lambda_d = \sum_{i=1}^{\infty} \int_M f\eta_k\varepsilon_i \, d\lambda_d$$
$$\int_M |f\eta_k| \, d\lambda_d = \sum_{i=1}^{\infty} \int_M |f\eta_k| \varepsilon_i \, d\lambda_d$$

Umgekehrt gilt wegen Integrierbarkeit von $f\varepsilon_i$ und Zerlegungseigenschaften von η_k

$$\int_M f\varepsilon_i \, d\lambda_d = \sum_{k=1}^{\infty} \int_M f\varepsilon_i \eta_k \, d\lambda_d$$

Summation über i ergibt für Absolutbeträge

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_M |f|\varepsilon_i \eta_k \, d\lambda_d \sum_{i=1}^{\infty} |f|\varepsilon_i \, d\lambda_d \overset{Vor.}{<} \infty$$

Deswegen darf Doppelsumme umgeordnet werden.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \int_M |f|\varepsilon_i \, d\lambda_d &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \int_M |f|\varepsilon_i \eta_k \, d\lambda_d \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_M |f|\eta_k \, d\lambda_d \end{aligned}$$

Dasselbe folgt aus beschränkter Konvergenz nach Lebesgue für die Integranden ohne Betrag. Also sind beide Darstellen wohldefiniert und ergeben den selben Wert. □

Definition 52.14
Eine beliebige Teilmenge $A \subset M$ heißt messbar, *wenn die charakteristische Funktion*

$$\chi_A : M \to \{0,1\} \quad mit \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & falls\ x \in A \\ 0 & sonst \end{cases}$$

integrierbar ist, man nennt dann

$$v_d(A) = \int_M \chi_A \, d\lambda_d \quad das\ Volumen\ A$$

Satz 52.15
Jede stetige Funktion auf einer kompakten Teilmenge $A \subset M$ ist über diese integrierbar.

Beweis: Für Fall $A \subset$ Kartengebiet G (Allgemein wieder mit Zerlegung der 1). $\gamma : \Omega \to G$ ergibt stetige Funktion $\sqrt{g_\gamma(\omega)} f(\gamma(\omega))$. Urbild $B = \gamma^{-1}(A)$ ist auch kompakt und messbar. Also gilt

$$\int_A f \, d\lambda_d = \int_M f\chi_A \, d\lambda_d = \int_\Omega (f \circ \gamma)\sqrt{g_\gamma}\chi_B \, d\omega = \begin{array}{l}\text{Integral von stetigen}\\ \text{Funktion über kompakter}\\ \text{Teilmenge von } \mathbb{R}^d\end{array}$$

Bemerkung: γ muss *Homöomorphismus* sein. □

Bemerkung Sätze über monotone und beschränkte Konvergenz lassen sich auf Untermannigfaltigkeiten erweitern.

Nächste Hürde: Viele „Oberflächen“ sind keine regulären Mannigaltigkeiten, sondern haben „Knicke“, also Sprünge in der Ableitung der Parametrisierung.

Beispiel (Würfel) Es existieren überall stetige, aber nicht notwendiger Weise differenzierbare Karten. D.h. der Würfel ist nur eine $\mathcal{C}^0$ Mannigfaltigkeit. Wir haben bisher immer $\mathcal{C}^1$–Mannigfaltigkeiten betrachtet.

Würfel =Vereinigung von
- 6 offene Quadrate, d.h. 2–dimensionale Untermannigfaltigkeiten
- 12 offene Kanten, d.h. 1–dimensionale Untermannigfaltigkeiten
- 8 Ecken, d.h. 0–dimensionale Untermannigfaltigkeiten

Hier wie allgemeiner bei $\mathcal{C}^0$–Mannigfaltigkeiten M lassen sich Integrale über dem Komplement $M \setminus \mathcal{N}$ definieren, wobei $\mathcal{N}$ eine sogenannte d–Nullmenge ist.

Definition 52.16
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d–dimensionale $\mathcal{C}^1$–Mannigfaltigkeit. $f : M \to \mathbb{R}^k$ ist stetig differenzierbar gdw. für jede Karte $\gamma : \Omega \to M$ die Verknüpfung $f \circ \gamma$ eine $\mathcal{C}^1$–Abbildung ist,

$$f \circ \gamma : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$$

Definition 52.17
Eine Menge $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$ heißt Hausdorff–Nullmenge *der Dimension $d \leq n$ oder kurz d–Nullmenge, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Überdeckung $\mathcal{N} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$ mit Würfeln der Kantenlänge r_i existiert, so dass $\sum_{i=1}^{\infty} r_i^d \leq \varepsilon$*

Beispiel Für $d = n$ erhalten wir genau die Nullmengen bezüglich des Lebesguemaßes λ_n. (Siehe Bemerkung (iv)) nach Satz 47.3).

Lemma 52.18 (Elementare Eigenschaften)
(i) $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$ und $\mathcal{N}$ ist d–Nullmenge, dann gilt das auch für $\mathcal{N}'$

(ii) $d' \geq d$ impliziert, dass jede d–Nullmenge auch d′–Nullmenge ist

(iii) $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}_k$ ist d–Nullmenge, falls dies für alle $\mathcal{N}_k$ gilt.

Beweis: (i) und **(ii)** offensichtlich

(iii) Für gegebenes ε wähle zu $\mathcal{N}_k$ eine Überdeckung $\mathcal{N}_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} W_{kj}$ mit Kantenlänge r_{kj} so dass

$$\sum_{j=1}^{\infty} r_{kj}^d \leq \varepsilon = \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Daraus folgt $\mathcal{N} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} W_{kj}$ und damit $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} r_{kj}^d \leq \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k = \varepsilon.$ □

Beispiel (i) $\{x_1 = x_2 \geq 0 : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\} \equiv \mathcal{N}$
Summe der Kantenpotenzen für $d = 2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} m(n+1)^2 \frac{1}{(m(n+1)^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m(n+1)^2} = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

(ii) $\mathcal{N} = \mathbb{R}^{n-m} \times \{0\}^m$ für $m \in [0, n]$ ist d–Nullmenge für $d > n - m$. Für $n = 3, m = 1$ ist Ebene $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$. Beweis analog zu Beispiel 1. (3–Nullmenge, aber nicht 2–Nullmenge).

Lemma 52.19 (Vererbung unter Lipschitz– bzw. $\mathcal{C}^1$–Abbildung)
(i) Falls $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$ d–Nullmenge und $F : \mathcal{N} \to \mathbb{R}^m$ ist Lipschitzstetig (global) mit Konstante L, dann ist auch $F(\mathcal{N}) \subset \mathbb{R}^m$ eine d–Nullmenge.

(ii) Falls $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ auf offenen $U \subset \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $\mathcal{N} \subset U$ d–Nullmenge, dann ist auch $F(\mathcal{N})$ eine d–Nullmenge.

Beweis: (i) $\mathcal{N} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} r_k^d < \varepsilon$ dann folgt aus Schrankensatz

$$F(W_k \cap \mathcal{N}) \subset \tilde{W}_k \quad \text{mit Kantenlängen} \leq 2Lr_k.$$

Daraus folgt $\sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{r}_k)^d \leq 2^d L^d \varepsilon$ kann auch beliebig klein gemacht werden.

(ii) Betrachte Ausschöpfung von $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ durch kompakte Teilmengen, es können Würfel mit rationalen Ecken gewählt werden. Dann hat $\|F'(x)\|$ auf K_i jeweils ein Maximum L_i, das eine Lipschitz–Konstante von F auf $K_i \cap \mathcal{N}$ ist.

Dann folgt nach (i), dass $F(K_i \cap \mathcal{N})$ d–Nullmenge und nach (iii) des Lemmas 52.17 auch die abzählbare Vereinigung $F(\mathcal{N}) = \bigcup_{j=1}^{\infty} F(\mathcal{N} \cap K_j)$ □

Korollar 52.20
Jede d–dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist $d+i$–Nullmenge für $1 \leq i \leq n-d$

Beweis: Betrachte Atlas $\mathcal{A} = \{G_j\}_{j=1}^{\infty}$ mit $G_j = \gamma_j(\Omega_j)$ für $\Omega_j \subset \mathbb{R}^d$. Wobei o.B.d.A mit

$$\gamma_j(\omega) = \begin{pmatrix} \omega \\ h_j(\omega) \end{pmatrix} \begin{matrix} \}d \\ \}(n-d) \end{matrix} \quad \text{einmal stetig differenzierbar}$$

Modifiziere

$$\tilde{\gamma}_j \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ h_j(\omega_1) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \omega_1 \times \omega_2 \in \underbrace{\Omega_j \times \{0\}^{n-d}}_{\tilde{\Omega}} \subset \mathbb{R}^n$$

Dann ist $\tilde{\Omega_j} \subset \mathbb{R}^d \times \{0\}$ eine $(d+1)$–Nullmenge und dasselbe gilt wegen Differenzierbarkeit für das Bild $\tilde{\gamma}_j(\tilde{\Omega}_j) = \gamma_j(\Omega_j) = G_j$.

Gesamte Mannigfaltigkeit $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j$ ist somit auch $(d+i)$–Nullmenge. □

Satz 52.21
Eine Teilmenge $\mathcal{N} \subset M$ mit $M \subset \mathbb{R}^n$ Untermannigfaltigkeit d–Nullmenge gdw. für jede Karte $\gamma_i : \Omega_i \to G_i$ im Atlas $M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ gilt $\gamma_i^{-1}(\mathcal{N} \cap G_i)$ ist d–Nullmenge was wiederum äquivalent ist dazu, dass $\lambda_d(\gamma_i^{-1}(\mathcal{N} \cap G_i)) = 0$.

Beweis: Letzte Äquivalenz folgt wiederum aus Bem. nach Satz 47.7 da $\Omega_i = \gamma^{-1}(G_i) \subset \mathbb{R}^d$.
$\mathcal{N}$ d–Nullmenge $\iff$ $N \cap G_i$ d–Nullmege für jedes $i \in \mathbb{N}$ $\iff$ $\gamma_i^{-1}(\mathcal{N} \cap G_i)$ ist d–Nullmenge, da γ_i Diffeomorphismus nach Definition. □

Satz 52.22
Falls $f, \tilde{f} : M \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und f über d dimensionalem M integrierbar ist. Dann folgt aus der Bedingung, dass

$$N \equiv \{f(x) \neq \tilde{f}(x), x \in M\}$$

eine d–Nullmenge die Integrierbarkeit von $\tilde{f}$ über M mit

$$\int_M \tilde{f}\, d\lambda_d = \int_M f\, d\lambda_d$$

M.a.W: Jede integrierbare Funktion darf an d–Nullmenge $\mathcal{N}$ beliebig modifiziert werden, ohne dass sich das Integral ändert.

Beweis: Für individuelles Kartengebiete $G = \gamma(\Omega)$

$$\int_G f\, d\lambda_d = \int_\Omega (f \circ \gamma)\sqrt{g_\gamma}\, d\omega = \int_\Omega (\tilde{f} \circ \gamma)\sqrt{g_\gamma}\, d\omega = \int_G \tilde{f}\, d\lambda_d$$

da $\tilde{f} \circ \gamma$ von $f \circ \gamma$ nur auf der d–Nullmenge $\gamma^{-1}(G \cap \mathcal{N})$ abweichen kann. □

Definition 52.23
$X \subset \mathbb{R}^n$ heißt $\mathcal{C}^1$–Fläche der Dimension d, falls es eine nichtleere Teilmenge $M \subset X$ gibt, so dass

(i) M ist d–dimensionale Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$

(ii) $X \setminus M$ ist d–Nullmenge

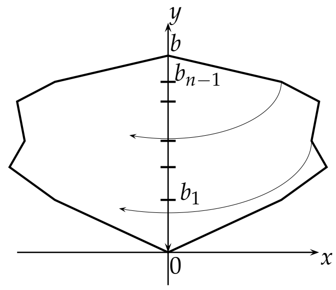
(iii) M liegt in X dicht.

Dann heißt M regulär. *Falls $d = n-1$, spricht man von einer $\mathcal{C}^1$*–Hyperfläche.

Beispiel (i) 3–dimensionaler Würfel X mit M die Vereinigung der G offenen Seitenquadrate

(ii)
Rotationskörper $r : [0,b] \to \mathbb{R}_+$ mit $r \in \mathcal{C}^1(b_i, b_{i+1})$ für Zerlegung $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n = b$ endlich und $r \in \mathcal{C}[0,b]$. Dann ist

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \text{ mit } x^2 + y^2 = r(z)^2 \\ \wedge (0 \le z \le b \vee (z = b \wedge x^2 + y^2 \le r^2(b)))\}$$



eine $\mathcal{C}^1$ Hyperfläche der Dimension 2 mit regulären Mannigfaltigkeit

$$\underbrace{\{z = b_n, \quad x^2 + y^2 \le r(b)\}}_{\text{offene Kreisscheibe}} \bigcup_{i=1}^{n} \{b_{i-1} < z < b_i, x^2 + y^2 = r^2(z)\}$$

für $i = 1, \ldots, n$.

Definition 52.24
Für $\mathcal{C}^1$–Fläche X mit f integrierbar auf regulärem Teil $M \subset X$ setze

$$\int_X f \, d\lambda_d = \int_M f \, d\lambda_d$$

Diese Definition ist eindeutig, d.h. ergibt den selben Wert für alternative $\tilde{M} \subset X$.

Beweis: $X \setminus (M \cap \tilde{M}) = (X \setminus M) \cup (X \setminus \tilde{M})$ ist auch d–Nullmenge.
$M \setminus \tilde{M} \subset X \setminus \tilde{M}$ ist d–Nullmenge. $\tilde{M} \setminus M \subset X \setminus M$ ist d–Nullmenge.
Also gilt nach Modifikationssatz

$$\int_M f \lambda_d = \int_{M \cap \tilde{M}} f \, d\lambda_d = \int_{\tilde{M}} f \, d\lambda_d$$

□

§53 Integralsätze von Gauß und Stokes

Namen: Gauß = Divergence Theorem = Divergenzsatz (Russ. Ostrogradski)
Intuitive Herleitung:

$F(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Flussgeschwindigkeit einer inkompressiblen Flüssigkeiten
$G \subset \mathbb{R}^n$ eine zusammenhängendes Gebiet mit (stückweise) glattem Rand
$\nu(x)$ für $x \in \partial G$ ist nach außen zeigender „Normalenvektor"
$F(x)^\top \nu(x) = \langle F(x), \nu(x) \rangle = \|F(x)\| \|\nu(x)\| \cos(F(x), \nu(x))$
Normaler Fluss an Stelle $x \in \partial G$
Gesamtfluss über Rand für Einheitsnormale $\|\nu(x)\|_2 = 1$:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial G} F(x)^\top \nu(x) \, d\lambda_{n-1} &= \int_{\partial G \setminus \partial G_2} F(x)^\top \nu(x) \, d\lambda_{n-1} + \int_{\partial G \setminus \partial G_1} F(x)^\top \nu(x) \, d\lambda_{n-1} \\
&= \int_{\partial G \setminus \partial G_2} F(x)^\top \nu(x) \, d\lambda_{n-1} + \underbrace{\int_{\partial G_1 \cap \partial G_2} F(x)^\top \nu_1 \, d\lambda_{n-1} + \int_{\partial G_1 \cap \partial G_2} F(x)^\top \nu_2 \, d\lambda_{n-1}}_{=0 \text{ da } \nu_1 + \nu_2 = 0} + \int_{\partial G \setminus \partial G_1} F(x)^\top \nu(x) \, dx \\
&= \int_{\partial G_1} F(x)^\top \nu_1(x) \, d\lambda_{n-1} + \int_{\partial G_2} F(x)^\top \nu_2(x) \, d\lambda_{n-1}
\end{aligned}$$

Wiederholte Zerlegung in m Würel W_i für $i = 1, \ldots, m$ ergibt

$$\int_{\partial G} F(x)^\top \nu(x) \, d\lambda_{n-1} \approx \sum \int_{\partial W_i} F(x)^\top \nu(x) \, d\lambda_{n-1} + \text{ Randstückchen}$$

wobei W_i offen, paarweise disjunkt und es gilt annähernd $\bigcup_{i=1}^{m} W_i = G$.

Frage: Was ist $\int\limits_{\partial W} F(x)^\top \nu(x)\, d\lambda_{n-1}$ für Würfel der Kantenlänge $2r$ mit Zentrum im Ursprung.

Da Kanten und Ecken $n-1$ Nullmengen, ergibt sich

$$\int\limits_{\partial W} F(x)^\top \nu(x)\, d\lambda_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{Q_k^+} F(x)^\top e_k\, d\lambda_{n-1} - \int\limits_{Q_k^-} F(x)^\top e_k\, d\lambda_{n-1}$$

wobei

$$Q_k^\pm \equiv \{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{k-1}, \pm r, \omega_{k+1}, \ldots, \omega_n) : |\omega_j| < r, \quad \omega_j \in \mathbb{R}\}$$

Die $Q_k^\pm$ sind Untermannigfaltigkeit der Dimension $n-1$ parametrisiert durch $(n-1)$ Werte ω_j mit entsprechender Haar–Matrix $I \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)} \implies g_\gamma = 1$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\int_{-r}^{r}\int_{-r}^{r} \cdots \int_{-r}^{r}}_{n-1 \text{ mal}} \Big(e_k^\top F(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{k-1}, r, \omega_{k+1}, \ldots, \omega_n)$$

$$- e_k^\top F(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{k-1}, -r, \omega_{k+1}, \ldots, \omega_n) \Big)\, d\omega_1\, d\omega_2 \ldots d\omega_{k-1}\, d\omega_{k+1} \ldots d\omega_n$$

Nach Mittelwertsatz gilt für $F_k = e_k^\top F$

$$\begin{aligned}&[F_k(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{k-1}, r, \omega_{k+1}, \ldots, \omega_n) - F_k(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{k-1}, -r, \omega_{k+1}, \ldots, \omega_n)]\\ &= \int_{-r}^{r} \frac{\partial F_k}{\partial \omega_k}(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{k-1}, \omega_k, \omega_{k+1}, \ldots, \omega_n)\, d\omega_k\end{aligned}$$

Einsetzen Mehrfachintegral

$$\begin{aligned}\int\limits_{\partial W} F(x)^\top \nu(x) \lambda_{n-1} &= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\int_{-r}^{r}\int_{-r}^{r} \cdots \int_{-r}^{r}}_{n \text{ mal}} F_k(\omega)\, d\omega_1 \ldots d\omega_n\\ &= \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{W} \frac{\partial}{\partial x_k} F_k(x) \lambda_n \quad \text{ist Volumenintegral} \qquad = \int\limits_{W} \operatorname{div}(F(x)\, d\lambda_n\end{aligned}$$

mit $\operatorname{div}(F(x)) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial F_k(x)}{\partial x_k} = \operatorname{Tr}(F'(x))$ = Summe der Diagonaleinträge der Jacobimatrix = Divergenz an Stelle x.

$$\begin{aligned}\int\limits_{\partial G} F(x)^\top \nu(x)\, d\lambda_{n-1} &\approx \sum \int\limits_{\partial W_i} F(x)^\top \nu(x)\, d\lambda_{n-1} + \text{ Randstückchen}\\ &= \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{W_i} \operatorname{div}(F(x))\, d\lambda_n \approx \int\limits_{G} \operatorname{div}(F(x))\, dx\end{aligned}$$

$\implies$ Gauss: $\int\limits_{\partial G} F(x)^\top \nu(x)\, d\lambda_{n-1} = \int\limits_{G} \operatorname{div}(F(x))\lambda_n$

Beispiel (i) zur Divergenz

$$\begin{aligned}F(x) = x \quad & \operatorname{div}(F(x)) = \operatorname{Tr}(\frac{\partial x}{\partial x}) = \operatorname{Tr}(I) = n\\ F(x) = -cx \quad \text{mit} \quad c > 0 \qquad & \operatorname{div}(F(x)) = -nc < 0\\ \text{für} \quad n = 2 \quad F(x) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \qquad & \operatorname{div}(F(x)) = 0\end{aligned}$$

Bemerkung Zu klären bleibt eine genaue Definition und Berechnung der Normalen $\nu(x)$ an fast allen Randpunkten eines geeigneten Gebietes $G \subset \mathbb{R}^n$.

Satz 53.1
An jedem Punkt x_0 einer regulären Hyperfläche $M \subset \mathbb{R}^n$ (d.h. Teilmannigfaltigkeit der Dimension $d = n-1$) existiert ein sogenannter Normalenvektor *$\nu(x_0) \neq 0$, so dass für alle differenzierbaren Pfade $x(t) \in M$ mit $x(0) = x_0$ gilt, dass*

$$\nu(x_0)^\top \frac{d}{dt} x(t)\Big|_{t=0} = \nu(x_0)^\top x'(0) = 0$$

Je zwei Normalen $\nu_1(x_0)$ und $\nu_2(x_0)$ mit dieser Eigenschaft sind Vielfache voneinander. Falls M lokal Nullstellenmenge der Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\nabla f(x_0) \neq 0$ ist, so bildet dieser Gradient eine Normale.

Beweis: Da immer geeignetes f existiert und für beliebiges differenzierbares $x(t) \in M$ gilt

$$\frac{d}{dt} f(x(t))\Big|_{t=0} = \nabla f(x(t))^\top x'(t)\Big|_{t=0} = \nabla f(x(0))^\top x'(0)$$

d.h. $\nu(x_0) = \nabla f(x_0)$ ist Normale. Für Parametrisierung $\gamma : \Omega \to M$ mit $x_0 \in \gamma(\Omega)$ betrachte Pfade

$$x(t) = \gamma(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1}, \omega_k + t, \ldots, \omega_{n-1}) \in M \quad \text{mit Tangenten} \quad x'(0) = \frac{\partial \gamma}{\partial \omega_k}(x_0) \cdot 1$$

D.h. jegliche Normale muss orthogonal sein zu den Spalten der Matrix $A = \gamma'(x_0) \in \mathbb{R}^{n \times (n-1)} \implies A^\top \nu = 0$. Da laut Voraussetzung $\operatorname{rang}(A) = n-1$ ist der Nullraum von $A^\top$ eindimensional, so dass Elemente ungleich null Vielfache von einander und insbesondere von $\nabla f(x_0)$ sind. $\square$

Korollar 53.2
Wenn $M = f^{-1}(0)$ oder $M = \gamma(\Omega)$ ein Kartengebiet, dann ist M orientierbar *in dem Sinne, dass es eine stetige Normale $\nu : M \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gibt.*

Beweis: Im ersten Fall nehme $\nu(x) = \nabla f(x) \neq 0$. Zweiter Fall später mit Hilfe des äußeren Produktes. $\square$

Beispiel einer nichtorientierbaren Hyperfläche ist das Möbiusband.

Definition 53.3
Falls M orientierbare Hyperfläche mit Einheitsnormale $\gamma(x) = \nu(x)/\|\nu(x)\|$ setze

$$\int_M F(x) \cdot \gamma(x)\, d\lambda_{n-1} = \int_{(M,\gamma)} F\, d\lambda_{n-1}$$

für stetiges $F : M \to \mathbb{R}$.

Definition 53.4
Für $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt x_0 regulärer Randpunkt *von G, wenn es offene Umgebung $U \ni x_0$ und Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $G \cap U = \{x \in U : f(x) \leq 0\}$ und $\nabla f(x) \neq 0$ für $x \in U$.*

Die Menge aller solcher Punkte ist offen in ∂G und heißt regulärer Rand *$\partial^r G$. Falls der* singuläre Rand *$\partial G \setminus \partial^r G$ eine $(n-1)$–Nullmenge und G abgeschlossen, heißt G ein $\mathcal{C}^1$*–Polyeder. *Wenn G beschränkt und damit kompakt ist, heißt G ein* $\mathcal{C}^1$–Polytop.

Bemerkung Nach Definition ist der reguläre Rand eine Teilmannigfaltigkeit.

Beispiel Falls $M = \gamma(\Omega)$ mit $\gamma(\omega) = \begin{pmatrix} \omega \\ h(\omega) \end{pmatrix}$ für $\omega \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und $\omega_i = x_i$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und $x_n = h(x_1, \ldots, x_{n-1})$.

$$\nu(\omega) = \nabla(-h(x_1, \ldots, x_{n-1}) + x_n) = (-\nabla h, 1) \quad \text{mit pos. } x_n \text{ Komponente}$$

$$\int_M F\nu\, d\lambda_{n-1} = \int_\Omega F(x_1, \ldots, x_{n-1}, h(x_1, \ldots, x_{n-1})) \begin{pmatrix} -\nabla h(x_1, \ldots, x_n) \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \cancel{\frac{\cancel{\sqrt{g_\gamma}}}{(1 + \|\nabla h(x_1, \ldots, x_{n-1})\|^2)^{1/2}}}\, dx_1 \ldots dx_{n-1}$$

$$= \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(-F_k(x_1, \ldots, x_{n-1}, h(x_1, \ldots, x_{n-1})) \frac{\partial h}{\partial x_k} \right) + F_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, h(x_1, \ldots, x_{n-1})) \right) dx_1 \ldots dx_{n-1}$$

Spezialfall: $M \equiv \{(x,y,z) : 0 < x^2+y^2 < 1, 0 < z < 1, z = x^2+y^2\}$. $F(x,y,z) = (x,y,z)$

$$h = h(x,y) = x^2+y^2 \implies f(x,y,z) = z - h(x,y) \implies \nu = \nabla f = (-2x,-2y,1)$$

$$\begin{aligned}\int\limits_M F\,d\lambda_2 &= \iint\limits_{0<x^2+y^2<1} (x,y,x^2+y^2)\begin{pmatrix}-2x\\-2y\\1\end{pmatrix} dx\,dy \\ &= \iint\limits_{0<x^2+y^2<1} (-2x^2-2y^2+x^2+y^2)\,dx\,dy = -\iint\limits_{0<x^2+y^2<1} (x^2+y^2)\,dx\,dy\end{aligned}$$

$x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$

$$\left|\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right)\right| = \left|\det\begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix}\right| = r$$

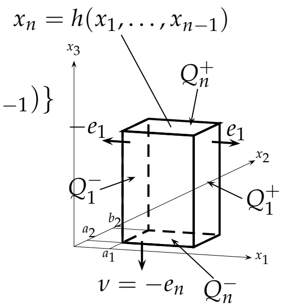
$$-\iint\limits_{0<x^2+y^2<1} (x^2+y^2)\,dx\,dy = -\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 r^2 r\,dr\,d\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

Definition 53.5
Für $\mathcal{C}^1$–Polytop G mit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig auf Umgebung von G setze

$$\int\limits_{\partial G} F(x)\nu(x)\,d\lambda_{n-1} = \int\limits_{\partial^r G} F(x)\nu(x)\,dx$$

wobei jeweils $\nu(x) = \nabla f(x)/\|\nabla f(x)\|$ an $x \in \partial^r G$. Diese Normale ist eindeutig.

Lemma 53.6
Betrachte berandeten Würfel



$$\tilde{W} = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \le x_i \le b_i \text{ für } i = 1,\dots,n-1, \quad 0 \le x_n \le h(x_1,\dots,x_{n-1})\}$$

wobei $h \in \mathcal{C}^1(U)$ mit $U \supset [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\dots[a_{-1},b_{n-1}]$, $h > 0$ und $F : \mathcal{C}^2(\tilde{U})$ mit $\tilde{U} \supset \tilde{W}$. Dann gilt

$$\int\limits_{\tilde{W}} \operatorname{div}(F(x))\,dx_1\,dx_2\dots dx_n = \int\limits_{\partial\tilde{W}} F(x)\cdot\nu(x)\,d\lambda_{n-1}$$

Beweis:

$$\int\limits_{\tilde{W}} \operatorname{div}(F(x))\,d\lambda_n = \int\limits_{\tilde{W}} \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k}F_k(x)\,d\lambda_n \quad \text{mit} \quad F = (F_k)_{k=1}^n \iff F_k = e_k^\top F$$

$$\overset{\text{Fubnini}}{=} \sum_{k=1}^n \underbrace{\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}\int_0^{h(x_1,\dots,x_{n-1})} \frac{\partial}{\partial x_k}F_k(x_1,\dots,x_n)\,dx_n\,dx_{n-1}\dots dx_1}_{I_k}$$

$$\begin{aligned}I_n &= \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}\Big(F_n(x_1,\dots,x_{n-1},h(x_1,\dots,x_{n-1})) - F_n(x_1,\dots,x_{n-1},0)\Big)\,dx_{n-1}\dots dx_1 \\ &= \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} F_n(x_1,\dots,x_{n-1},h)\,dx_{n-1}\dots dx_1 + \int\limits_{Q_n^-} F\nu\,d\lambda_{n-1}\end{aligned}$$

Für $k < n$

$$I_k = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_{k-1}}^{b_{k-1}} \int_{a_{k+1}}^{b_{k+1}} \cdots \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left(\underbrace{\int_{a_k}^{b_k} \int_0^{b(x_1,\ldots,x_{n-1})} \frac{\partial}{\partial x_k} F_k(x_1,\ldots,x_{n-1},h(x_1,\ldots,x_{n-1}\,dx_n))\,dx_k}_{z_k} \right) dx_{n-1}\ldots dx_{k+1}\,dx_{k-1}\ldots dx_1$$

Betrachte $x_1,\ldots,x_{k-1}x_{k+1},\ldots x_{n-1}$ als Konstante und lasse Argument weg

$$z_k = \int_0^{b_k} \underbrace{\int_0^{h(x_k)} \frac{\partial}{\partial x_k} F_k(x_k,x_n)\,dx_n}_{\frac{\partial}{\partial x_k}\int_0^{h(x_0)} F_k(x_k,x_n)\,dx_n - F_k(x_k,h(x_k))\frac{\partial}{\partial x_k}h(x_k)}\,dx_n = \int_0^{h(b_k)} F_k(b_k,x_n)\,dx_n - \int_0^{h(a_k)} F_k(a_k,x_n)\,dx_n - \int_{a_k}^{b_k} F_k(x_k,h(x_k))\frac{\partial}{\partial x_n}h(x_k)\,dx_k$$

$$\begin{aligned}
I_k &= \underbrace{\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}}_{\text{kein } k} z_k(x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_{n-1}) \\
&= \int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}\int_0^{h(b_k)} F_k(x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_n)\,\underbrace{dx_n\,dx_{n-1}\ldots dx_1}_{\text{kein } k} \\
&\quad + \int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}\int_0^{h(b_k)} -F_k(x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_n)\,\underbrace{dx_n\,dx_{n-1}\ldots dx_1}_{\text{kein } k} \\
&\quad - \int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}\int_0^{h(b_k)} F_k(x_1,\ldots,x_{n-1},h(x_1,\ldots,x_{n-1}))\frac{\partial h}{\partial x_k}(x_1,\ldots,x_{n-1})\,dx_1\ldots dx_{n-1}
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned}
&-\int_{Q_n^-} F\nu\,d\lambda_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\int_{Q_k^+} F\nu\,d\lambda_{n-1} - \int_{Q_k^-} F\nu\,d\lambda_{n-1}\right) \\
&\quad \underbrace{+ \int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left(F_n(x_1,\ldots x_{n-1},h(x_1,\ldots,x_{n-1})) - \sum_{k=1}^{n-1} F_k()\frac{\partial h}{\partial x_k}()\right) dx_1\ldots dx_{n-1}}_{=\int_{Q_n^+} F\nu\,d\lambda_{n-1} = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} F\begin{pmatrix}-\nabla h\\ 1\end{pmatrix} dx_1\ldots dx_n} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\int_{Q_k^+} F\nu\,d\lambda_{n-1} - \int_{Q_k^-} F\nu\,d\lambda_{n-1}\right) = \int_{\partial\tilde W} F\nu\,d\lambda_{n-1}
\end{aligned}$$

□

Lemma 53.7 (Nachtrag zu Korollar 53.2)
Falls $\gamma : \Omega \to M \subset \mathbb{R}^n, \Omega \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $\gamma'(x) = \left(\frac{\partial\gamma}{\partial\omega_j}\right)_{j=1,\ldots n-1} \equiv A$ hat Rang $(n-1)$ für $x \in \Omega$, dann ergibt sich eine Normale durch das „äußere“ oder Dach–Produkt (en: wedge product)

$$\nu(x) = a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_{n-1} \equiv \left((-1)^{k-1}\det(A_k)\right)_{k=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^n,$$

wobei A_k die durch Weglassen der k–ten Zeile aus $A = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ erhaltene (quadratische) Matrix ist. Es gelten die folgenden Eigenschaften.

(i) $b^\top(a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_{n-1}) = \det(b, A) \implies a_j^\top(a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_{n-1}) = 0$ *für* $j = 1, \ldots, n-1$, *d.h.,* $\bigwedge_{j=1}^{n-1} a_j$ *ist orthogonal zu allen Spalten von* A*, somit im Nullraum von* $A^\top$ *und deshalb eine Normale* $\neq 0$.

(ii) $\|a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_{n-1}\| = \sqrt{\det\left(A^\top A\right)} = \sqrt{g_\gamma}$.

(iii) $\bigwedge_{j=1}^{n-1} a_j$ *ist multilinear, d.h., additiv und homogen in jedem Argument,*

$$a_1 \wedge \ldots a_{j-1} \wedge (a_j + \alpha\Delta a_j) \wedge a_{j+1} \ldots \wedge a_{n-1} = a_1 \wedge \ldots \wedge a_j \wedge a_{j+1} \ldots \wedge a_{n-1} + \alpha(a_1 \wedge \ldots \wedge \Delta a_j \wedge a_{j+1} \wedge \ldots \wedge a_{n-1})$$

und alternierend oder antisymmetrisch

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_j \wedge a_{j+1} \wedge \ldots \wedge a_{n-1} = -a_1 \wedge \ldots \wedge a_{j-1} \wedge a_{j+1} \wedge a_j \wedge a_{j+2} \ldots \wedge a_{n-1}$$

d.h. Austausch von Vektoren ergibt Vorzeichenwechsel.

Beweis: (i) nach Lagrange–Entwicklungssatz ist

$$\det\begin{pmatrix} b_1 & a_{1,1} & \ldots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_n & a_{n,1} & & a_{n,n-1} \end{pmatrix} = b_1 \underbrace{\det\begin{pmatrix} a_{2,1} & \ldots & a_{2,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n-1} \end{pmatrix}}_{A_1} - b_2 \det(A_2) \pm \cdots + (-1)^{n-1} b_n \det(A_n)$$
$$= b^\top(a_1 \wedge a_2 \ldots \wedge a_{n-1})$$

(ii) $a = a_1 \wedge \ldots \wedge a_{n-1}$ und $\det(X)^2 = \det(X^\top)\det(X) = \det(X^\top X)$ ergibt

$$\left(a^\top(a_1 \wedge a_2 \ldots \wedge a_{n-1})\right)^2 = \det\begin{pmatrix} a^\top \\ A^\top \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a^\top a & 0 \\ 0 & A^\top A \end{pmatrix} = a^\top a \det(A^\top A)$$
$$\implies \|a\|^4 = \|a\|^2 \det(A^\top A) \implies \|a\| = \sqrt{\det(A^\top A)}$$

(iii) folgt unmittelbar aus entsprechenden Eigenschaften der Determinante. □

Korollar 53.8
Für $M = \gamma(\Omega)$ *gilt*

$$\int_M F \frac{\nu}{\|\nu\|}\, d\lambda_{n-1} = \int_\Omega F(\gamma(\omega))^\top \left(\frac{\partial\gamma}{\partial\omega_1} \wedge \frac{\partial\gamma}{\partial\omega_2} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial\gamma}{\partial\omega_{n-1}}\right) d\omega_1 \ldots d\omega_{n-1}$$

Beispiel (Torus)

$$\left.\begin{array}{l} x(\varphi,\theta) = (R + r\sin(\theta))\cos\varphi \\ y(\varphi,\theta) = (R + r\sin(\theta))\sin\varphi \\ z(\varphi,\theta) = r\cos\theta \end{array}\right\} = \gamma(\varphi,\theta)$$

$$A = \begin{pmatrix} -(R + r\sin\theta) & r\cos\theta\cos\varphi \\ (R + r\sin\varphi)\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix} \implies a_1 \wedge a_2 = -(R + r\sin\theta)\begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

ist geeignete Normale.

Korollar 53.9
Ein $\mathcal{C}^1$*–Polyeder* G *hat auf dem regulären Rand* $\partial^r G$ *eine eindeutig definierte äußere Einheitsnormale* $\nu(x)$ *für* $x \in \partial^r G$*, wobei* $\nu(x) = \nabla q(x)/\|\nabla q(x)\|$ *für Funktionen* $q : U \to \mathbb{R}$ *mit* $q \in \mathcal{C}^1$

$$\begin{array}{rll} U \cap G \equiv \{x \in U : q(x) \leq 0\} & \textit{Äußere Normale, d.h.} \\ x + t\nu(x) \notin G & \textit{für alle kleinen } t > 0 \\ \textit{und} \quad x + t\nu(x) \in G & \textit{für alle kleinen } t < 0 \end{array}$$

Beweis: Betrachte Ableitung $\frac{d}{dt}q(x + t\nu(x))\big|_{t=0} = \nabla q(x)^\top \nu(x) = \|\nabla q(x)\| > 0$ nach Kettenregel. □

Satz 53.10 (Divergenzsatz von Gauß)
$F \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n \supset U$ offen, $U \subset G$ ein $\mathcal{C}^1$–Polytop. Dann gilt

$$\int_{\partial G} F \cdot \frac{\nu}{\|\nu\|} \, d\lambda_{n-1} = \int_G \operatorname{div}(F(x)) \, d\lambda_n$$

Beweis: Überdecke kompakten singulären Rand $\partial G \setminus \partial^r G$ mit endlich vielen Würfeln $\{W_i\}_{i=1\ldots m}$ mit Kantenlängen r_i, so dass $\sum_{i=1}^m r_j^{n-1} < \varepsilon$, was geht, da $\partial G \setminus \partial^r G$ eine $n-1$ Nullmenge.

Zerlege den Rest $G \setminus \bigcup_{i=1}^m W_i$ in Bereiche auf denen 53.6 gilt. Schätze Differenz über $\bigcup_{i=1}^m W_i$ und dessen Rand geeignet ab. □

Korollar 53.11 (Greensche Formeln)
G wie oben $F(x) = \varphi(x)\nabla f(x)$ mit $f \in \mathcal{C}^2(U)$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(U)$.

(i) $\displaystyle\int_{\partial G} \varphi(x) f_\nu(x) \, d\lambda_{n-1} = \int_G \nabla\varphi(x)^\top \nabla f(x) \, d\lambda_n + \int_G \varphi(x)\Delta f(x) \, d\lambda_n$ *mit* $f_\nu(x) = \nabla f(x)\nu(x)$ *Normalenableitung*

(ii) $\displaystyle\int_{\partial G} \varphi(x) f_\nu(x) - f(x)\varphi_\nu(x) \, d\lambda_{n-1} = \int_G (\varphi(x)\Delta f - f(x)\Delta\varphi) \, d\lambda_n$ *falls* $\varphi \in \mathcal{C}^2(U)$.

Beweis: (i) $\operatorname{div}(F(x)) = \nabla\varphi(x)^\top \nabla f(x) + \varphi(x)\Delta f(x)$ mit $\Delta f(x) = \operatorname{div}(\nabla f) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{x_j^2}$

(ii) Wegen Symmetrie durch Austausch von f und φ. □

Idee: Gauß in Ebene $\longrightarrow$ Stokes auf Fläche in $\mathbb{R}^3$.
$n = 2$, $F(x, y) = (f(x), g(x))$, $G \subset \mathbb{R}^2$ mit stückweise glattem Rand $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \gamma(\omega) = \begin{pmatrix} x(\omega) \\ y(\omega) \end{pmatrix}$.

$$\int_0^T \Big(f\big(x(\omega), y(\omega)\big), g\big(x(\omega), y(\omega)\big) \Big) \begin{pmatrix} y'(\omega) \\ -x'(\omega) \end{pmatrix} d\omega$$

Erstes Integral lässt sich interpretieren als Kurvenintegral der Vektorfunktion
$\tilde{F}(x, y) = (-g(x, y), f(x, y)) = (\tilde{f}(x, y), \tilde{g}(x, y))$

$$\begin{aligned}
\int_0^T (f(\gamma(\omega)y'(\omega) - g(\gamma(\omega))x'(\omega))) \, d\omega &= \int_0^T (-g(\gamma(\omega)), f(\gamma(\omega))) \begin{pmatrix} x'(\omega) \\ y'(\omega) \end{pmatrix} d\omega \\
&= \int_0^T \tilde{F}\gamma'(\omega) \, d\omega = \text{Wegintegral entlang des Pfades } \gamma(\omega) \\
&= \int_G \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \right) dx \, dy \\
&= \int_G \operatorname{rot} \begin{pmatrix} \tilde{f} \\ \tilde{g} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dx \, dy = \int_0^T \tilde{F}(\gamma'(\omega)) \, d\omega \quad \text{= Stokes in Ebene}
\end{aligned}$$

Allgemeiner betrachte Fläche $(x(\omega, \delta), y(\omega, \delta), z(\omega, \delta))$ mit Rand $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \gamma(t)$ und Funktion

$F(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$. Dann gilt für γ stückweise differenzierbar und $F \in \mathcal{C}^1$

$$\int_M \operatorname{rot}(F) \cdot \nu(x) \, d\lambda_1 = \int_0^T F(\gamma(t))\gamma'(t) \, dt$$

wobei $\operatorname{rot}(F) = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f & g & h \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right)$

Satz 53.12
Betrachte $\mathcal{C}^1$–Fläche $M = (x(\omega, \varphi), y(\omega, \varphi), z(\omega, \varphi))$ mit Rand $(x, y, z)^\top = \gamma(t)$ und Vektorfunktion

$$F(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)) \in \mathcal{C}^1$$

Dann gilt stückweise differenzierbares $\gamma : [0, T) \to \partial M$

$$\int\limits_M \operatorname{rot}(F) \frac{\nu(x)}{\|\nu(x)\|} \, d\lambda_2 = \int\limits_0^T F(\gamma(t))\gamma'(t) \, dt$$

Beweis:

$$\int\limits_\Omega \operatorname{rot}(F)\nu \, d\omega$$

$$\nu = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \omega} \\ \frac{\partial y}{\partial \omega} \\ \frac{\partial z}{\partial \omega} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_\omega z_\varphi - y_\varphi z_\omega \\ x_\varphi z_\omega - x_\omega z_\varphi \\ x_\omega y_\varphi - x_\varphi y_\omega \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} h_y - g_z \\ f_z - h_x \\ g_x - f_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} (f_y y_\omega + f_x x_\omega + f_z z_\omega)x_\varphi - (f_y y_\varphi + f_x x_\varphi + f_z z_\varphi)x_\omega \\ + (g_z z_\omega + g_x x_\omega)y_\varphi - (g_z z_\varphi + g_x x_\varphi)y_\omega \\ + (h_y y_\omega + h_x x_\omega + h_z z_\omega)z_\varphi - (h_y y_\varphi + h_x x_\varphi + h_z z_\varphi)z_\omega \end{array} = \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \omega} \left(f(x(\omega, \varphi), y(\omega, \varphi), z(\omega, \varphi)x_\varphi \right) \\ - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(f(x(\omega, \varphi), y(\omega, \varphi), z(\omega, \varphi)x_\omega \right) \\ + \frac{\partial}{\partial \omega} \left(g(\ldots)y_\varphi \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(g(\ldots)y_\omega \right) \\ + \frac{\partial}{\partial \omega} \left(h(\ldots)z_\varphi \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(h(\ldots)z_\omega \right) \end{array}$$

Nach der Uminterpretation des Gaußschen Satzes in Ebene lässt sich das Integral über $\omega \subset \mathbb{R}^2$ gleichsetzen dem Integral über den Rand $\partial\Omega$ des Gebietes Ω und wird erhalten

$$\begin{aligned} &\int\limits_\Omega (\tilde{g}_\omega - \tilde{f}_\varphi) \, d\omega \, d\varphi = \int\limits_0^T (\tilde{f}, \tilde{g})\tilde{\gamma}'(t) \, dt \\ &= \int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial \omega}(f(x(\omega, \varphi), y(\omega, \varphi), z(\omega, \varphi))x_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi}(f(\ldots)x_\omega) \, d\omega \, d\varphi \\ &= \int\limits_\Omega \begin{pmatrix} f(x, y, z)x_\omega \\ f(x, y, z)x_\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial t} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{pmatrix} \, dt \\ &= \int\limits_\Omega f(x, y, z) \left(\underbrace{x_\omega \partial\omega / \, dt + x_\varphi \partial\varphi_t}_{dx/\, dt} \right) \\ &= \int\limits_\Omega f(x(\omega(t), \varphi(t)), y \ldots) \frac{dx}{dt} \, dt \\ &\int\limits_0^T \left(f \tfrac{dx}{dt} + g \tfrac{dy}{dt} + h \tfrac{dz}{dt} \right) \, dt = \int\limits_0^T F(\gamma(t))\gamma'(t) \, dt \end{aligned}$$

Beispiel (J.C. Amazigo und K.A. Rubenfeld: Advanced Calculus) Paraboloid $3x^2 + 3y^2 + z^2 = 28$, $z \leq 1$.

$$F = (yz^2, 4xz, x^2yz) \overset{z=1}{=} (y, 4x, x^2y)$$

$$\operatorname{rot}(F) = \begin{pmatrix} x^2z - 4x \\ 2zy - 2yz \\ 4z - z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 4x \\ 2y - 2xy^2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\int_0^{2\pi} (F \circ \gamma)\gamma' \, dt = \int_0^{2\pi} 3 \begin{pmatrix} \sin t \\ 4\cos t \\ * \end{pmatrix} \bullet 3 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (9\sin^2 t + 36\cos^2 t) \, dt = -\pi 9 + 36\pi = 27\pi$$

$$\int_M \operatorname{rot}(F) \frac{\nu}{\|\nu\|} \, d\lambda_2 = -\int_{x^2+y^2<9} \operatorname{rot}(F) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dx \, dy$$

$$= \int_{x^2+y^2<9} 3 \, dx \, dy = 3\lambda_2(x^2 + y^2 \leq 9) = 27\pi$$

Beweis: (Nachtrag zum Beweis vom Brouwerschen Fixpunktsatz Teild d) $f : B_1 \to B_2$ mit $f \in \mathcal{C}(B_1) : B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$. Annahme: f hat keinen Punkt x_* mit $f(x_*) = x_*$ soll zum Widerspruch geführt werden.

(i) O.B.d.A. f ist polynomial per Weierstraß.

(ii) $\lambda = \lambda(x), g = g(x), h_t(x) = x + tg(x)$ für $0 \leq t \leq 1$ sind alle auf Umgebung von $\overline{B}$ differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} & h_t(B) \subset B, h_t(\partial B) = \partial B \quad \text{da} \quad \lambda(x) = 0, g(x) = 0 \\ t \in (0,1] \quad & h_t(x) = x \iff tg(x) = 0 \iff g(x) = 0 \iff \lambda(x) = 0 \iff x \in \partial B \\ & h_1(B) = \partial B \equiv S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\} \end{aligned}$$

(iii) $h_t(B) = B$ und $\det(h_t'(x)) > 0$ für $0 \leq t < \bar{t} \leq 1$

Nach Transformationssatz für alle $t \in [0,1]$

$$\int_{h_t(B)} 1 \, dx = \int_B 1 \, |\det(h_t'(x))| \, dx \geq \int_B \det(h_t'(x)) \, dx \equiv V(t)$$

$V(0) = \lambda_n(B)$, $V(t)$ ist polynomial bzgl. t, $h_t' = I + tg'$ polynomial bzgl. x erhält Polynomialität bzgl. t.

$$\begin{aligned} V(t) &= V(0) \quad \text{für } t \leq \bar{t} \\ &= \lambda_n(h_t(B)) \implies V(t) \quad \text{ist konstant auf } [0,1] \\ \implies & \lambda_n(h_1(B)) \geq V(1) = V(0) > 0 \end{aligned}$$

aber $\partial B = h_1(B)$ ist Mannigfaltigkeit der Dimension $n-1$ und somit λ_n–Nullmenge. □

Index