L^2-Fehlerabschätzungen für die Galerkin-Projektion

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq M_h \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}$$

basieren auf einem Dualitätsargument. Deshalb hängt die Konstante $M_h = Ch^s_{max}$ vom Gebiet und der Regularität der Lösung ab. In der kürzlich erschienenen Arbeit [2] wird eine Methode vorgestellt, wie die Konstante M_h numerisch berechnet werden kann. Die Konstante findet zum Beispiel folgende Anwendung: Der kleinste Eigenwert des Laplace-Operators

$$-\triangle u = \lambda u$$

unter homogenen Dirichlet-Randbedingungen ist durch das Min-Max-Prinzip charakterisiert

$$\lambda = \min_{v \in H^1_0(\Omega)} \frac{\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|v\|^2_{L^2(\Omega)}}.$$

Deshalb liefern die Eigenwerte λ_h aus konformen Finite-Elemente-Diskretisierungen $V_h \subset V$ obere Schranken für λ. Untere Schranken können über Projektionsoperatoren (z.B. die Galerkin-Projektion) gewonnen werden. Lässt ein Projektionsoperator $P_h : H^1_0 \to V_h$ eine L^2-Fehlerabschätzung der Form

$$\|v - P_h v\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon_h \|\nabla_h(v - P_h v)\|_{L^2(\Omega)}$$

zu, so gilt die untere Schranke $\lambda_h/(1+\varepsilon_h^2\lambda_h) \leq \lambda$. Die Verwendung nichtkonformer Methoden [1] hat den Vorteil, dass die Konstante $\varepsilon_h = 0.29 \times h_{max}$ der nichtkonformen Interpolation in diesem Falle explizit bekannt ist und nicht von der Regularität des Problems abhängt.

Die Bachelorarbeit soll die Konstante M_h der L^2-Abschätzung und ihre Abhängigkeit vom Gebiet Ω numerisch untersuchen und darauf basierend die unteren Eigenwertschranken von konformen und nichtkonformen Methoden miteinander vergleichen.

Literatur

[1] Carsten Carstensen and Joscha Gedicke, *Guaranteed lower bounds for eigenvalues,* Math. Comp., 2014. `http://dx.doi.org/10.1090/S0025-5718-2014-02833-0`

[2] Xuefeng Liu and Shin'ichi Oishi, *Verified eigenvalue evaluation for Laplacian over polygonal domain of arbitrary shape,* SIAM J. Numer. Anal., 2013, 51(3), 1634-1654. `http://www.xfliu.org/homepage/pdf/120878446.pdf`