HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN

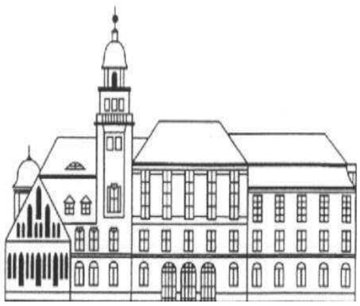
Quantifikation und Simulation Ökonomischer Prozesse

DISCUSSION PAPER

20
2001

**Über die Stabilität des Euler-Schemas
für eine Affine Stochastische Differentialgleichung mit Gedächtnis**

Hagen Gilsing, Uwe Küchler, Eckhard Platen



Sonderforschungsbereich
373
Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät
Spandauer Str.1 10178 Berlin Germany

Über die Stabilität des Euler-Schemas für eine Affine Stochastische Differentialgleichung mit Gedächtnis *

Hagen Gilsing, Uwe Küchler
Humboldt Universität zu Berlin
Institut für Stochastik und Finanzmathematik
Sonderforschungsbereich 373
EMail: gilsing@informatik.hu-berlin.de
kuechler@mathematik.hu-berlin.de

Eckhard Platen
University of Technology, Sydney
School of Mathematical Sciences
Faculty of Mathematical and Computing Sciences
EMail: eckhard.platen@uts.edu.au

Version: Berlin, 02.04.2001

Zusammenfassung

Der Begriff der A-Stabilität wird auf lineare Differentialgleichungen mit Gedächtnis übertragen. Es erfolgt eine explizite Berechnung des Stabilitätsgebietes des expliziten Eulerverfahrens für affine Testgleichungen mit einem reellen Parameter und einer echten Zeitverzögerung im Driftterm. Diese Stabilitätsgebiete sind abhängig von der Gitterfeinheit des Verfahrens und der Zeitverzögerung der Testgleichung. Sie konvergieren (steigen) monoton gegen das Stationaritätsgebiet der linearen Testgleichung.

Schlüsselwörter: SDDE, Stabilität von Prozessen, Stabilität numerischer Algorithmen, Eulerverfahren, A-Stabilität

1 Einführung

Differentialgleichungen mit Gedächtnis, im folgenden Delaygleichungen genannt, sind häufig in den Bereichen der angewandten Mathematik vorzufinden, in denen Zeitverzögerungen mit Rückkopplungseffekten auftreten. In ökonomischen Modellen ist das Verwenden von Zeitverzögerungen seit den 30er Jahren festzustellen und orientierte sich u.a. an aus der Biologie bekannten Geburts- und Todesprozessen und damit verbundenen Entwicklungsphasen ([Hal33], [Tin30]). In den 40er, 50er Jahren ist eine Tendenz weg von rein linearen ökonomischen Modellen hin zu nichtlinearen Modellen festzustellen, verstärkt noch durch das Entdecken des mathematischen Chaos und der damit verbundenen deskriptiven Potenz schon niedrigdimensionaler dynamischer Systeme. Es ist interessant festzustellen, daß im Rahmen der Kritik an den Unzulänglichkeiten linearer ökonomischer Modelle Goodwin in einem Artikel ([Goo51]), in welchem er die Mängel der üblichen linearer Akzelerator-Multiplikator-Mechanismen aufzeigt und zu beheben sucht, sich bei der Suche nach Erklärungen für beobachtete Effekte nicht nur auf Nichtlinearitäten beschränkt sondern auch Zeitverzögerungen als Modellfaktor berücksichtigt, sie jedoch aufgrund technischer Schwierigkeiten durch Linearisierung im Delay zu einem handhabbareren dynamischen System reduziert. Dieser Artikel kann als repräsentativ für die Anwendung von Zeitverzögerungen bei der Modellierung angesehen werden. Sie bieten neben Nichtlinearitäten Anwendern die Möglichkeit des Aufstellens realistischer Modelle u.a. in der Ökonomie ([Hei82], [How84], [Mac89], [Chi96]), Biologie ([Lon91], [Mac77], [Hei83]), Physik ([Ike82], [Ike87]), lassen aber selten explizite analytische Lösungen zu. Dieses Manko schlägt sich darin nieder, daß man bei Modellierungen von Sachverhalten unter Berücksichtigung von Zeitverzögerungen häufig nur sehr spezielle Gleichungen findet, lineare Systeme oder Systeme, die sich auf gewöhnliche Differentialgleichungen reduzieren lassen ([Chi96]).

Mit der Entwicklung der Rechentechnik steht dem angewandten Mathematiker aber ein Werkzeug zur Verfügung, daß das Arbeiten mit deterministischen Delaydifferentialgleichungen in Modellen (DDE) und stochastisch gestörten Modellen (SDDE) wieder attraktiv macht, da numerische Simulationen möglich werden. Für SDE hat sich in den letzten 10-15 Jahren eine reichhaltige Literatur entwickelt, die sich mit Fragen der Konvergenz und Konsistenz numerischer Integrationsverfahren ([Kla85], [Klo92b], [Klo92a], [Pla99], [Par85]), der Stabilität von Verfahren ([Art91], [Art94], [Her92], [Her93], [Tal90], [Sai96]), dem asymptotischen, also langfristigen Verhalten von Lösungen ([Rya97],[Sch96],[Mil98], [Pet98]) und dem Berechnen von Funktionalen von Lösungstrajektorien ([Par85], [Pet98]) befaßt.

*Diese Arbeit entstand mit finanzieller Unterstützung der Deutschen Forschungsgesellschaft, SFB 373

Für SDDE ist Literatur in diesem Umfang bislang noch nicht zu verzeichnen. Erste Arbeiten über die Konsistenz und Konvergenz von numerischen Verfahren finden sich in einem Artikel von Küchler/Platen ([Kü00]). Aussagen über die asymptotische Stabilität sind hingegen nicht bekannt. Die vorliegende Arbeit befaßt sich daher mit der Untersuchung der absoluten Stabilität (A-Stabilität) des expliziten Eulerverfahrens. Dies erfolgt, indem in Abschnitt 2 für eine ausgewählte Testklasse von parametrisierten Problemen, die affine stochastische Differentialgleichungen mit Zeitverzögerung (SDDE) mit genau einem Delayterm und reellem Parameter, die Menge derjenigen Parameter charakterisiert wird, für die stationäre Lösungen existieren, d.h. Lösungen, die in dem Sinne als stabil anzusehen sind, als daß für sie eine asymptotische Grenzverteilung existiert. In einem zweiten Schritt wird in Abschnitt 3 untersucht, für welche reellen Parameter das explizite Eulerverfahren, angewandt auf das spezielle Testproblem, „korrekt" arbeitet und zumindest eine Approximationsfolge mit einer asymptotischen Grenzverteilung erzeugt.

2 Existenz stationärer Lösungen von affinen SDDE

In diesem Paper sollen spezielle lineare stochastische Differentialgleichungen mit endlichem Gedächtnis betrachtet werden. Dazu wird von einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$ ausgegangen und werden zunächst Bedingungen für die Existenz von Lösungen der allgemeineren Gleichung

$$\begin{array}{l} dX(t) = F(t, X(t), X(t-\tau))dt + dW(t), \quad t \in [0,\infty) \\ X(s) = \xi(s), \quad s \in [-\tau, 0] \end{array} \tag{1}$$

mit fest gewählten

$$\begin{array}{l} \tau \in (0,\infty) \subset \mathbb{R} \\ F : \mathcal{C}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \\ \{W(t), \mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)} \text{ Standardwienerprozeß} \\ \forall t \in [-\tau,\infty) : X(t) \in \mathbb{R} \\ \xi \in (\Omega, \mathcal{C}([-\tau,0], \mathbb{R})\,)\ \mathcal{F}_0\text{-meßbar} \end{array} \tag{2}$$

angegeben.

Definition 1
Eine stochastischer Prozeß $X = (X(t))_{t\in[-\tau,\infty)}$ heißt **Lösung von (1)**, *wenn gilt*

$$\begin{array}{ll} X(t) = X(0) + \int\limits_0^t F(s, X(s), X(s-\tau))ds + W(t), & t \in [0,\infty) \\ X(s) = \xi(s), \quad s \in [-\tau, 0] & \end{array}$$

X heißt **eindeutige Lösung von (1)**, *wenn gilt*

$\forall \hat{X}$ *Lösung von (1):* $\mathbb{P}[\,\forall t \in [-\tau,\infty) : \ \hat{X}(t) = X(t)\,] = 1$

Im allgemeinen genügen zwei Bedingungen an F für die Existenz eindeutiger Lösungen, eine Lipschitz- und eine Wachstumsbedingung ([Mao97]):

Satz 2
Es mögen gelten:
(i) (Lipschitzbedingung)
$\exists\, K_1 > 0\, \forall (t, x_1, y_1), (t, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^3 : \mid F(t, x_1, y_1) - F(t, x_2, y_2) \mid^2 \le K_1(\mid x_1 - x_2 \mid^2 + \mid y_1 - y_2 \mid^2)$
(ii) (Wachstumsbedingung)
$\exists\, K_2 > 0\, \forall (t, x, y) \in \mathbb{R}^3 : \mid F(t, x, y) \mid^2 \le K_2(1 + \mid x \mid^2 + \mid y \mid^2)$
Dann folgt:
(1) hat für jedes $\mathcal{F}_0$-meßbare $\xi \in (\Omega, \mathcal{C}([-\tau,0], \mathbb{R})\,)$ eine eindeutige Lösung.

Korollar 3 *Die Lipschitz- und Wachstumsbedingung sind für die affine SDDE*

$$\begin{array}{l} dX(t) = \mu X(t-\tau)dt + dW(t), \quad t \in [0,\infty) \\ X(s) = \xi(s), \quad s \in [-\tau, 0], \end{array} \tag{3}$$

wobei $\mu \in \mathbb{R}$, $\tau \in (0,\infty)$, erfüllt. Damit existiert eine eindeutige Lösung von (3).

Eine Lösung von (3) kann mit verschiedenen Mitteln charakterisiert werden. Zum einen durch die sogenannte **Fundamentallösung** x_0 des (3) zugehörigen deterministischen, reellen Systems

$$\begin{aligned} dx_0(t) &= \mu x_0(t-\tau)\,dt, \quad t \in [0,\infty) \\ x_0(s) &= 1_{[0,\infty)}(s), \quad s \in (-\infty, 0], \end{aligned} \tag{4}$$

zum anderen durch die Laplacetransformierte des Systems (4) und den Nullstellen der damit verbundenen charakteristischen Funktion $h(\lambda) = \lambda - \mu e^{-\tau\lambda}$. Der folgende Satz charakterisiert die Existenz einer stationären Lösung der affinen SDDE (3) ([Gus00]).

Satz 4
Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
(i) $0 > v_0 := \max\{\, Re(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{C},\ h(\lambda) = 0 \,\}$
(ii) *Für die Fundamentallösung* x_0 *von (4) gilt:* $\int\limits_0^\infty x_0(s)^2 ds < \infty$
(iii) *Für die Lösung* X *von (3) gilt:*
$\exists\, \sigma^2 > 0 : X(t) \xrightarrow[t\to\infty]{d} N(0, \sigma^2)$
Gilt eine der Aussagen (i)-(iii), so folgt ebenfalls:
(iv) $\sigma^2 = \int\limits_0^\infty x_0^2(s)\,ds$
(v) $X(t) = x_0(t)\xi(0) + b\int\limits_{-\tau}^0 x_0(t-s-\tau)\xi(s)\,ds + \int\limits_0^t x_0(t-s)\,dW(s)$ *ist eine stationäre Lösung von (3).*

Mit Hilfe von (i) aus Satz 4 kann das **Stationaritätsgebiet** M_{stat} derjenigen reellen Parameter μ, für die eine stationäre Lösung existiert, berechnet werden. Es zeigt sich, daß die $M_{stat} = \frac{1}{\tau}(-\frac{\pi}{2}, 0)$ ist.
Setzt man $\lambda = a + ib$, so lautet die charakteristische Gleichung $h(\lambda) = \lambda - \mu e^{-\tau\lambda} = 0$ wie folgt:

$$\begin{aligned} a &= \mu e^{-\tau a}\cos(\tau b) \\ b &= -\mu e^{-\tau a}\sin(\tau b) \end{aligned} \tag{5}$$

In einem ersten Lemma wird nun die Abhängigkeit von $a\tau$ und $\mu\tau$ von $b\tau$ charakterisiert, welches dann Grundlage für die Berechnung des angegebenen Intervalls ist.

Lemma 5
Es sei $\lambda = a + ib$ *eine Lösung von* $\lambda = \mu e^{-\tau\lambda}$.
Dann gilt:
(i) *Ist* $b\tau = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, *so gilt:*
(a) $b = 0$ *und* $\mu\tau \in [-e^{-1}, \infty)$,
(b) $a < 0 \Leftrightarrow \mu\tau \in [-e^{-1}, 0)$, $a \geq 0 \Leftrightarrow \mu\tau \in [0, \infty)$
(ii) *Ist* $b\tau = \frac{2k+1}{2}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, *so gilt:*
$a = 0$ *und* $\mu\tau = (-1)^{k+1}\frac{2k+1}{2}\pi$.
(iii) *Ist* $|b\tau| \in (\,0, \pi)$, *so gilt:*
$a < 0$ *und* $\mu\tau \in (\,-\frac{\pi}{2}, -1\,)$.
Ist $|b\tau| \in (\,(2k+1)\pi, (2k+2)\pi\,)$, $k \in \mathbb{N}$, *so gilt:*
$a < 0 \Leftrightarrow \mu\tau \in (\,0, \frac{4k+3}{2}\pi\,)$, $a \geq 0 \Leftrightarrow \mu\tau \in [\,\frac{4k+3}{2}\pi, \infty\,)$
Ist $|b\tau| \in (\,(2k+2)\pi, (2k+3)\pi)$, $k \in \mathbb{N}$, *so gilt:*
$a < 0 \Leftrightarrow \mu\tau \in (\,-\frac{4k+5}{2}\pi, 0\,)$, $a \geq 0 \Leftrightarrow \mu\tau \in (\,-\infty, -\frac{4k+5}{2}\pi\,]$

Beweis:
(i) Die Funktion $f(x) = xe^x$ ist für $x \in (-\infty, 0)$ negativ, ist auf $[0, \infty)$ nichtnegativ, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, hat die Ableitung $(1+x)e^x$ mit der einzigen Nullstelle $x = -1$, und nimmt das eindeutige lokale Minimum in $x = -1$ an. Daher hat f den Bildbereich $[-e^{-1}, \infty)$ und $f_{|(-\infty,0)}$ den Bildbereich $[-e^{-1}, 0)$.
Für $b\tau = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ist System (5) äquivalent zu $f(a\tau) = \mu\tau$ und $b = 0$ und es folgt (a). Da mit $a < 0$ auch $a\tau < 0$ gilt, folgt auch (b).

(ii) Aus System (5) folgt für $b\tau = \frac{2k+1}{2}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $a = 0$ und $b\tau = \mu\tau$.

(iii) Für angegebenes b und mit $\hat{\mu} = \mu\tau$, $\hat{a} = a\tau$ und $\hat{b} = b\tau$ ist System (5) äquivalent zum System

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \hat{g}(\hat{b}) := -\hat{b}\cot(\hat{b}) \\ \hat{\mu} &= \hat{f}(\hat{b}) := -\frac{\hat{b}}{\sin(\hat{b})}e^{-\hat{b}\cot(\hat{b})}, \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \hat{f}'(\hat{b}) &= -e^{-\hat{b}\cot(\hat{b})}\frac{(1-\hat{b}\cot(\hat{b})+\frac{\hat{b}^2}{\sin(\hat{b})^2})\sin(\hat{b})-\hat{b}\cos(\hat{b})}{\sin(\hat{b})^2} \\ &= -e^{-\hat{b}\cot(\hat{b})}\frac{\sin(\hat{b})^2-2\hat{b}\sin(\hat{b})\cos(\hat{b})+\hat{b}^2}{\sin(\hat{b})^3} \\ &= -e^{-\hat{b}\cot(\hat{b})}\frac{\sin(\hat{b})^4+(\hat{b}-\sin(\hat{b})\cos(\hat{b}))^2}{\sin(\hat{b})^3} \\ \hat{g}'(\hat{b}) &= -\cot(\hat{b}) + \frac{\hat{b}}{\sin(\hat{b})^2} \\ &= \frac{\hat{b}-\sin(\hat{b})\cos(\hat{b})}{\sin(\hat{b})^2} \\ &= \frac{\hat{b}}{\sin(\hat{b})^2}\left(1 - \frac{\sin(2\hat{b})}{2\hat{b}}\right) \end{aligned}$$

Es gilt $\hat{g}' > 0$ auf $\mathbb{R}_+ \setminus \pi\mathbb{Z}$ und $\hat{g}' < 0$ auf $\mathbb{R}_- \setminus \pi\mathbb{Z}$. Da $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ und $\lim_{x\to\infty} xe^x = \infty$ folgt $\lim_{|\hat{b}|\uparrow k\pi} \hat{f}(\hat{b}) = \lim_{|\hat{b}|\uparrow k\pi} \hat{b}\cot(\hat{b})e^{\hat{b}\cot(\hat{b})} \lim_{\hat{b}\uparrow k\pi} \frac{1}{\cos(\hat{b})} = 0$, $\lim_{|\hat{b}|\downarrow k\pi} \hat{f}(\hat{b}) = \lim_{|\hat{b}|\downarrow k\pi} \hat{b}\cot(\hat{b})e^{\hat{b}\cot(\hat{b})} \lim_{\hat{b}\downarrow k\pi} \frac{1}{\cos(\hat{b})} = (-1)^k\infty$ für alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Auf den Intervallen $(\,2k\pi,(2k+1)\pi\,)$, $k \in \mathbb{Z}$, ist $\hat{f}'$ negativ und $\hat{f}$ somit streng monoton fallend. Auf den Intervallen $(\,(2k+1)\pi,(2k+2)\pi\,)$, $k \in \mathbb{Z}$, ist $\hat{f}'$ positiv und $\hat{f}$ somit streng monoton wachsend.

Da $\hat{f}$ und $\hat{g}$ auf jedem Intervall $(\,k\pi,(k+1)\pi\,)$, $k \in \mathbb{Z}$, streng monoton sind, gibt es zu jedem $\hat{\mu}$ auf jedem Intervall $(\,k\pi,(k+1)\pi\,)$, $k \in \mathbb{Z}$, höchstens eine Lösung und die Mengen $M_k = \{\,\hat{\mu} \mid \exists\,\hat{a} \in (-\infty,0), \hat{b} \in (\,k\pi,(k+1)\pi\,) : \hat{\mu} = \hat{f}(\hat{b}), \hat{a} = \hat{g}(\hat{b})\,\}$ bilden Intervalle. Da die Nullstellen von $\hat{g}$ bis auf 0 die Nullstellen von cos sind und für $k \in \mathbb{N}$ $\hat{f}(\frac{2k+1}{2}\pi) = (-1)^{k+1}\frac{2k+1}{2}\pi$, gilt: $M_0 = (\,-\frac{\pi}{2},-1\,)$, $M_{2k+1} = (\,0,\frac{4k+3}{2}\pi\,)$, $k \in \mathbb{N}$, $M_{2k+2} = (\,-\frac{4k+5}{2}\pi,0\,)$, $k \in \mathbb{N}$. Wegen $\hat{f}(-\hat{b}) = \hat{f}(\hat{b})$ und $\hat{g}(-\hat{b}) = \hat{g}(\hat{b})$ folgt $M_{-(k+1)} = M_k$, $k \in \mathbb{N}$. □

KOROLLAR 6 $M_{stat} = \frac{1}{\tau}(-\frac{\pi}{2},0)$.

Beweis:
Aus den Definitionsbereichen und dem Monotonieverhalten der Funktionen f, $\hat{f}$, $\hat{g}$ aus den Beweisen von Lemma 5.(i) bzw. 5.(iii) folgt, daß die charakteristische Gleichung $\lambda = \mu e^{-\tau\lambda}$ für alle $\mu\tau \in \mathbb{R}$ Lösungen λ besitzt.
Aus Lemma 5 folgt, daß für $\mu\tau \in (-\infty,-\frac{\pi}{2}]\cup[0,\infty)$ Lösungen λ von System (5) mit $Re(\lambda) \geq 0$ existieren, daß für $\mu\tau \in (-\frac{\pi}{2},0)$ nur Lösungen mit $Re(\lambda) < 0$ existieren.
Damit ist aber wegen Satz 4.(i) $M_{stat} = \frac{1}{\tau}(-\frac{\pi}{2},0)$. □

3 Stabilität numerischer Verfahren für affine SDDE

In der Numerik gibt es u.a. für Integrationsverfahren zwei zentrale Begriffe. Der eine ist der der Konsistenz und beschreibt die algorithmische Korrektheit eines numerischen Verfahrens, und wird verfeinert um den Begriff der Konvergenzordnung, welcher ein Maß für den Abstand der Verfahrenslösung von einer approximierten Lösung beschreibt. Der zweite zentrale Begriff ist der der Stabilität von Integrationsverfahren, welcher den Erhalt einer oder mehrer wesentlicher Eigenschaften einer Lösung der unterliegenden Gleichung beschreibt. Das Untersuchen von Stabilität ist für allgemeine Klassen von Differentialgleichungen außerordentlich komplex. Daher geht man bei der Stabilitätsanalyse oft so vor, daß man eine handhabbare Klasse von Testproblemen und eine geeignete Klasse von numerischen Verfahren zur Berechnung dieser Testprobleme in Hinsicht auf eine wünschenswerte Stabilitätsvorstellung hin untersucht. Der dadurch entstehende Stabilitätsbegriff kann dann wiederum bei der Präselektion von Verfahren weitaus komplexerer Problemklassen hilfreich sein.

Im folgenden soll der Begriff der absoluten Stabilität (A-Stabilität) eines Integrationsverfahrens für stochastische Delaydifferentialgleichungen in Anlehnung an die von Björck/Dahlquist ([Bjo74]) eingeführte A-Stabilität für deterministische Differentialgleichungen definiert und untersucht werden. Dazu wird zunächst dem skizzierten Schema gefolgt und das Testproblem, die Verfahrensklasse und der Stabilitätsbegriff fixiert sowie an Beispielen erläutert. Im Anschluß daran wird ein Kriterium für die A-Stabilität in diesem Rahmen gegeben werden. Das Bestimmen von sogenannten Stabilitätsgebieten, also Mengen im Raum der Parameter des Testproblems bzw. der Verfahrensklasse, die die Stabilitätseigenschaft beschreiben, ist aus praktischen Gründen notwendig, da damit eine angemessene Auswahl des Schrittweitenparameters h, einer Steuergröße der numerischen Verfahren, getroffen werden kann. Das Kriterium für Stabilität, ein Eigenwertproblem, ist durch Hochdimensionaligkeit charakterisiert und wirft insofern Schwierigkeiten bei der Berechnung von Stabilitätsgebieten auf. Für den Spezialfall des expliziten Eulerverfahren wird jedoch hier ein Algorithmus angegeben, der die explizite Berechnung von Stabilitätsgebieten ermöglicht und dem Studium des Einflusses von Zeitverzögerung auf die Stabilitätgebiete dient.

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit einer Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$. Als Testproblem wird die affine SDDE (3) unter den im vorangehenden Abschnitt angegebenen Bedingungen betrachtet, d.h.

$$\begin{aligned} dX(t) &= \mu X(t-\tau)\, dt + dW(t), \qquad t \in [0,\infty) \\ X_{|[-\tau,0]} &= \xi \end{aligned} \tag{6}$$

wobei $\{(W(t), \mathcal{F}_t)\}_{t\in[0,t\infty)}$ ein reeller Standardwienerprozeß, $\xi \in (\Omega, \mathcal{C}([-\tau,0], \mathbb{R})$ $\mathcal{F}_0$-meßbar, $\tau \in (0,\infty)$ und $\mu \in \mathbb{R}$.

Für die numerische Lösung wird angenommen, daß eine Lösung der SDDE (6) auf einem äquidistantem arithmetischen Gitter $h\mathbb{N}$ der Gitterschrittweite $h > 0$ approximiert wird, und daß das numerische Verfahren reelle Zustandswerte $x_n = X(nh)$, $n \in \mathbb{N}$, erzeugt. Die betrachtete Klasse von numerischen Verfahren ist die der Einschrittverfahren über Zustandsvektoren des Gedächtnisses $\{\hat{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$\hat{x}_{n+1} = T(\mu, h; p)\hat{x}_n + S(h; q)\Delta_n \hat{W}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Hierbei sind

$k = k(h) = \frac{\tau}{h} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

p, q Parametervektoren des Verfahrens

T, S geeignete Transitionsfunktionen des Verfahrens (parameterisierte Matrizen)

$\hat{x}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ \dots \\ x_{n-k} \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$, Vektoren der Zustandsgrößen

$$\Delta_n \hat{W} = \frac{1}{\sqrt{h}} \begin{pmatrix} W((n+1)h) - W(nh) \\ W(nh) - W((n-1)h) \\ \dots \\ W((n-k+1)h) - W((n-k)h) \end{pmatrix}, \; n \in \mathbb{N}, \quad \text{Inkrementvektoren des Wienerprozesses} \tag{8}$$

Die Intention der von Björck/Dahlquist eingeführten A-Stabiltät ist es, die Verfahren auszuzeichnen, die stationäre Lösungen linearer Differentialgleichungen asymptotisch korrekt berechnen. Bei einer Übertragung auf den stochastischen Fall sind hierbei der Begriff der stabilen Lösung und der „asymptotischen Korrektheit" anzupassen.

Definition 7
Ein Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ im Einschrittverfahren (7) heißt **stabil**, *wenn die von (7) erzeugten Zustandsvektoren in Verteilung gegen eine k-dimensionale Grenzverteilung F konvergieren, d.h. wenn*

$$\{\hat{x}\}_n \xrightarrow{d} \hat{x} \qquad \textit{mit} \qquad \hat{x} \sim F$$

Das **Stabilitätsgebiet** M^k_{stab} *des Verfahrens ist die Menge aller stabilen Parameter μ von (7).*
*Ein vektorielles Einschrittverfahren heißt A-***stabil**, *wenn alle Parameter μ des Tesproblems (6), für die eine stationäre Lösung von (6) existiert, stabil sind.*

Beispiel 8 (Euler explizit)
Die Approximationsformel des expliziten Eulerverfahrens ist

$$x_{n+1} = x_n + \mu h x_{n-k} + \sqrt{h}\Delta_n W \tag{9}$$

Dem allgemeinen Schema (7) entsprechend sind

$$T_{EE}(\mu, h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \mu h \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; S_{EE}(h) = \sqrt{h} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Beispiel 9 (Euler semiimplizit)
Die Approximationsformel des semiimpliziten Eulerverfahrens mit dem Parameter $\alpha \in [0,1]$ als Maß der Implizitheit ($\alpha = 0$ - dem expliziten Eulerverfahren, $\alpha = 1$ - implizites Eulerverfahren) ist

$$x_{n+1} = x_n + \mu h\,(\alpha x_{n-k+1} + (1-\alpha)x_{n-k}) + \sqrt{h}\Delta_n W \tag{11}$$

Dem allgemeinen Schema (7) entsprechend sind

$$T_{ES}(\mu,h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \alpha\mu h & (1-\alpha)\mu h \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},\ S_{ES}(h) = \sqrt{h}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Für das Treffen von Aussagen über die Stabilität erweist sich die folgende Darstellungsformel in den Zustandsvektoren als hilfreich, welche durch Rekursion aus dem Einschrittverfahren (7) gewonnen werden kann:

$$\hat{x}_n = T(\mu,h;p)^n \hat{x}_0 + \sum_{i=0}^{n-1} T(\mu,h;p)^{n-1-i} S(h;q)\Delta_i \hat{W} \tag{13}$$

Anhand von (13) ist ersichtlich, daß $\hat{x}_n$ normalverteilt mit Erwartungswert und Kovarianz

$$\begin{aligned} E[\hat{x}_n] &= T(\mu,h;p)^n E[\hat{x}_0] \\ Cov[\hat{x}_n] &= T(\mu,h;p)^n Cov[\hat{x}_0](T(\mu,h;p)^n)^\top \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j_1,j_2=\min\{i-k,0\}}^{i} T(\mu,h;p)^{n-1-j_1} S(h;q) Cov[\Delta_{j_1}\hat{W}, \Delta_{j_2}\hat{W}] S(h;q)^\top (T(\mu,h;p)^{n-1-j_2})^\top. \end{aligned} \tag{14}$$

sind. Mit der Jordanstruktur von $T(\mu,h;p)$

$$T(\mu,h;p) = P(\mu,h;p)J(\mu h;p)P(\mu,h;p)^\top$$

und

$$\begin{aligned} C_{j_1-j_2}(\mu,h;q) &= S(h;q)Cov[\Delta_{j_1}\hat{W}, \Delta_{j_2}\hat{W}]S(h;q)^\top, \\ C^P_{j_1-j_2}(\mu,h;p,q) &= P(\mu,h;p)^\top C_{j_1-j_2}(\mu,h;q)P(\mu,h;p) \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} E[\hat{x}_n] &= P(\mu,h;p)J(\mu,h;p)^n P(\mu,h;p)^\top E[\hat{x}0] \\ Cov[\hat{x}_n] &= P(\mu,h;p)J(\mu,h;p)^n P(\mu,h;p)^\top Cov[\hat{x}_0]P(\mu,h;p)(J(\mu,h;p)^n)^\top P(\mu,h;p)^\top \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j_1,j_2=\min\{i-k,0\}}^{i} P(\mu,h;p)J(\mu,h;p)^{n-1-j_1} C^P_{j_1-j_2}(\mu,h;p,q)(J(\mu,h;p)^{n-1-j_2})^\top P(\mu,h;p)^\top. \end{aligned} \tag{15}$$

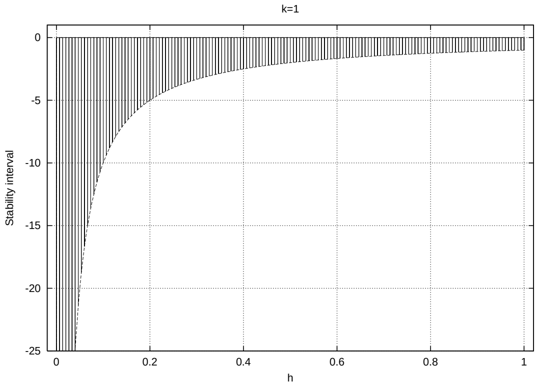
Man verifiziert daher, daß genau dann, wenn alle Eigenwerte von $T(\mu,h;p)$ in der offenen Kugel $B_1(0) \subset \mathbb{C}$ liegen, $E[\hat{x}_n]$ und $Cov[\hat{x}_n]$ konvergieren, sodaß dann der Parameter μ im Einschrittverfahren (7) stabil ist und die Grenzverteilung

$$N(\,0\,, \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j_1,j_2=\min\{i-k,0\}}^{i} T(\mu,h;p)^{n-1-j_1} C_{j_1-j_2}(\mu,h;q)(T(\mu,h;p)^{n-1-j_2})^\top) \tag{16}$$

erzeugt.

Beispiel 10 (Euler explizit)
Für $k = 1$ sind die Eigenwerte von T_{EE} $\lambda_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4\mu h}$, $h = \tau$, und betragsmäßig kleiner als eins genau dann wenn $\mu h \in (-1,0)$ bzw. wenn $\mu\tau \in (-1,0)$.

Anhand des Beispiels ist ersichtlich (vgl. nebenstehendes Bild), daß die Stabilitätsgebiete des Eulerverfahrens für $k = 1$ abhängig von der Wahl der Gitterschrittweite $h = \frac{\tau}{k}$ sind, bzw. daß vorgegebene Parameter μ nur für beschränkte Mengen an Schrittweiten stabil sind. Es ist daher von Interesse, die h-abhängigen Stabilitätsgebiete zu bestimmen, um anhand von ihnen eine Wahl der Gitterschrittweite zu treffen, sodaß A-Stabilität des Verfahrens vorliegt.



Allgemeiner ist für das explizite Eulerverfahren ersichtlich, daß die Bedingung $|\lambda| < 1$ an die Eigenwerte von T_{EE} zu

$$| \mu h | \leq | \lambda |^k + | \lambda |^{k+1} \leq 2,$$

und damit zu einer Einschränkung in der Wahl der h führt, wenn A-Stabilität mit dem Eulerverfahren erzielt werden soll. Es gilt zu bemerken, daß dieselbe Problematik von der A-Stabilität für deterministische Differentialgleichungen her bekannt ist. Beispielsweise liegt für das explizite Eulerverfahren

$$x_{n+1} = x_n + \mu h x_n$$

mit der Transitionsfunktion $R(h) = 1 + \mu h$ die A-Stabilität vor, wenn $| R(h) | < 1$. Das implizite Eulerverfahren

$$x_{n+1} = x_n + \mu h x_{n+1}$$

mit der Transitionsfunktion $R(h) = \frac{1}{1-\mu h}$ weist A-Stabilität für $| R(h) | < 1$ auf. Der Übergang von einem expliziten zu einem impliziten Verfahren kann also zu Stabilitätsgebieten führen, bei denen die Einschränkungen an die Schrittweite h weniger restriktiv ist. Die Ursache hierfür liegt darin, daß die impliziten Verfahren eine gebrochen-rationale Transitionsfunktion erzeugen. Ähnlich wie bei den deterministischen Verfahren ist es von Interesse, auch für SDDE (6) Einschränkungen an die Schrittweite h, wie sie oben vorzufinden waren, abzuschwächen. Anhand des semiimpliziten Eulerverfahrens ist jedoch ersichtlich, daß das Übertragen des semiimpliziten Ansatzes von den DE auf SDDE (6) für $\tau > 0$ und $k > 2$ nicht zu einer essentiell anderen Transitionsfunktion führt - die Transitionsfunktion T enthält keine Inverse. Somit ist zunächst keine bessere Schrittweitensteuerung möglich als die, die ohnehin durch explizite Verfahren erreichbar ist.

Einen besseren Ansatz als den der semiimpliziten Methoden könnte die Anpassung der von Milstein/Platen/Schurz ([Mil98]) eingeführten Balanced Implicit Methods bieten. Es wird perspektivisch vorgeschlagen, (7) um Korrekturterme $C_n(\hat{x}_{n+1}, \hat{x}_n)$ höherer Ordnung der stochastischen Taylorentwicklung zu ergänzen, die die starke Konvergenzordnung des numerischen Basisverfahrens nicht ändert, aber eine echte Implizitheit einführen kann:

$$\hat{x}_{n+1} = C_n(\hat{x}_{n+1}, \hat{x}_n) + T(\mu, h; p)\hat{x}_n + S(h; q)\Delta_n \hat{W}, \qquad n \in \mathbb{N} \tag{17}$$

Die Funktion C_n wird an dieser Stelle nicht weiter spezifiziert und bildet einen Freiheitsgrad in der Wahl einer BIM für SDDE.

Der Schwerpunkt dieser Arbeit soll jedoch in der exemplarischen Bestimmung von Stabilitätsgebieten für den einfachsten Fall von (6), (7) liegen, dem expliziten Eulerverfahren unter reellwertigem Parameter μ. Stabilität eines Parameters μ liegt gemäß Definition 7 und den sich anschließenden Betrachtungen vor, wenn alle Eigenwerte von $T_{EE}(\mu, h)$ betragsmäßig kleiner 1 sind. Die Eigenwerte von $T_{EE}(\mu, h)$ werden mit der charakteristischen Funktion

$$h_{EE}(\lambda) = | T_{EE}(\mu, h) - \lambda E | = (-1)^{k(h)+1}(\lambda^{k(h)+1} - \lambda^{k(h)} - \mu h). \tag{18}$$

und der charakteristische Gleichung $h_{EE}(\lambda) = 0$ berechnet. Da sich die Bedingung $|\lambda| < 1$ an einen Eigenwert λ von $T_{EE}(\mu, h)$ in Polarkoordinatennotation $\lambda = re^{i\varphi}$ zu $r < 1$ vereinfacht, wird in der charakteristischen Gleichung zum Polarkoordinatensystem übergegangen. Berücksichtigt man $h = \frac{\tau}{k}$, zeigt sich durch elementare Umformungen, daß das System (18) zum Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} k(\, r^{k+1}\cos((k+1)\varphi) - r^k\cos(k\varphi)\,) & = & \mu\tau \\ r^{k+1}\sin((k+1)\varphi) - r^k\sin(k\varphi) & = & 0 \end{array} \tag{19}$$

äquivalent ist. Definiert man $\mathbf{F}(r) := k(r^{k+1} - r^k)$, $\mathbf{G}(r) := (-1)^{k+1}k(r^{k+1} + r^k)$, $\mathbf{f}(\varphi) := \frac{\sin(k\varphi)}{\sin((k+1)\varphi)}$ und $\mathbf{g}(\varphi) := k\sin(-\varphi)\frac{\sin(k\varphi)^k}{\sin((k+1)\varphi)^{k+1}}$, so können die Lösungen λ von System (18) wie folgt charakterisiert werden:

LEMMA 11
Eine Lösung λ von (18) ist entweder rein reell und aus der Menge $\{0\} \cup \{r_1 \in [0,\infty) \mid F(r_1) = \mu\tau\} \cup \{-r_2 \in \mathbb{R} \mid G(r_2) = \mu\tau\}$ oder sie ist in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (echt komplex) und ihre Polarkoordinaten genügen dem System

$$\begin{array}{rcl} r & = & f(\varphi) \\ \mu\tau & = & g(\varphi) \end{array} \tag{20}$$

Der Fall $\lambda = 0$ ist nur für $\mu\tau = 0$ möglich.

Beweis:
Fall $\lambda = 0$:
(18) ist mit $r = 0$ und $\varphi = 0$ äquivalent zu $\mu h = \mu\frac{\tau}{k} = 0$. Damit ist $\lambda = 0$ genau dann Lösung, wenn $\mu\tau = 0$.
Fall $r \neq 0, \sin((k+1)\varphi) = 0$:
Dann ist $r^{k+1}\sin((k+1)\varphi) - r^k\sin(k\varphi) = 0$ äquivalent zu $\sin(k\varphi) = 0$. Für $k \leq 1$ haben die Gleichungen $\sin(k\varphi) = 0$, $\sin((k+1)\varphi) = 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ nur die Lösungen $\varphi \in \{0, \pi\}$. Ein Einsetzen in $r^{k+1}\cos((k+1)\varphi) - r^k\cos(k\varphi) - \mu\frac{\tau}{k} = 0$ verifiziert die Bedingungen an r.
Fall $r \neq 0, \sin((k+1)\varphi) \neq 0$:
Die Gleichung $r^{k+1}\sin((k+1)\varphi) - r^k\sin(k\varphi) = 0$ ist äquivalent zu $r = \frac{\sin(k\varphi)}{\sin((k+1)\varphi)}$.
Ein Einsetzen dieser Darstellung in die Gleichung $r^{k+1}\cos((k+1)\varphi) - r^k\cos(k\varphi)) - \mu\frac{\tau}{k} = 0$ und das Anwenden von Additionstheoremen für den Sinus und Kosinus ergeben das obige System. □

In den Funktionen f und g tritt der Faktor $\sin((k+1)\varphi)^{-1}$ auf, sodaß f und g die gemeinsamen Polstellen $\{t_l^{k+1}\}_{l\in\mathbb{N}_{2k+2}}$, die Nullstellen von $\sin((k+1)\varphi)$ in $[0, 2\pi]$, besitzen. Somit gibt es entweder reelle Eigenwerte in $R := \{(r,\varphi) \mid r \in [0,\infty), \varphi \in \{0,\pi\}\}$ oder echt komplexe Lösungen in den Streifen $S_l := \{(r,\varphi) \mid r \in [0,\infty), \varphi \in (t_l^{k+1}, t_{l+1}^{k+1})\}$, $l \in \mathbb{N}_{2k+1}$, der komplexen Ebene. Es zeigt sich, daß für jedes $\mu\tau$ die Zahl der reellen Eigenwerte angegeben werden kann, daß pro Streifen S_l, $l \in \mathbb{N}_{2k+1}$, für jedes $\mu\tau$ höchstens ein echt komplexer Eigenwert $\lambda = re^{i\varphi}$ mit $\varphi \in (t_l^{k+1}, t_{l+1}^{k+1})$ existiert, und daß die Menge aller $\mu\tau$ mit echt komplexen Eigenwerten in S_l explizit berechnet werden kann. Dazu werden jedoch die Monotonieeigenschaften der Funktionen F, G, f und g benötigt. In den Lemmata 12-17 werden die notwendigen Eigenschaften der Funktionen gezeigt. Aus den einzelnen „stabilen" Parameterbereichen pro Streifen bzw. R kann dann das Stabilitätsgebiet für das explizite Eulerverfahren konstruiert werden (Lemma 18).

Das erste Lemma charakterisiert die Monotonieverhältnisse von F und G auf dem Definitionsbereich von r sowie Lösungen der Gleichungen $F(r) = x$ und $G(r) = x$.

LEMMA 12
F nimmt auf $[0,\infty)$ in $\frac{k}{k+1}$ das lokale Minimum $-(\frac{k}{k+1})^{k+1}$ an.
Gleichung $F(r) = x$ hat für $x \in (-(\frac{k}{k+1})^{k+1}, 0]$ genau zwei Lösungen. Sie sind in $[0,1]$.
Gleichung $F(r) = x$ hat für $x = -(\frac{k}{k+1})^{k+1}$ genau eine Lösung. Sie ist in $[0,1)$.
Gleichung $F(r) = x$ hat für $x \in (0,\infty)$ genau eine Lösung. Sie ist in $(1,\infty)$.
G ist auf $[0,\infty)$ für ungerade (gerade) k streng monoton wachsend (fallend).
G hat für ungerade (gerade) k auf $[0,\infty)$ den Wertebereich $[0,\infty)$ ($(-\infty, 0]$).

Beweis:
$F'(r) = k(k+1)r^k(r - \frac{k}{k+1})$. Damit ist auf $[0, \frac{k}{k+1})$ F' negativ und F streng monoton fallend, ist auf $(\frac{k}{k+1}, \infty)$ F' positiv und F streng monoton wachsend, hat F in $\frac{k}{k+1}$ das lokale Minimum $k\left((\frac{k}{k+1})^{k+1} - (\frac{k}{k+1})^k\right) = -(\frac{k}{k+1})^{k+1}$. Ferner zeigen $F(0) = F(1) = 0$, $F(\frac{k}{k+1}) < 0$, $\lim_{r\to\infty} F(r) = \infty$ für $k \in \mathbb{N}$ sowie die Monotonieverhältnisse von F die Behauptung über die Zahl der Wurzeln.
Die Ableitung $G'(r) = (-1)^{k+1}((k+1)^2 r^{k+1} + (k+1)kr^k)$ zeigt die strikte Monotonie von G ($sgn(G(r)) = (-1)^{k+1}$ auf $(0,\infty)$), $G(0) = 0$ und $\lim_{x\to\infty}(x^{k+1} + x^k) = \infty$ zeigen die Aussage über den Wertebereich. □

In den Funktionen f und g treten die Brüche $\frac{\sin(k\varphi)}{\sin((k+1)\varphi)}$ auf, sodaß die Nullstellen $\{t_l^k\}_{l\in\mathbb{N}_{2k}}$ von $\sin(k\varphi)$ und die Nullstellen $\{t_l^{k+1}\}_{l\in\mathbb{N}_{2k+2}}$ von $\sin((k+1)\varphi)$ die Polstellen von f und g auf $[0,2\pi]$ sind. Das zweite Lemma trifft eine Aussage über die Lage und insbesondere die Schachtelung von $\{t_l^k\}_{l\in\mathbb{N}_{2k}}$ und $\{t_l^{k+1}\}_{l\in\mathbb{N}_{2k+2}}$ auf $(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$:

LEMMA 13
Für $l\in\{1,\ldots,k-1\}$ *ist* $t_l^k\in(t_l^{k+1},t_{l+1}^{k+1})$.
Für $l\in\{k+1,\ldots,2k-1\}$ *ist* $t_l^k\in(t_{l+1}^{k+1},t_{l+2}^{k+1})$.

Beweis:
Da der Fall $k\in\{1,2\}$ trivial ist, wird O.B.d.A. $k>2$ betrachtet.
Für $l\in\{1,\ldots,k-1\}$ ist $t_l^k-t_l^{k+1}=\frac{l}{(k+1)k}\pi\in(0,\frac{\pi}{k+1})$.
Für $l\in\{k+1,\ldots,2k-1\}$ ist $t_l^k-t_{l+1}^{k+1}=\frac{l}{(k+1)k}\pi\in(0,\frac{\pi}{k+1})$. □

Im nachfolgenden Lemma werden die $\varphi\in[0,2\pi)$ bestimmt, für die (r,φ) Eigenwert von T_{EE} mit $r\in[0,1)$ ist. Ferner wird das Monotonieverhalten von f charakterisiert und die Symmetrie von f bezüglich dem Argumentwert π gezeigt.

LEMMA 14
(i) $\forall\varphi\in[0,2\pi]:\ f(\varphi)=f(2\pi-\varphi)$
(ii) f *ist monoton wachsend auf* $(t_l^{k+1},t_{l+1}^{k+1})$, $l\in\{0,\ldots,k\}$
f *ist monoton fallend auf* $(t_l^{k+1},t_{l+1}^{k+1})$, $l\in\{k+1,\ldots,2k+1\}$
(iii) $\forall\, l\in\mathbb{N}_{2k+1}\setminus\{k,k+1\}\ \exists\, a_l^{k+1},b_l^{k+1}(>a_l^{k+1})\in[t_l^{k+1},t_{l+1}^{k+1}]\ \forall\, s\in[a_l^{k+1},b_l^{k+1}]:f(s)\in[0,1]$
$a_0^{k+1}=0,\ b_0^{k+1}=\frac{1}{2k+1}\pi,\ a_{2k+1}^{k+1}=\frac{4k+1}{2k+1}\pi,\ b_{2k+1}^{k+1}=2\pi$
$\forall l\in\{1,\ldots,k-1\}:\ a_l^{k+1}=t_l^k, b_l^{k+1}=\frac{2l+1}{2k+1}\pi,$
$\forall l\in\{k+2,\ldots,2k-1\}:\ a_l^{k+1}=\frac{2l+1}{2k+1}\pi, b_l^{k+1}=t_l^k$

Beweis:
(i) $f(2\pi-\varphi)=\frac{\sin(k(2\pi-\varphi))}{\sin((k+1)(2\pi-\varphi))}=\frac{-\sin(k\varphi))}{-\sin((k+1)\varphi)}=f(\varphi)$.

(ii) Wegen (i) wird lediglich der Fall $l\in\{0,\ldots,k\}$ betrachtet.
Für $k=1$ ist $f(\varphi)=\frac{1}{2\cos(\varphi)}$ und die strikte Monotonie ist offensichtlich. Für $k=2$ ist $f'(\varphi)=\frac{2\sin(\varphi)(1-\sin(2\varphi)\cos(3\varphi))}{\sin(3\varphi)^2}$, somit $f'(\varphi)>0$ auf $(0,\frac{\pi}{3})$, $(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$ und $(\frac{2\pi}{3},\pi)$. Für $k\geq 3$ wird der Beweis ebenfalls über die Vorzeichen der Ableitung f' geführt.
Es gilt:

$$f'(\varphi)=\frac{k\cos(k\varphi)\sin((k+1)\varphi)-(k+1)\sin(k\varphi)\cos((k+1)\varphi)}{\sin^2((k+1)\varphi)}=\frac{k\sin(\varphi)-\sin(k\varphi)\cos((k+1)\varphi)}{\sin^2((k+1)\varphi)}$$

Sei $\varphi_k=arc\sin(\frac{1}{k})$. Für $\varphi\in[\varphi_k,\pi-\varphi_k]$ ist $k\sin(\varphi)\geq 1$, somit $f'(\varphi)\geq 0$.
Es gilt:

$$\begin{aligned}\sin(\tfrac{\pi}{2k+2})-\tfrac{1}{k} &= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i+1)!}\frac{\pi^{2i+1}}{(2k+2)^{2i+1}}-\frac{1}{k}\\ &\geq \frac{\pi}{2k+2}-\frac{\pi^3}{48(k+1)^3}-\frac{1}{k}=\frac{24(\pi-2)(k+1)^3-24\pi(k+1)^2-\pi^3(k+1)+\pi^3}{48(k+1)^3k}\underset{k\geq 3}{\geq}0,\end{aligned}$$

also $\varphi_k<\frac{\pi}{2k+2}$.
Somit folgt auf $[0,\varphi_k]$:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}(k\sin(\varphi)-\sin(k\varphi))=k(\cos(\varphi)-\cos(k\varphi))\geq 0$$
$$k\sin(0)-\sin(k0)=0$$
$$k\sin(\varphi)-\sin(k\varphi)\cos((k+1)\varphi)\geq k\sin(\varphi)-\sin(k\varphi)\geq 0$$

Ferner folgt auf $[0,\varphi_k]$:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}(k\sin(\pi-\varphi)-\sin(k(\pi-\varphi)))=k(\cos(\varphi)-\cos(k\varphi))\geq 0$$
$$k\sin(\pi-0)-\sin(k(\pi-0))=0$$

Somit folgt auf $[\pi-\varphi_k,\pi]$ wegen $\sin(k\varphi)\cos((k+1)\varphi)>0$ und $1\geq|\cos((k+1)\varphi)|$:

$$k\sin(\varphi)-\sin(k\varphi)\cos((k+1)\varphi)\geq k\sin(\varphi)-\sin(k\varphi)\geq 0$$

(iii) Es gilt: $\lim\limits_{\varphi\to 2\pi} \frac{\sin(k\varphi)}{\sin((k+1)\varphi)} = \lim\limits_{\varphi\to 0} \frac{\sin(k\varphi)}{\sin((k+1)\varphi)} = \frac{k}{k+1} \frac{\lim\limits_{\varphi\to 0} \frac{\sin(k\varphi)}{k\varphi}}{\lim\limits_{\varphi\to 0} \frac{\sin((k+1)\varphi)}{(k+1)\varphi}} = \frac{k}{k+1} \in [0,1]$.

Ferner ist $\sin((k+1)\varphi) - \sin(k\varphi) = 2\sin(\frac{1}{2}\varphi)\cos((k+\frac{1}{2})\varphi)$ mit der Nullstellenmenge $\{0, 2\pi\} \cup \{\frac{2l+1}{2k+1}\pi \mid l \in \mathbb{N}_{2k}\}$. Somit gibt es auf jedem Intervall $[t_l^{k+1}, t_{l+1}^{k+1}]$, $l \in \{0, \ldots, k-1, k+2, \ldots, 2k+1\}$, genau ein Argument s mit $f(s) = 1$. Wegen dem Satz von Weierstraß sind damit die angegebenen Intervalle $[a_l^{k+1}, b_l^{k+1}]$ eindeutig. $\square$

Im nächsten Lemma werden die Eigenschaften von g untersucht, d.h. die Symmetrie, eine Darstellungsformel von g bzw. g' als Produkt sowie die Monotonieintervalle von g anhand des Vorzeichens von g'.

Lemma 15

(i) $\forall \varphi \in [0, 2\pi]: \; g(\varphi) = g(2\pi - \varphi)$

(ii) $\lim\limits_{\varphi\to 2\pi} g(\varphi) = \lim\limits_{\varphi\to 0} g(\varphi) = \lim\limits_{\varphi\to \pi} g(\varphi) = -(\frac{k}{k+1})^{k+1}$

(iii) $g(\varphi) = -kf(\varphi)^k \frac{\sin(\varphi)}{\sin((k+1)\varphi)}$

$g'(\varphi) = -g(\varphi)\,\big(\,(k+1)^2\cot((k+1)\varphi) - k^2\cot(k\varphi) - \cot(\varphi)\,\big)$

(iv) *Auf* $(0,\pi) \setminus \frac{1}{k+1}\mathbb{Z}$ *gilt:*

$$sgn(g'(\varphi)) = \begin{cases} -1 & \varphi \in (t_0^{k+1}, t_1^{k+1}) \\ 1 & \varphi \in (t_k^{k+1}, t_{k+1}^{k+1}) \\ (-1)^{k+1} & \varphi \in (t_l^{k+1}, t_l^k), \quad l \in (1 + 2\mathbb{N} \cap \{1, \ldots, k-1\}) \\ 1 & \varphi \in (t_l^k, t_{l+1}^{k+1}), \quad l \in (1 + 2\mathbb{N} \cap \{1, \ldots, k-1\}) \\ (-1)^k & \varphi \in (t_l^{k+1}, t_l^k), \quad l \in (2 + 2\mathbb{N} \cap \{1, \ldots, k-1\}) \\ -1 & \varphi \in (t_l^k, t_{l+1}^{k+1}), \quad l \in (2 + 2\mathbb{N} \cap \{1, \ldots, k-1\}) \end{cases}$$

Beweis:

(i) $g(2\pi - \varphi) = -k\sin(2\pi - \varphi)\frac{\sin(k(2\pi-\varphi))^k}{\sin((k+1)(2\pi-\varphi))^{k+1}} = -k(-1)\sin(\varphi)\frac{(-1)^k \sin(k\varphi)^k}{(-1)^{k+1}\sin((k+1)\varphi)^{k+1}} = g(\varphi)$

(ii) $\lim\limits_{\varphi\to 0} g(2\pi - \varphi) = \lim\limits_{\varphi\to 0} g(\varphi) = \lim\limits_{\varphi\to 0} -\left(\frac{k}{k+1}\right)^k \left(\frac{\sin(\varphi)}{\varphi}\right)\left(\frac{\sin(k\varphi)}{k\varphi}\right)^k \left(\frac{(k+1)\varphi}{\sin((k+1)\varphi)}\right)^{k+1} = -\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}$.

$\lim\limits_{\varphi\to \pi} g(\varphi) = \lim\limits_{\varphi-\pi\to 0} -\left(\frac{k}{k+1}\right)^k \left(\frac{\sin(\varphi-\pi)}{\varphi-\pi}\right)\left(\frac{\sin(k(\varphi-\pi))}{k(\varphi-\pi)}\right)^k \left(\frac{(k+1)(\varphi-\pi))}{\sin((k+1)(\varphi-\pi))}\right)^{k+1} = -\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}$.

(iii) Für $\varphi \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{k+1}\mathbb{Z}$ gilt:

$$\begin{aligned} g'(\varphi) &= -k\cos(\varphi)\frac{\sin(k\varphi)^k}{\sin((k+1)\varphi)^{k+1}} \\ &\quad -k\sin(\varphi)\frac{k^2\sin(k\varphi)^{k-1}\cos(k\varphi)\sin((k+1)\varphi)^{k+1} - (k+1)^2\sin(k\varphi)^k\sin((k+1)\varphi)^k\cos((k+1)\varphi)}{\sin(k\varphi)^{2k+2}} \\ &= -k\cos(\varphi)\frac{\sin(k\varphi)^k}{\sin((k+1)\varphi)^{k+1}} \\ &\quad -k\sin(\varphi)\frac{\sin(k\varphi)^{k-1}}{\sin((k+1)\varphi)^{k+2}}\big(k^2\sin((k+1)\varphi)\cos(k\varphi) - (k+1)^2\sin(k\varphi)\cos((k+1)\varphi)\big) \\ &= -k\sin(\varphi)\frac{\sin(k\varphi)^k}{\sin((k+1)\varphi)^{k+1}}\cot(\varphi) \\ &\quad -k\sin(\varphi)\frac{\sin(k\varphi)^k}{\sin((k+1)\varphi)^{k+1}}\big(k^2\cot(k\varphi) - (k+1)^2\cot((k+1)\varphi)\big) \end{aligned}$$

(iv) Der Beweis wird mit Hilfe der Produktzerlegung der Ableitung geführt.

Die Vorzeichenintervalle von $-g(\varphi)$ sind bekannt. Der schwierigere Teil besteht darin, die Funktion $h(\varphi) = (k+1)^2\cot((k+1)\varphi) - k^2\cot(k\varphi) - \cot(\varphi)$ zu untersuchen. Zunächst wird die Funktion $h_k(\varphi) = (k+1)^2\cot((k+1)\varphi) - k^2\cot(k\varphi)$ betrachtet. Die Funktion h_k hat auf $[0,\pi]$ die Polstellenmenge $\{t_l^{k+1}\}_{l\in\mathbb{N}_{k+1}} \cup \{t_l^k\}_{l\in\mathbb{N}_k}$. Im folgenden werden das Vorzeichen und die Monotonie von h_k auf den durch die Polstellen gebildeten Intervallen von $[0,\pi]$ untersucht.

Auf $\mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{k+1}\mathbb{Z}$ ist $h_k'(\varphi) = -\frac{(k+1)^3}{\sin((k+1)\varphi)^2} + \frac{k^3}{\sin(k\varphi)^2}$ und somit $h_k'(\varphi) = 0$ gdw. $f(\varphi) = \pm(\frac{k}{k+1})^{\frac{3}{2}}$. Da f auf den Intervallen $(t_l^{k+1}, t_{l+1}^{k+1})$ streng monoton ist, gibt es auf jedem Intervall $(t_l^{k+1}, t_{l+1}^{k+1})$ genau zwei Nullstellen $c_l^{k+1} = f^{-1}_{|(t_l^{k+1}, t_{l+1}^{k+1})}(-\frac{k}{k+1})^{\frac{3}{2}})$, $d_l^{k+1} = f^{-1}_{|(t_l^{k+1}, t_{l+1}^{k+1})}(\frac{k}{k+1})^{\frac{3}{2}}) = f^{-1}_{|(t_l^{k+1}, t_{l+1}^{k+1})}(-\frac{k}{k+1})^{\frac{3}{2}}) > c_l^{k+1}$ von $h_k'(\varphi)$. Es wird nun gezeigt, daß diese lokale Maxima bzw. Minima von h_k sind. Es seien

$\varphi_l^{k+1} = \frac{2l}{2k+1}\pi = f^{-1}_{|(t_l^{k+1}, t_{l+1}^{k+1})}(-1)$ und $\psi_l^{k+1} = \frac{2l+1}{2k+1}\pi = f^{-1}_{|(t_l^{k+1}, t_{l+1}^{k+1})}(1)$. Da

$$\sin((k+1)\varphi_l^{k+1}) = -\sin(k\varphi_l^{k+1}) \text{ und } h_k'(\varphi_l^{k+1}) < 0,$$
$$\sin((k+1)\psi_l^{k+1}) = \sin(k\psi_l^{k+1}) \text{ und } h_k'(\psi_l^{k+1}) < 0,$$
$$\lim_{\varphi \to \frac{l}{k}\pi} h_k'(\varphi) = \infty,$$

gilt $c_l^{k+1} \in [\varphi_l^{k+1}, \frac{l}{k}\pi]$ und $d_l^{k+1} \in [\frac{l}{k}\pi, \psi_l^{k+1}]$.
Es gilt ferner

$$h_k''(\varphi) = \frac{(k+1)^4\cos((k+1)\varphi)}{\sin((k+1)\varphi)^3} - \frac{k^4\cos(k\varphi)}{\sin(k\varphi)^3} = \frac{k^4\cos((k+1)\varphi)}{\sin(k\varphi)^3}\left(\sqrt{\frac{k}{k+1}} - \frac{\cos(k\varphi)}{\cos((k+1)\varphi)}\right)$$

Die Bedingungen

$$\frac{(k+1)^3}{\sin((k+1)\varphi)^2} = \frac{k^3}{\sin(k\varphi)^2}, \qquad \sqrt{\frac{k}{k+1}} = \frac{\cos(k\varphi)}{\cos((k+1)\varphi)}$$

führen mit $x = \sin((k+1)\varphi)^2$, $y = \sin(k\varphi)^2$ zu dem System

$$\begin{pmatrix} k^3 & -(k+1)^3 \\ k & -(k+1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit der eindeutigen Lösung

$$(x_0, y_0) = -\left(\frac{(k+1)^2}{k(2k+1)}, \frac{k^2}{(k+1)(2k+1)}\right).$$

Da (x_0, y_0) komponentenweise negativ ist, gibt es keine Lösung in $(\sin((k+1)\varphi)^2, \sin(k\varphi)^2)$, sodaß $h_k''(\varphi) \neq 0$ in den Nullstellen von h_k'. Die Bedingung $h_k'(\varphi) = 0$ charakterisiert somit die lokalen Maxima bzw. Minima von h_k.
Da f monoton wachsend auf $(0, t_1^{k+1})$ und $\lim_{\varphi\to 0} f(\varphi) = \frac{k}{k+1} > 0$, hat h_k auf $[0, t_1^{k+1}]$ genau ein lokales Maximum. Da f monoton wachsend auf $(t_k^{k+1}, t_{k+1}^{k+1})$ und $\lim_{\varphi\to\pi} f(\varphi) = -\frac{k}{k+1} < 0$, hat h_k auf $(t_k^{k+1}, t_{k+1}^{k+1})$ genau ein lokales Minimum. Ferner verifiziert man analog anhand der Monotonie von f, dem Vorzeichen von $\sin(k\varphi)$ und wegen $h_k(\varphi) = -\frac{(k+1)^3}{\sin(k\varphi)}\left(\frac{k^3}{(k+1)^3} - f(\varphi)\right)$, daß für $l \in \{1, \ldots, k-1\}$ c_l^{k+1} lokales Minimum bzw. d_l^{k+1} lokales Maximum von h_k auf $(t_l^{k+1}, t_{l+1}^{k+1})$ ist. Anhand der Monotonie und Vorzeichen von $(k+1)^2\cot((k+1)\varphi)$ bzw. $k^2\cot(k\varphi)$ verifiziert man, daß für $l \in \{1, \ldots, k-1\}$ $h_k(c_l^{k+1}) > 0$ bzw. $h_k(d_l^{k+1}) < 0$ ist, d.h. daß die lokalen Maxima von h_k positiv und die lokalen Minima von h_k negativ sind.
Im folgenden wird versucht, die lokalen Minima bzw. Maxima von h_k abzuschätzen, um damit dann h untersuchen zu können. Für $f_\alpha(x) = \alpha^2\cot(\alpha x)$ ist $f_\alpha''(x) = \frac{\alpha^4\sin(2\alpha x)}{\sin(\alpha)^4}$. Daher sind $-k^2\cot(k\varphi)$ und $(k+1)^2\cot((k+1)\varphi)$ auf $(\frac{2l+1}{2k+2}, \frac{2l+1}{2k}\pi)$ konkav, negativ und es gilt:

$$(k+1)^2\cot((k+1)\varphi) \;\le\; -(k+1)^2\left(\varphi - \frac{2l+1}{2k+2}\pi\right)$$
$$k^2\cot(k\varphi) \;\le\; -k^2(\frac{2l+1}{2k}\pi - \varphi)$$
$$h_k(\varphi) \;\le\; M_l^{k+1} := \max\{\min\{\, -(k+1)^2\left(\varphi - \frac{2l+1}{2k+2}\pi\right), -k^2(\frac{2l+1}{2k}\pi - \varphi)\} \mid \varphi \in [\frac{2l+1}{2k+2}\pi, \frac{2l+1}{2k}\pi]\,\}.$$

Ferner sind $-k^2\cot(k\varphi)$ und $(k+1)^2\cot((k+1)\varphi)$ auf $(\frac{2l+1}{2k}, \frac{2l+3}{2k+2}\pi)$ konvex, positiv und es gilt:

$$(k+1)^2\cot((k+1)\varphi) \;\ge\; (k+1)^2\left(\frac{2l+3}{2k+2}\pi - \varphi\right)$$
$$k^2\cot(k\varphi) \;\ge\; k^2(\varphi - \frac{2l+1}{2k}\pi)$$
$$h_k(\varphi) \;\ge\; m_l^{k+1} := \min\{\max\{\,(k+1)^2(\frac{2l+3}{2k+2}\pi - \varphi), k^2(\varphi - \frac{2l+1}{2k}\pi)\,\} \mid \varphi \in [\frac{2l+1}{2k}\pi, \frac{2l+3}{2k+2}\pi]\,\}.$$

m_l^{k+1} läßt sich geometrisch als Höhe H in einem Dreieck ABC ermitteln, welches durch

$$A = (\frac{2l+1}{2k}\pi, 0), \; B = (\frac{2l+1}{2k+2}\pi, 0),$$
$$\frac{H}{x} = \tan(\sphericalangle BAC) = (k+1)^2, \; \frac{H}{y} = \tan(\sphericalangle ABC) = k^2,$$
$$x + y = \overline{AB} = \frac{2l+1}{2k+2}\pi - \frac{2l+1}{2k}\pi$$

charakterisiert ist. Somit ist

$$H\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{2l+1}{2k}\pi - \frac{2l+1}{2k+2}\pi = \frac{2l+1}{(k+1)k}\frac{\pi}{2}$$
$$m_l^{k+1} = H = \frac{(2l+1)(k+1)k}{2(k+1)^2 - 2(k+1) + 1}\pi \ge (l + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}$$

Analog läßt sich M_l^{k+1} geometrisch als Höhe H in einem Dreieck ABC ermitteln, welches durch

$$A = (\tfrac{2l+1}{2k}\pi, 0),\;\; B = (\tfrac{2l+3}{2k+2}\pi, 0),$$
$$\tfrac{H}{x} = \tan(\sphericalangle BAC) = k^2,\;\; \tfrac{H}{y} = \tan(\sphericalangle ABC) = (k+1)^2,$$
$$x + y = \overline{AB} = \tfrac{2l+3}{2k+2}\pi - \tfrac{2l+1}{2k}\pi$$

charakterisiert ist. Somit ist

$$H\left(\tfrac{1}{(k+1)^2} + \tfrac{1}{k^2}\right) = \tfrac{2l+3}{2k+2}\pi - \tfrac{2l+1}{2k}\pi = \tfrac{(k+1)-2l-3}{2(k+1)k}\tfrac{\pi}{2}$$
$$M_l^{k+1} = H = \tfrac{(2(k+1)-2l-3)k(k+1)}{2(k+1)^2-2(k+1)+1}\pi \geq (k+1-l-\tfrac{3}{2})\tfrac{\pi}{2}$$

Nun wird das Vorzeichen von $h(\varphi)$ untersucht. Die Abschätzung erfolgt auf verschiedenen Intervallen. Für $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}]$ ist $-\cot(\varphi) \leq 0$. Da die lokalen Maxima von h_k negativ sind, sind die Zweige von $h_k(\varphi) - \cot(\varphi)$, die Maxima besitzen, negativ. Für die Zweige, die Minima besitzen, kann h auf $(\frac{\pi}{k+1}, \frac{k}{k+1}\pi)$ abgeschätzt werden:

$$\begin{array}{rcl} h_k(\varphi) - \cot(\varphi) & \geq & (k+1-l-\frac{3}{2})\frac{\pi}{2} - \cot(\frac{\pi}{k+1}) \\ & \underset{l \leq \lfloor (k+1)/2 \rfloor}{\geq} & (k+1-\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor - \frac{3}{2})\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{k+1})} \\ & \geq & (k+1-\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor - \frac{3}{2})\frac{\pi}{2} - \frac{k+1}{\pi}\frac{1}{1-\frac{\pi^2}{6(k+1)^2}} \\ & > & 0 \end{array}$$

Für $\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$ ist $-\cot(\varphi) \geq 0$. Da die lokalen Minima von h_k positiv sind, sind die Zweige von $h_k(\varphi) - \cot(\varphi)$, die Minima besitzen, positiv. Für die Zweige, die Maxima besitzen, kann $h_k(\varphi) - \cot(\varphi)$ für $\varphi \in (\frac{\pi}{k+1}, \frac{k}{k+1}\pi)$ abgeschätzt werden:

$$\begin{array}{rcl} h_k(\varphi) - \cot(\varphi) & \leq & -(l+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2} + \cot(\frac{\pi}{k+1}) \\ & \underset{l \geq \lfloor (k+1)/2 \rfloor}{\leq} & -(\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{k+1})} \\ & \leq & \frac{k+1}{\pi}\frac{1}{1-\frac{\pi^2}{6(k+1)^2}} - (\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor + \frac{1}{2})\pi \\ & < & 0 \end{array}$$

Da h_k auf $(0, \frac{\pi}{k+1})$ nur ein lokales Maximum hat und negativ ist, ist $h < 0$ auf $(0, \frac{\pi}{k+1})$. Da h_k auf $(\frac{k}{k+1}\pi, \pi)$ nur ein lokales Minimum besitzt und positiv ist, ist $h > 0$ auf $(\frac{k}{k+1}\pi, \pi)$.
Damit können die Vorzeichen von g' auf den durch $\{t_l^{k+1}\}_{l \in \mathbb{N}_{k+1}}$ und $\{t_l^k\}_{l \in \mathbb{N}_k}$ gebildeten Intervallen anhand der Vorzeichen von h und g wie angegeben bestimmt werden. Das bedeutet, daß g auf (t_0^{k+1}, t_1^{k+1}) monoton fällt, auf $(t_k^{k+1}, t_{k+1}^{k+1})$ monoton wächst, auf (t_1^{k+1}, t_k^{k+1}) für ungerade k aus abwechselnd monoton fallenden bzw. monoton wachsenden Zweigen, für gerade k aus abwechelnd positiven, konvexen bzw. negativen, konkaven Zweigen besteht. □

Anhand der Monotoniestruktur von F, G, f und g kann eine Charakterisierung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\mid T_{EE} - \lambda E \mid$ vorgenommen werden.

Lemma 16
Das Polynom $(-1)^{k+1}(\lambda^{k+1} - \lambda^k - \mu\frac{\tau}{k})$ hat für $\mu\tau$ aus

$\{-(\frac{k}{k+1})^{k+1}\}$	*die doppelte Nullstelle $\lambda = \frac{k}{k+1}$ und $k-1$ einfache Nullstellen*
$\{0\}$	*die einfache Nullstelle $\lambda = 1$ und die k-fache Nullstelle $\lambda = 0$*
$\mathbb{R} \setminus \{-(\frac{k}{k+1})^{k+1}, 0\}$	*$k+1$ einfache Nullstellen*

Beweis:
(B1) Es gilt:

$$\lambda^{k+1} - \lambda^k + \tfrac{1}{k+1}(\tfrac{k}{k+1})^k = (\lambda - \tfrac{k}{k+1})(\,\lambda^k - \tfrac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k-1}(\tfrac{k}{k+1})^{k-1-i}\lambda^i\,)$$
$$(\tfrac{k}{k+1})^k - \tfrac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k-1}(\tfrac{k}{k+1})^{k-1-i}(\tfrac{k}{k+1})^i = (\tfrac{k}{k+1})^k - \tfrac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k-1}(\tfrac{k}{k+1})^{k-1} = (\tfrac{k}{k+1})^k - \tfrac{k}{k+1}(\tfrac{k}{k+1})^{k-1} = 0$$

Somit ist $\lambda = \frac{k}{k+1}$ zweifache Nullstelle von $\lambda^{k+1} - \lambda^k + \frac{1}{k+1}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k$.

(B2) Es gilt weiterhin: $\lambda^{k+1} - \lambda^k = (\lambda - 1)\lambda^k = 0$ genau dann, wenn $\lambda = 1$ oder $\lambda = 0$.

(B3) Aus Lemma 14 (Monotonie von f) folgt, daß f nur auf den Intervallen $[t_0^{k+1}, t_1^{k+1})$, (t_l^k, t_{l+1}^{k+1}), $l \in \{1, \ldots, k-1\}$, (t_l^{k+1}, t_{l-1}^k), $l \in \{k+2, \ldots, 2k\}$, $(t_{2k+1}^{k+1}, t_{2k+2}^{k+1}]$ positiv ist.

(B4) Es seien:

$$k_1 = \begin{cases} 1 & k \text{ gerade} \\ 2 & k \text{ ungerade} \end{cases}, \quad k_2 = \begin{cases} k-2 & k \text{ gerade} \\ k-1 & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$k_3 = \begin{cases} 2 & k \text{ gerade} \\ 1 & k \text{ ungerade} \end{cases}, \quad k_4 = \begin{cases} k-1 & k \text{ gerade} \\ k-2 & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Aus Lemma 15 (Eigenschaften von g) folgt:

$$g \text{ fällt streng monoton } \begin{cases} \text{von } -(\frac{k}{k+1})^{k+1} \text{ nach } -\infty & \text{auf } (t_0^{k+1}, t_1^{k+1}) \\ \text{von } 0 \text{ nach } -\infty & \text{auf } (t_l^k, t_{l+1}^{k+1}),\ l \in \{2,4,\ldots,k_2\} \\ \text{von } \infty \text{ nach } 0 & \text{auf } (t_l^{k+1}, t_l^k),\ l \in \{k_1, k_1+2, \ldots, k-1\} \end{cases}$$

$$g \text{ steigt streng monoton } \begin{cases} \text{von } -\infty \text{ nach } -(\frac{k}{k+1})^{k+1} & \text{auf } (t_k^{k+1}, t_{k+1}^{k+1}) \\ \text{von } 0 \text{ nach } \infty & \text{auf } (t_l^k, t_{l+1}^{k+1}),\ l \in \{1,3,\ldots,k_4\} \\ \text{von } -\infty \text{ nach } 0 & \text{auf } (t_l^{k+1}, t_l^k),\ l \in \{k_3, k_3+2, \ldots, k-2\} \end{cases}$$

(B5) Aus (B3), (B4) und Lemma 15.(i) folgt, daß das System (19) für $\mu\tau \in (-\infty, -(\frac{k}{k+1})^{k+1})$ genau $2\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor$, für $\mu\tau \in [-(\frac{k}{k+1})^{k+1}, 0)$ genau $2\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor - 2$, für $\mu\tau \in (0,\infty)$ genau $2\lfloor\frac{k}{2}\rfloor$ Lösungen hat, die gemäß Lemma 11 komplexe Lösungen des betrachteten Polynoms sind. Lemma 12, (B1) und (B2) zeigen, daß das betrachtete Polynom für ungerade (gerade) k für $\mu\tau \in (-\infty, -(\frac{k}{k+1})^{k+1})$ 0 (1), für $\mu\tau \in [-(\frac{k}{k+1})^{k+1}, 0)$ 2 (3), für $\mu\tau = 0$ $k+1$ und für $\mu\tau \in (0,\infty)$ 2 (1) reelle Lösungen besitzt. Dies ergibt die Aussage über die Vielfachheit der Nullstellen.

□

Es sollen nun die stabilen Parameter μ bestimmt werden. Dazu werden die folgenden Mengen benötigt:

$$M_F := \{\, \mu \in \mathbb{R} \mid \exists\, r \in [0,1) : F(r) = \mu\tau, r \neq 0 \,\}$$
$$M_G := \{\, \mu \in \mathbb{R} \mid \exists\, r \in [0,1) : G(r) = \mu\tau, r \neq 0 \,\}$$

und für $l \in \mathbb{N}_{2k+1}$

$$M_l := \{\, \mu \in \mathbb{R} \mid \exists\, (r,\varphi) \in \mathbb{R}_+ \times [0,2\pi) : re^{i\varphi} \text{ ist Eigenwert von } T_{EE},\ r \in [0,1),\ \varphi \in (t_l^{k+1}, t_{l+1}^{k+1}) \,\}.$$

Die Menge M_F (M_G) beschreibt alle die reellen Parameter μ, für die ein Eigenwert $\lambda = re^{i\varphi}$ mit $r \in [0,1)$ und $\varphi = 0$ ($\varphi = \pi$) existiert. Eine Menge M_l, $l \in \mathbb{N}_{2k+1}$, beschreibt alle die reellen Parameter μ, für die ein Eigenwert $\lambda = re^{i\varphi}$ mit $r \in [0,1)$ und $\varphi \in (t_l^{k+1}, t_{l+1}^{k+1})$ existiert. Mit Hilfe der in den Lemmata 14 und 15 gezeigten Monotonien von f und g läßt sich eine einfache Beschreibung der Mengen M_l als ein Intervall geben.

Lemma 17

(i) Für ungerade k sind:

$$M_F = [-(\tfrac{k}{k+1})^{k+1}, 0),$$
$$M_G = (0, 2k),$$
$$M_l = \begin{cases} (g(b_0^{k+1}), -(\frac{k}{k+1})^{k+1}) & l = 0 \\ [0, g(b_l^{k+1})) & l \in (\mathbb{N}_{k-1} \cap 1 + 2\mathbb{N}) \\ (g(b_l^{k+1}), 0] & l \in (\mathbb{N}_{k-1} \cap 2 + 2\mathbb{N}) \\ (g(a_l^{k+1}), 0] & l \in (\mathbb{N}_{2k} \cap k + 2 + 2\mathbb{N}) \\ [0, g(a_l^{k+1})) & l \in (\mathbb{N}_{2k} \cap k + 3 + 2\mathbb{N}) \\ (g(a_{2k+1}^{k+1}), -(\frac{k}{k+1})^{k+1}) & l = 2k+1 \end{cases}$$

(ii) Für gerade k sind:

$$M_F = [-(\tfrac{k}{k+1})^{k+1}, 0),$$
$$M_G = (-2k, 0),$$
$$M_l = \begin{cases} (g(b_0^{k+1}), -(\frac{k}{k+1})^{k+1}) & l = 0 \\ [0, g(b_l^{k+1})) & l \in (\mathbb{N}_{k-1} \cap 1 + 2\mathbb{N}) \\ (g(b_l^{k+1}), 0] & l \in (\mathbb{N}_{k-1} \cap 2 + 2\mathbb{N}) \\ [0, g(a_l^{k+1})) & l \in (\mathbb{N}_{2k} \cap k + 2 + 2\mathbb{N}) \\ (g(a_l^{k+1}), 0] & l \in (\mathbb{N}_{2k} \cap k + 3 + 2\mathbb{N}) \\ (g(a_{2k+1}^{k+1}), -(\frac{k}{k+1})^{k+1}) & l = 2k+1 \end{cases}$$

Beweis:
Aus Lemma 14 folgt, daß $[a_l^{k+1}, b_l^{k+1}] \subset (t_l^{k+1}, t_{l+1}^{k+1})$, $l \in \mathbb{N}_{2k+1}$, das Intervall aller der φ, für die

$r(\varphi) = f(\varphi) \in [0,1]$ gilt. Aus dem Monotonieverhalten von g auf $(t_l^{k+1}, t_{l+1}^{k+1})$ (siehe Lemma 7) folgt unter Berücksichtigung von $g(a_l^{k+1}) = 0$, $l \in \{1,\dots,k\}$, bzw. von $g(b_l^{k+1}) = 0$, $l \in \{k+1,\dots,2k\}$, die obige Darstellung von M_l.
Aus der Monotonie von G und aus $G(1) = (-1)^{k+1}k2$ folgt die Darstellung von M_G. □

Aus den Mengen M_F, M_G und M_l, $l \in \mathbb{N}_{2k+1}$, kann nun die Stabilitätsmenge von (2) ermittelt werden: ein Parameter μ ist stabil, wenn er in $k+1$ Mengen der Mengen M_F, M_G, M_l, $l \in \mathbb{N}_{2k+1}$, enthalten ist.

Lemma 18
Die Menge der stabilen Parameter μ ist für ungerade k durch
$$\mu\tau \in (\max\{\, g(b_l^{k+1}) \mid l = 0,2,\dots,k-1\,\}, 0)$$
und für gerade k durch
$$\mu\tau \in (\max\{\, -2k, g(b_l^{k+1}) \mid l = 0,2,\dots,k-2\,\}, 0)$$
charakterisiert.

Beweis:
Aus Lemma 12 folgt, daß für $\mu\tau \in (0,\infty)$ eine reelle Lösung in $(1,\infty)$ existiert. Ferner ist für $\mu\tau = 0$ $\lambda = 1$ ein Eigenwert von T_{EE}. Somit sind die Parameter μ, für die $\mu\tau \in [0,\infty)$ ist, nicht stabil.
Als stabile Parameter kommen nur die μ in Frage, für die $\mu\tau < 0$ sind. Da es für die Stabilität von μ notwendig ist, daß alle Eigenwerte von T_{EE} betragsmäßig kleiner 1 sind, folgt aus der Struktur der Eigenwerte (Lemma 16), der Charakterisierung der Mengen M_F, M_G und M_l, $l \in \mathbb{N}_{2k+1}$, in Lemma 17, und der Symmetrie von g (Lemma 15.(i)), daß $\mu\tau$ dann für ungerade k im Durchschnitt der Mengen
$$\begin{aligned}&(M_F \cup M_0) \cap \bigcap_{l\in\{2,4,\dots,k-1\}} M_l \cap \bigcap_{l\in\{k+2,k+4,\dots,2k-1\}} M_l \cap (M_F \cup M_{2k+1})\\ &\underset{Lemma\ 15\,(i)}{=} (M_F \cup M_0) \cap \bigcap_{l\in\{2,4,\dots,k-1\}} M_l\end{aligned}$$
und für gerade k im Durchschnitt der Mengen
$$\begin{aligned}&(M_F \cup M_0) \cap \bigcap_{l\in\{2,4,\dots,k-2\}} M_l \cap M_G \cap \bigcap_{l\in\{k+3,k+5,\dots,2k-1\}} M_l \cap (M_F \cup M_{2k+1})\\ &\underset{Lemma\ 15\,(i)}{=} (M_F \cup M_0) \cap \bigcap_{l\in\{2,4,\dots,k-2\}} M_l \cap M_G\end{aligned}$$
liegen muß. Die Beschreibung der Mengen M_F, M_G, M_l, $l \in \mathbb{N}_{2k+1}$, als Intervalle (siehe Lemma 17) liefert dann das jeweilige Intervall für $\mu\tau$. □

Die Berechnung der unteren Grenzen des Stabilitätsgebietes und deren Asymptotik kann mit folgendem Lemma vereinfacht werden.

Lemma 19
(i) $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, l \in \mathbb{N}_{k-1} : g(b_l^{k+1}) = -k\sin(\frac{2l+1}{2k+1}\pi)\sin^{-1}((k+1)\frac{2l+1}{2k+1}\pi)$
(ii) $\forall l \in 2\mathbb{N} : g(b_l^{k+1}) \underset{k+1>l,\,k\to\infty}{\downarrow} -(2l+1)\frac{\pi}{2}$.
(iii) *Für k gerade:* $\max\{\, -2k, g(b_l^{k+1}) \mid l \in \{0,2,\dots,k-2\,\} = \max\{\, g(b_l^{k+1}) \mid l \in \{0,2,\dots,k-2\,\}$
(iv) *Für k ungerade:* $\max\{\, g(b_l^{k+1}) \mid l \in \{0,2,\dots,k-1\,\} \underset{k\to\infty}{\downarrow} -\frac{\pi}{2}$
Für k gerade: $\max\{\, g(b_l^{k+1}) \mid l \in \{0,2,\dots,k-2\,\} \underset{k\to\infty}{\downarrow} -\frac{\pi}{2}$

Beweis: Es gilt
(B1) $\forall x \in (0,\pi], j \in \mathbb{N}\setminus\{0\} : \frac{1}{(2j)!} - \frac{1}{(2j+1)!} - \frac{x^2}{(2j+2)!} + \frac{x^2}{(2j+3)!} = \frac{8j^3+20j^2+(12-2\pi^2)j-2\pi^2}{(2j+3)!} > 0$

(B2) $$\begin{aligned}\forall x \in (0,\pi] : \frac{d}{dx}\frac{\sin(x)}{x} = \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2} &= -\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}x^{2j-1}\left(\frac{1}{(2j)!} - \frac{1}{(2j+1)!}\right)\\ &= -\sum_{j\in 1+2\mathbb{N}}(-1)^{j-1}x^{2j-1}\left(\frac{1}{(2j)!} - \frac{1}{(2j+1)!} - \frac{x^2}{(2j+2)!} + \frac{x^2}{(2j+3)!}\right)\\ &< 0\end{aligned}$$

(B3) $$\begin{aligned}\forall x \in (0,\tfrac{\pi}{2}) : \frac{d}{dx}\frac{\cos(2x)}{x\cos(x)} &= \frac{-2\sin(2x)x\cos(x)-\cos(2x)(\cos(x)-x\sin(x))}{x^2\cos^2(x)}\\ &= \frac{-2x\sin(x)(2\cos^2(x)-1)-2x\sin(x)-\cos(2x)(\cos(x)-x\sin(x))}{x^2\cos^2(x))}\\ &= -\frac{(x\sin(x)+\cos(x))cos(2x)+2x\sin(x)}{x^2\cos^2(x)} < 0\end{aligned}$$

(i) Aus den Lemmata 14, 15.(iii) folgt $f(b_l^{k+1}) = 1$ und $g(b_l^{k+1}) = -k\left(\sin(\frac{2l+1}{2k+1}\pi)\sin^{-1}((k+1)\frac{2l+1}{2k+1}\pi)\right)$.

(ii) Es gilt $\forall l \in 2\mathbb{N}, k > l$:

$$-k\frac{\sin(\frac{2l+1}{2k+1}\pi)}{\sin((k+1)\frac{2l+1}{2k+1}\pi)} = -k\frac{\sin(2\frac{2l+1}{2k+1}\frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{2l+1}{2}\pi+\frac{2l+1}{2k+1}\frac{\pi}{2})} = -2k\sin(\frac{2l+1}{2k+1}\frac{\pi}{2}) = -\frac{2l+1}{2}\pi\frac{1}{1+\frac{1}{2k}}\frac{\sin(\frac{2l+1}{2k+1}\frac{\pi}{2})}{\frac{2l+1}{2k+1}\frac{\pi}{2}} \underset{k\to\infty}{\downarrow} -\frac{2l+1}{2}\pi$$

(iii) Es gilt:

$$g(b_0^k) = -k\sin(\frac{\pi}{2k+1})\sin(\frac{(k+1)\pi}{2k+1})^{-1} \underset{(ii)}{>} -\frac{\pi}{2} > -2 > -2k$$

(iv) Es gilt für ungerade k:

$$g(b_{k-1}^{k+1}) = -k\frac{\sin(\frac{2k-1}{2k+1}\pi)}{\sin((k+1)\frac{2k-1}{2k+1}\pi)} = -k\frac{\sin(\pi-\frac{2}{2k+1}\pi)}{\sin(k\pi-\frac{1}{2k+1}\pi)} \underset{k\in 1+2\mathbb{N}}{=} -\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+\frac{1}{2k}}\frac{2k+1}{\pi}\frac{\cos(\frac{2}{2k+1}\pi)}{\cos(\frac{1}{2k+1}\pi)} \underset{k\to\infty}{\downarrow} -\infty$$

Es gilt für gerade k:

$$g(b_{k-2}^{k+1}) = -k\frac{\sin(\frac{2k-3}{2k+1}\pi)}{\sin((k+1)\frac{2k-3}{2k+1}\pi)} = -k\frac{\sin(\pi-\frac{4}{2k+1}\pi)}{\sin((k-1)\pi-\frac{2}{2k+1}\pi)} \underset{k\in 2\mathbb{N}}{=} -\pi\frac{1}{1+\frac{1}{2k}}\frac{(2k+1)}{2\pi}\frac{\cos(\frac{4}{2k+1}\pi)}{\cos(\frac{2}{2k+1}\pi)} \underset{k\to\infty}{\downarrow} -\infty.$$

Aus $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{2k}} \underset{k\to\infty}{\uparrow} 1$, $\lim_{k\to\infty}\frac{(2k+1)}{2\pi}\frac{\cos(\frac{4}{2k+1}\pi)}{\cos(\frac{2}{2k+1}\pi)} \underset{k\to\infty}{\uparrow} \infty$, folgt $g(b_{k-1}^{k+1}) \underset{k\to\infty}{\downarrow} -\infty$, $g(b_{k-2}^{k+1}) \underset{k\to\infty}{\downarrow} -\infty$.

□

Aus der Konvergenz $g(b_{k-1}^{k+1}) \underset{k\to\infty}{\downarrow} -\infty$ bzw. $g(b_{k-2}^{k+1}) \underset{k\to\infty}{\downarrow} -\infty$ kann mit Hilfe der Überlegungen

$$\exists k_0 > 0 \ \forall k \geq k_0 : \ max\{b_{k-1}^{k+1}, b_{k-2}^{k+1}\} < -\frac{\pi}{2}$$
$$\exists k_1 > k_0 \ \forall l \in \mathbb{N}_{k_0} \cap 2\mathbb{N} : \ g(b_l^{k+1}) < -\frac{\pi}{2},$$

d.h.

$$max\{g(b_l^k) \mid l = 0, 2, ...k - \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}(-1)^k\} = g(b_0^k) \underset{k_1<k\to\infty}{\downarrow} -\frac{\pi}{2},$$

das folgende Ergebnis gewonnen werden:

KOROLLAR 20 *Es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ $M_{stab}^k \subset M_{stat} = (-\frac{\pi}{2}, 0)$. Das explizite Eulerverfahren mit reellem Parameter μ ist daher nicht A-stabil. Es ist jedoch asymptotisch A-stabil in dem Sinne, das für $k \to \infty$ die Stabilitätsgebiete M_{stab}^k des Eulerverfahrens mengenwertig aufsteigend gegen das Stationaritätsgebiet M_{stat} konvergieren, d.h. $M_{stab}^k \underset{k\to\infty}{\uparrow} M_{stat}$ für hinreichend große k.*

Mit Lemma 18 sind nun vergleichende Betrachtungen der Stabilitätsgebiete des expliziten Eulerverfahrens (vgl. Beispiel 8) in Abhängigkeit von τ, k, h möglich. Der erste Plot (Abbildung 2) zeigt die unteren Grenzen des Stabilitätsintervalls bei variierendem Parameter $\tau \in [0.2, 1.2]$. Die untere Grenze ist, wie aus Lemma 18 hervorgeht, bei fixem k proportional zu $\frac{1}{\tau}$. Mit wachsendem k fallen die unteren Schranken entsprechend Lemma 19 monoton gegen die untere Schranke $-\frac{\pi}{2\tau}$.

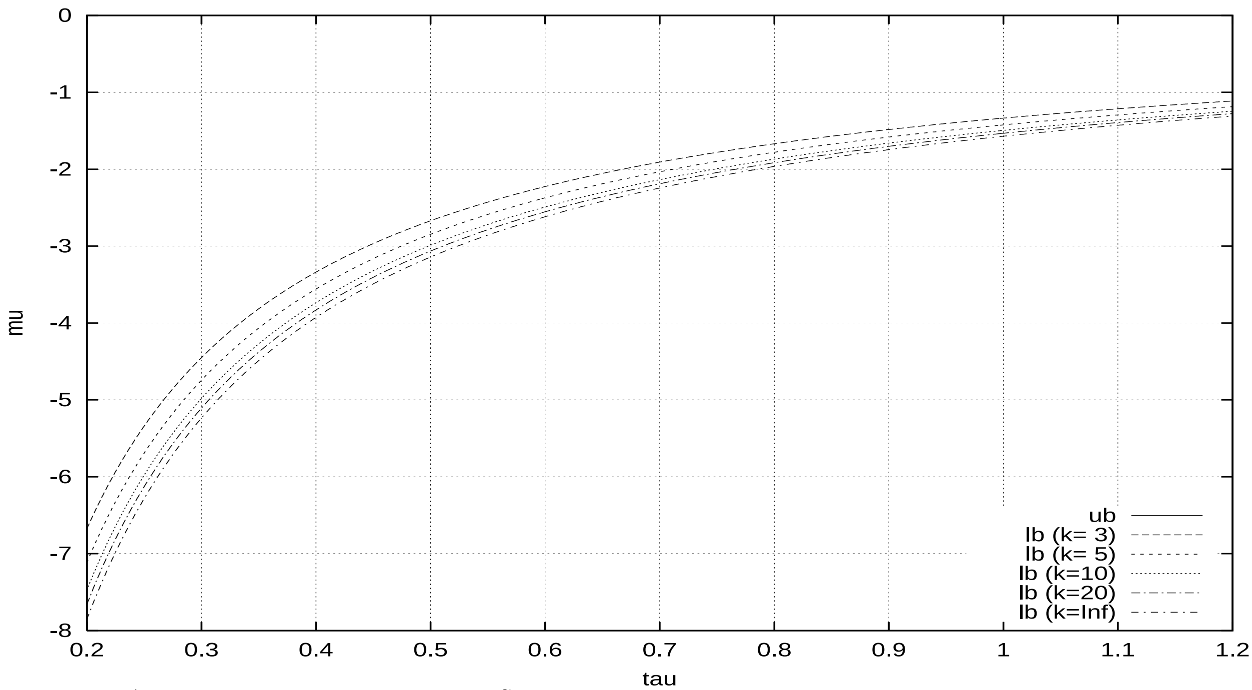


Abbildung 2: Die τ-abhängigen Stabilitätsintervalle für verschiedene k

Der zweite Plot (Abbildung 3) zeigt für ein fixes τ, hier auf 1 normiert, die k-Abhängigkeit des Stabilitätsgebietes. Ein Vergrößern von k entspricht bei fixem τ dem Verkleinern der Schrittweite $h = \frac{\tau}{k}$ und führt zu einem Vergrößern des Stabilitätsgebietes.

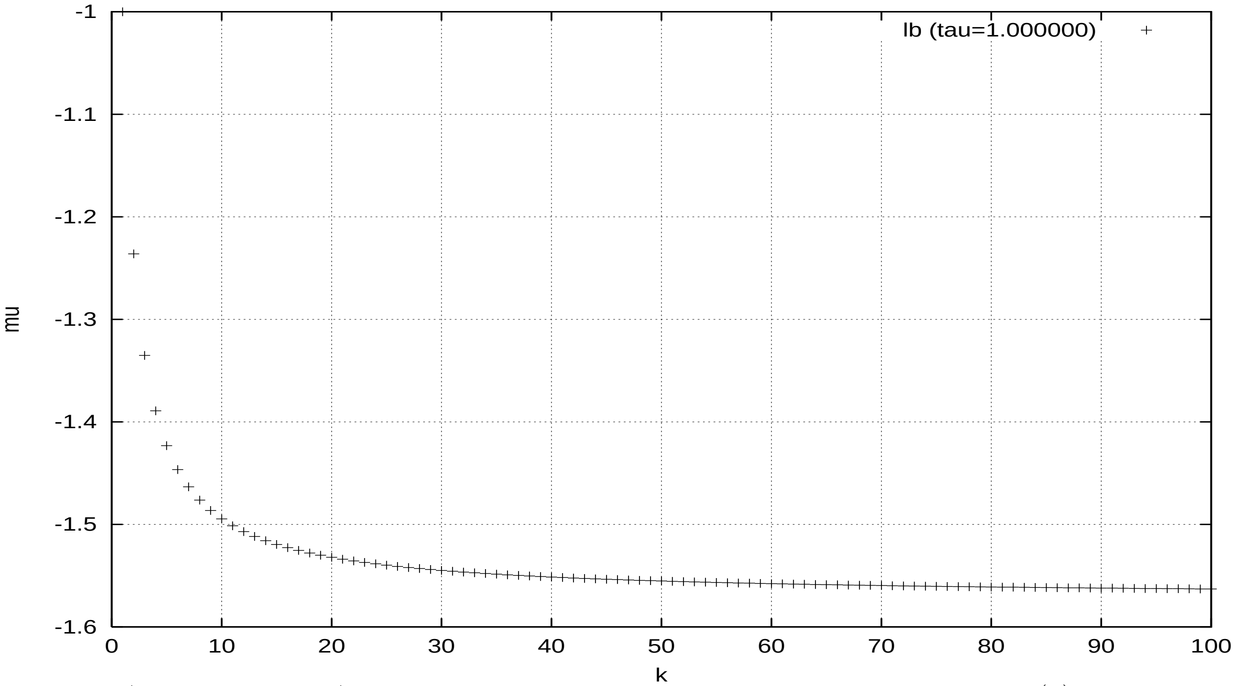


Abbildung 3: Die Abhängigkeit der Stabilitätsintervalle von der Gitterfeinheit (k) bei $\tau = 1$

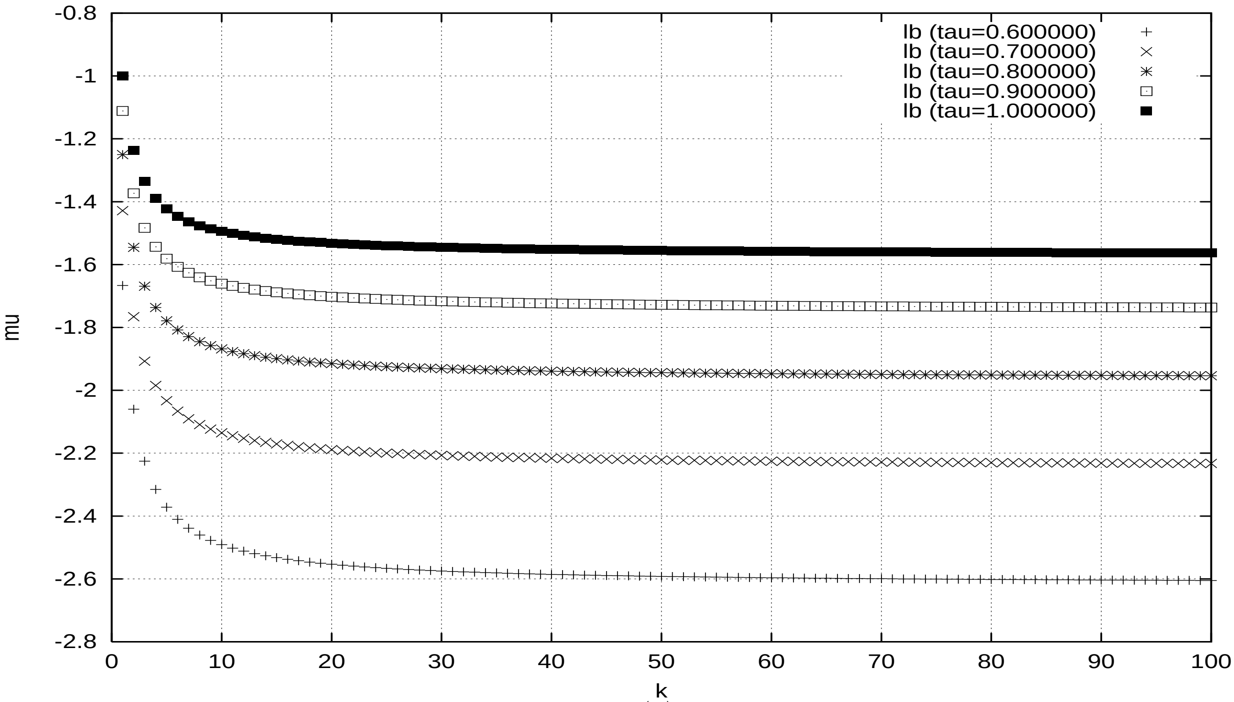


Abbildung 4: Die Schrittweitenabhängigkeit (h) der Stabilitätsintervalle

Die oben erwähnte h-Abhängigkeit soll mit der von affinen SDE unter dem expliziten Eulerverfahren, also mit dem Fall $\tau = 0$ kontrastiert werden. Betrachtet man die affine SDE

$$dZ(t) = \mu Z(t) + dW(t), \tag{21}$$

so hat das explizite Eulerverfahren die Form

$$Z((n+1)h) = Z(nh) + \mu h Z(nh) + \frac{W((n+1)h) - W(nh)}{\sqrt{h}} B = (1+\mu h)Z(nh) + \frac{W((n+1)h) - W(nh)}{\sqrt{h}} \tag{22}$$

und ist stabil für $\mid 1+\mu h \mid < 1$, d.h genau dann wenn $\mu h \in (-2, 0)$. Somit ist das h-abhängige Stabilitätsgebiet $(-\frac{2}{h}, 0)$ und es gilt $\lim_{h \downarrow 0} -\frac{2}{h} = -\infty$ bzw. $\lim_{h \to \infty} -\frac{2}{h} = 0$. Der Fall $h \to \infty$ in der affinen SDE kann nur bedingt mit der affinen SDDE verglichen werden, da für k die Einschränkung $k \geq 1$ gilt. Dem Fall $h \downarrow 0$ in der SDE entspricht jedoch das Betrachten von $k \to \infty$ in der SDDE. *Es zeigt sich, daß in der Tendenz sowohl bei der SDE als auch bei der SDDE die gleiche Schrittweitenabhängigkeit vorliegt (Wachsen des Stabilitätsgebietes für fallende Schrittweiten).* Die Schrittweitenabhängigkeit differiert aber in ihrer Ausprägung, da im Falle des Auftretens von Zeitverzögerung auch infinitesimale Schrittweiten nicht zu unendlich großen Stabilitätsgebieten führen. Diese Beschränktheit ist jedoch natürlich, da M_{stab}^k M_{stat} approximiert und M_{stat} beschränkt ist.

Der sich anschließende Plot (Abbildung 4) demonstriert, daß die Verkleinerung des Stabilitätsgebietes bei einem Verringern der Schrittweite ein Phänomen ist, welches unabhängig von dem konkret gewähltem τ ist und nur Niveauunterschiede in der Größe des Stabilitätsgebietes erkennen läßt.

4 Literaturverzeichnis

[Art91] Artemiev, S.S.; Shkurko, I.O. Numerical analysis of dynamics of oscillatory stochastic systems. *Soviet journal of numerical analysis and mathematical modelling*, 6(4):277–298, 1991. ISSN 0169-2895.

[Art94] Artem'ev, S.S. The mean-square stability of numerical methods for solving stochastic differential euqations. *Russian journal of numerical analysis and mathematical modelling*, 9(5):405–416, 1994. ISSN 0927-6467.

[Bjo74] Bjoerck, A.;Dahlquist, G. *Numerical Methods.* Series in Automatic Computation. Prentice Hall, New York, 1974. ISBN 0-13-627315-7.

[Chi96] Chiarella, Carl; Khomin, Alexander. An analysis of the complex dynamic behavior of nonlinear oligopoly models with time delays. *Chaos, Solitons and Fractals*, 7(12):2049–2065, 1996. ISSN 0960-0779.

[Goo51] Goodwin, R.M. The nonlinear accelerator and the persistence of business cycles. *Econometrica*, 19(1):521–550, January 1951. ISSN 0012-9682.

[Gus00] Gushin, A.;Küchler, U. On stationary solutions of delay differential equations driven by a Lévy Process. *Stochastic Processes and their applications*, 88:195–211, 2000. ISSN 0304-4149.

[Hal33] Haldane, J.B.S. The nonlinear accelerator and the persistence of business cycles. *The review of economic studies*, 1:186–195, 1933. ISSN 0034-6527.

[Hei82] Heiden, Uwe an der; Mackey, Michael C. The dynamics of production and destruction: anaylytic insight into complex behavior. *Journal of Mathematical Biology*, 16:75–101, 1982. ISSN 0303-6812.

[Hei83] Heiden, Uwe an der;Walther, H.-O. Existence of chaos in control systems with delayed feedback. *Journal of Differential Equations*, 47:273–295, 1983. ISSN 0022-0396.

[Her92] Hernandez, Diego Bricio; Spigler, Renato. A-stability of Runge-Kutta methods for systems with additive noise. *Bit*, 32:620–633, 1992. ISSN 0006-3835.

[Her93] Hernandez, Diego Bricio; Spigler, Renato. Convergence and stability of implicit Runge-Kutta methods for systems with multiplicative noise. *Bit*, 33:654–669, 1993. ISSN 0006-3835.

[How84] Howroyd, T.D.; Russel, A.M. Cournot oligopoly models with time delays. *Journal of Mathematical Economics*, 13:97–103, 1984. ISSN 0304-4068.

[Ike82] Ikeda, K.; Kondo, K.; Akimoto, O. Successive higher-harmonic bifurcations in systems with delayed feedback. *Physical Review Letters*, 49(20):1467–1470, 1982. ISSN 0031-9007.

[Ike87] Ikeda, Kensuke; Matsumoto, Kenji. High-dimensional chaotic behavior in systems with time-delayed feedback. *Physica D*, 49(20):223–235, 1987. ISSN 0167-2789.

[Kla85] Klauder, John R.;Petersen, Wesley P. Numerical integration of multiplicative-noise stochastic differential equations. *SIAM Journal on numerical analysis*, 22(6):1153–1166, June 1985. ISSN 0036-1429.

[Klo92a] Kloeden, P.E.; Platen, E. Higher-order implicit strong numerical schemes for stochastic differential equations. *Journal of statistical physics*, 66(1/2):283–313, 1992. ISSN 0022-4715.

[Klo92b] Kloeden, Peter E.; Platen, Eckhard. *Numerical solution of stochastic differential equations*. Applications of Mathematics 23. Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1992. ISBN 3-540-54062-8, 0-387-54062-8.

[Kü00] Küchler, Uwe; Platen, Eckhard. Strong discrete time approximation of stochastic differential equations with time delay. *Mathematics and Computers in Simulation*, 54:189–205, 2000. ISSN 0378-4754.

[Lon91] Longtin, André. Noise-induced transitions at a Hopf-bifurcation in a first-order delay-differential equation. *Physical Review A*, 44(8):4801–4813, 1991. ISSN 0556-2791.

[Mac77] Mackey, Michael C.; Glass, Leonhard. Oscillation and chaos in physiological control systems. *Science*, 197:287–289, 1977. ISSN 0036-8075.

[Mac89] Mackey, Michael C. Commodity price fluctuations: price dependent delays and nonlinearities as explanatory factors. *The Journal of Econonomic Theory*, 48:497–509, 1989. ISSN 0022-0531.

[Mao97] Mao, Xuerong. *Stochastic differential equations and their applications*. Horwood Publishing Chichester, 1997. ISBN 1-898563-26-8.

[Mil98] Milstein, G.N.; Platen, E., Schurz, Henri. Balanced implicit methods for stiff stochastic systems. *SIAM Journal on numerical analysis*, 35(3):1010–1019, 1998. ISSN 0036-1429.

[Par85] Pardoux, E.; Talay, D. Discretization and simulation of stochastics differential equations. *Acta applicandae mathematica*, 54(6):1780–1805, 1985. ISSN 0167-8019.

[Pet98] Petersen, Wesley P. A general implicit splitting for stabilizing numerical simulations of Itô stochastic differential equations. *SIAM Journal on numerical analysis*, 35(4):1439–1451, August 1998. ISSN 0036-1429.

[Pla99] Platen, Eckhard. An introduction to numerical methods for stochastic differential equations. In Iserles, A., editor, *Acta Numerica*, volume 8, pages 197–247. Cambridge University Press, 1999. ISBN 0-521-77088-2/hbk.

[Rya97] Ryashko, Lev. B.; Schurz, Henri. Mean square stability analysis of some linear stochastic systems. *Dynamic systems and applications*, 6:165–190, 1997. ISSN 1056-2176.

[Sai96] Saito, Yoshihiro; Mitsui, Taketomo. Stability analysis of numerical schemes for stochastic differential equations. *SIAM Journal on numerical analysis*, 33(6):2254–2267, December 1996. ISSN 0036-1429.

[Sch96] Schurz, Henri. Asymptotical mean square stability of an equilibrium point of some linear numerical solutions with multiplicative noise. *Stochastic analysis and applications*, 14(3):313–353, 1996. ISSN 0736-2994.

[Tal90] Talay, Dennis;Tubaro, Luciano. Stability analysis of numerical schemes for stochastic differential equations. *SIAM Journal on numerical analysis*, 8(4):483–509, 1990. ISSN 0304-4149.

[Tin30] Tinbergen, J. Bestimmung und Deutung von Angebotskurven. *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 1:669–679, 1930. ISSN 0044-3158.