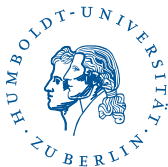


Două secole de curbe algebrice

Gavril Farkas

Humboldt-Universität zu Berlin



European Research Council

Established by the European Commission

03.10.2025, Academia Română

Varietăți algebrice

Geometria algebrică se ocupă de studiul soluțiilor sistemelor de ecuații polinomiale.

Polinoame: $f(x, y, z) = 3x^2y^2 + y^4 + 5z^3$. Polinom cu coeficienți **reali**. În geometria algebrică e preferabil să considerăm coeficienți **complecși**:

$$f(x, y, z, w, t) = (1 + 2i)x^5 + 6x^2ywt + (1 + i\sqrt{5})y^4w + \dots$$

- O **varietate algebrică** este determinată de un sistem de ecuații polinomiale:

$$X := \left\{ (x_0, \dots, x_r) : f_\alpha(x_0, \dots, x_r) = 0 \right\}_{\alpha=1, \dots, \ell} \subseteq \mathbb{P}^r.$$

X este dată de un număr arbitrar de ecuații într-un număr arbitrar de variabile. Astfel de sisteme sunt nerezolvabile $\Rightarrow$ studiu **calitativ** al mulțimii soluțiilor. Geometria algebrică este **teoria geometrică** a ecuațiilor algebrice.

- **Curbele algebrice** sunt varietățile algebrice de dimensiune 1.

Riemann, curbe algebrice și suprafețe riemanniene

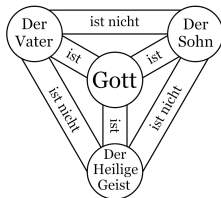
Curbele algebrice (totodată **suprafețe riemanniene**) au fost introduse în două articole fundamentale de către **Bernhard Riemann**:

- 1851 *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse* (Fundamentele unei teorii generale ale funcțiilor de o variabilă complexă)-teză de doctorat.
- 1857 *Theorie der abelschen Functionen* (Teoria funcțiilor abeliene)
- Cine a fost **Bernhard Riemann (1826-1866)**? Fiu al unui pastor luteran, a crescut într-o atmosferă religioasă. Vine la Göttingen în 1846 cu intenția de a studia teologie; se reorientează spre matematică, studii la Berlin (cu Dirichlet și Jacobi). Profesor la Göttingen din 1859. Riemann va rămâne și un filozof, fizician și (într-o oarecare măsură) un teolog.



Riemann și influența sa

- Matematician care a revolutionat fiecare domeniu al matematicii: algebra (teoria numerelor—**ipoteza lui Riemann** și funcția zeta), analiza (integrala Riemann, analiza complexă, **suprafețe riemanniene**), geometria (**geometria riemanniana** și conceptul de varietate diferențiabilă—**Mannigfaltigkeit**).
- Riemann este creatorul **matematicii abstracte**, în care primează conceptele, **structurile** și relațiile dintre ele și nu manipularea de formule (care fusese una din caracteristicile matematicii secolului 19).
- Extinde și recrează notiunea de **spatiu**— atât matematic, cât și fizic, filozofic, fenomenologic $\Rightarrow$ definiția **sociologică** a spațiului (Yuri Manin).
- Spatiu=**Mannigfaltigkeit**—o multitudine într-un cadru unitar. În limba germana **Dreifaltigkeit**=Sf. Treime.



- Teză de abilitare : **Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen** (Asupra ipotezelor care stau la baza geometriei). Introduce conceptul abstract de spațiu caracterizat de o metrică care permite calcularea distanțelor și introduce conceptul de **curbură**, ce se va dovedi esențial în **teoria relativității** a lui Einstein. Și distincția dintre multiplicitățile spațiale și temporale din **filozofia lui Bergson** pot fi explicate tot prin prisma abilitării lui Riemann.
- Geometria riemanniană produce un număr infinit de **geometrii neeuclidiene** în dimensiuni arbitrare—din care cele descoperite de Bolyai și Lobachevski sunt doar două exemple.
- Suprafețele riemanniene: sinteză a algebrei, geometriei și analizei. Au fost introduse într-un articol celebru din 1857 în jurnalul Crelle:

14.

Theorie der *Abel'schen* Functionen.

(Von Herrn B. Riemann.)

In der folgenden Abhandlung habe ich die *Abel'schen* Functionen nach einer Methode behandelt, deren Principien in meiner Inauguraldissertation *) aufgestellt und in einer etwas veränderten Form in den drei vorübergehenden Aufsätzen dargestellt worden sind. Zur Erleichterung der Uebersicht schicke ich eine kurze Inhaltsangabe voraus.

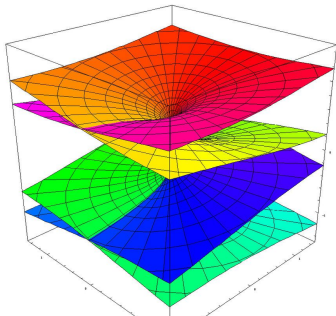
Die erste Abtheilung enthält die Theorie eines Systems von gleichverzweigten algebraischen Functionen und ihren Integralen, soweit für dieselbe nicht die Betrachtung von ϑ -Reihen maßgebend ist, und handelt im §. 1—5 von der Bestimmung dieser Functionen durch ihre Verzweigungsart und ihre Unstetigkeiten, im §. 6—10 von den rationalen Ausdrücken derselben in zwei durch eine algebraische Gleichung verknüpfte veränderliche Größen, und im

Suprafețe riemanniene

Ideea de bază este de a asocia fiecărei funcții algebrice dată de o ecuație polinomială

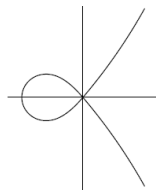
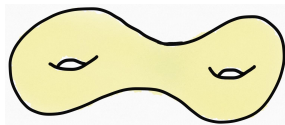
$$P(w, z) = 0$$

(de ex. $w^4 + z^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow w = \sqrt[4]{1 - z^2}$) un spațiu (Mannigfaltigkeit!) peste care această funcție multivalentă devine **univalentă**. Acest spațiu va fi o acoperire a planului complex (a **sferei Riemann**), nu neapărat scufundată într-un spațiu euclidian. Acest concept de spațiu abstract și de acoperire stă la baza **topologiei**.

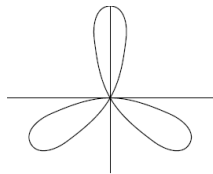


Teorema Riemann-Roch și genul unei curbe

- Riemann a considerat și problema inversă de a asocia unei suprafețe riemanniene (curbe algebrice) o funcție algebrică. Când o suprafață obținută prin lipiri dintr-un sistem de foi al planului euclidian corespunde unei ecuații algebrice $P(z, w) = 0$? Matematic: Ce fel de (câte) funcții meromorfe există pe o suprafață riemanniană? Depinde de **gen**!
- Răspunsul: **Teorema Riemann-Roch** și descoperirea genului unei suprafețe! Genul este singurul invariant **topologic** al curbei!
- **Genul**: $g := \frac{1}{2} \text{rang } H_1(C, \mathbb{Z}) = \text{numărul de mânere}$



$$D = Y^2 - X^3 - X^2$$



$$E = (X^2 + Y^2)^2 + 3X^2Y - Y^3$$

Topologic o curbă de gen g este obținută dintr-o sferă atasând g mânere.

- **Riemann-Roch**: $\dim \{ \text{fct. meromorfe cu poli în } D \} = \deg(D) + 1 - g$.

Astăzi Riemann este unanim recunoscut ca fiind unul din geniile care au transformat profund științele naturale și matematica. Totuși în secolul 19 a fost considerat multă vreme ca fiind o figură controversată.

- Leo Königsberger: *Noi ca matematicieni tineri simțeam atunci că metodele lui Riemann nu mai corespundeau matematicii riguroase ca și la Euler, Lagrange, Gauss sau Dirichlet. Însă tot timpul ia mult timp până ce o mare descoperire științifică își face locul în mințile generațiilor viitoare.*
- În special, [Karl Weierstrass](#), corifeul matematicii din Berlin și creatorul analizei matematice, a fost foarte critic în privința lui Riemann, deși multă vreme recunoscuse importanța operei lui Riemann:



Karl Weierstrass (1815-1897)

- A rămas celebră critica lui Weierstrass a **Principiului lui Dirichlet**, prin care Riemann si-a dezvoltat teoria suprafețelor riemanniene și a demonstrat teorema Riemann-Roch. Pe 14 iulie 1870 Weierstrass ține o expunere în fața Academiei din Berlin, care va dăuna reputației lui Riemann:

ÜBER DAS SOGENANNT E DIRICHLET'SCHE PRINCIP.

(Gelesen in der Königl. Akademie der Wissenschaften am 14. Juli 1870.)

In seinen Vorlesungen über die Kräfte, welche nach dem Newton'schen Gesetz wirken, hat sich Lejeune Dirichlet zur Begründung eines Hauptsatzes der Potentialtheorie einer eigenthümlichen Schlussweise bedient, welche später auch von anderen Mathematikern, namentlich von Riemann, vielfach angewandt worden ist und den Namen »Dirichlet'sches Princip« erhalten hat.

- "eigentümliche Schlussweise"—raționament dubios.
- Teoria curbelor algebrice va fi dezvoltată ulterior algebric și pusă pe baze solide în ultimele decenii ale secolului 19 de către Klein, Max Noether, Brill, Hurwitz, Castelnuovo, Severi și alții.

Spațiul de moduli al curbelor algebrice

- Riemann introduce conceptul unui spațiu parametrizând curbe de gen g :

$$\mathcal{M}_g := \{[C] : C \text{ este o curbă netedă de gen } g\}.$$

algebraischer Functionen von ζ . Die $3p-3$ übrigen Verzweigungswerthe in jenen Systemen gleichverzweigter μ -werthiger Functionen können daher beliebige Werthe annehmen; und es hängt also eine Klasse von Systemen gleichverzweigter $2p+1$ -fach zusammenhängender Functionen und die zu ihr gehörende Klasse algebraischer Gleichungen von $3p-3$ stetig veränderlichen Gröfsen ab, welche die Moduln dieser Klasse genannt werden sollen.

(... există o clasă de funcții $(2p+1)$ -multivalente a căror clasă de ecuații algebrice depinde de $3p-3$ variabile continue, pe care le numim **moduli** ale acestei clase).

- Inițial, termenul de moduli s-a referit la coordonatele peste ce urma să devină $\mathcal{M}_g$.
- $\mathcal{M}_g$ este din nou o varietate algebrică! Riemann schițează un argument indicând că $\dim \mathcal{M}_g = 3g - 3$ (pt. $g > 1$). Curbele algebrice depind de un parametru **discret** g (genul!) și de **$3g - 3$ parametri continui**.

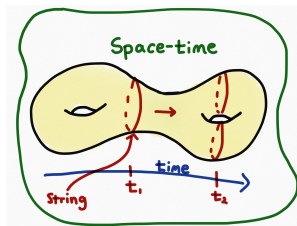
- Ce a calculat Riemann? Fixând $d > 2g$ și considerând funcții meromorfe $f: C \rightarrow \mathbb{P}^1$ de grad d , din Riemann-Roch: spațiul acestor funcții este $(2d + 1 - g)$ -dimensional. Fiecare f are $2g + 2d - 2$ puncte de ramificare, care pot fi alese arbitrar peste C . Ca atare, clasa lui C depinde de $2g + 2d - 2 - (2d + 1 - g) = 3g - 3$ parametri.
- Ideea că un spațiu de parametri al unor obiecte algebrice e din nou o varietate algebrică apare și în contexte mult mai elementare.

$$\left\{ V \subseteq \mathbb{C}^n : \dim(V) = k \right\} = \text{Gr}(k, n) \text{ varietatea Grassmann.}$$

- Existența spațiului de moduli $\mathcal{M}_g$ ca și o varietate algebrică a fost până în 1930 acceptată tacit. Construcția riguroasă însă folosește geometria algebrică modernă, post Grothendieck. Oswald Teichmüller (1913-1943) a construit **spațiul Teichmüller** $\mathcal{T}_g$: acoperirea universală a lui $\mathcal{M}_g$.
- 1890: Adolf Hurwitz, demonstrează că $\mathcal{M}_g$ este **conex**.
- Cu ajutorul metodelor lui Grothendieck, **David Mumford** folosind **GIT** (teoria geometrică a invariantilor) construiește $\mathcal{M}_g$ (Medalia Fields 1974).

$\mathcal{M}_g$: scurtă cronologie

- 1969: Pierre Deligne și David Mumford construiesc compactificarea $\overline{\mathcal{M}}_g$ a spațiului $\mathcal{M}_g$ ca și spațiul de parametri al curbelor **stabile** de gen g .
- 1990: Interacțiunea cu fizica teoretică modernă (**teoria corzilor**).
Particulele punctuale clasice sunt înlocuite de corzi (obiecte 1-dimensionale) care se mișcă în spațiu de-a lungul unor curbe algebrice!



- 1990: Kontsevich demonstrează **conjectura Witten** privind numerele de intersecție ale claselor tautologice peste $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ (Medalie Fields 1994).
- 2005: Madsen-Weiss determină **coomologia stabilă** a lui $\mathcal{M}_g$.
- >2005: Okounkov-Pandharipande: **inelul tautologic** al lui $\mathcal{M}_g$ (Medalie Fields 2006); **Dinamică** peste $\mathcal{M}_g \Rightarrow$ Mirzakhani (Medalie Fields 2014).

- În ultimele două secole, spațiul $\mathcal{M}_g$ a fost studiat non-stop cu metode îmbinând geometria, analiza, teoria numerelor, sistemele dinamice, topologia, fizica teoretică. Progresele decisive au fost obținute combinând **toate** aceste metode.
- David Mumford: *When [Oscar Zariski] spoke the words **algebraic variety**, there was a certain resonance in his voice that said distinctly that he was looking into a secret garden. I immediately wanted to be able to do this too ... Especially, I became obsessed with a kind of passion flower in this garden, the **moduli space of Riemann**.*



Ce fel de spațiu este $\mathcal{M}_g$?

- Pentru o varietate algebrică netedă și compactă X , cel mai important invariant (după dimensiunea $d = \dim(X)$) este **dimensiunea Kodaira** care măsoară complexitatea lui X . Fie $K_X := \Omega_X^d$ **fibratul canonic** al formelor olomorfe de dimensiune maximă peste X . Numărul acestor forme **pluricanonice** este asimptotic dat de

$$\dim H^0(X, K_X^{\otimes \ell}) \sim \ell^{\kappa(X)},$$

unde $\kappa(X) \in \{-\infty, 0, 1, \dots, \dim(X)\}$ este **dimensiunea Kodaira** a lui X .

Definition

O varietate X este **unirațională**, dacă admite o parametrizare dominantă $\mathbb{P}^n \twoheadrightarrow X$. O varietate X este **uniriglată** dacă orice două puncte x, y în X pot fi unite printr-o curbă rațională.

- **Spatiul proiectiv** $\mathbb{P}^n$ este unirational. Dacă X uniratională/uniriglată $\Rightarrow \kappa(X) = -\infty$. Când $\kappa(X) = \dim(X)$, spunem că X **este de tip general**.
- Varietățile uniraționale sunt ușor de înțeles, depinzând de **parametri liberi**, care nu sunt supuși unor ecuații algebrice suplimentare.

Conjectura Severi

- Chestiunea fundamentală: Care este dimensiunea Kodaira a lui $\mathcal{M}_g$?

Theorem

(Severi 1915) $\mathcal{M}_g$ este unirațională pentru $g \leq 10$.

- Severi conjecturează că $\mathcal{M}_g$ ar fi unirațională pt. orice g (adică există $\mathbb{P}^{3g-3} \twoheadrightarrow \mathcal{M}_g$)! Ar însemna că o curbă generică de gen g poate fi descrisă explicit în termeni depinzând de parametri liberi.



Francesco Severi (1879-1961)

- Exemplu: $\mathcal{M}_3$. O curbă generică de gen 3 este o curbă plană de grad 4: $C = \{\sum_{i+j+k=4} a_{ijk} x^i y^j z^k = 0\}$. Variind coeficienții a_{ijk} liber, obținem (aproape) toate curbele algebrice de gen 3.

Theorem

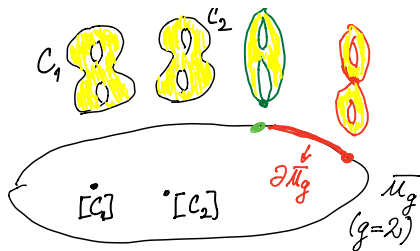
(Harris, Mumford 1982-1987) $\mathcal{M}_g$ este de tip general pentru $g \geq 24$!



Rezultatul lui Harris-Mumford a fost o surpriză majoră. Conjectura Severi s-a dovedit a fi **maximal falsă**!

- $\mathcal{M}_g$ este uniratională pentru $g = 11, \dots, 15$. Ce se întâmplă pentru $17 \leq g \leq 23$?
- **Conjectura pantei** (Harris-Morrison 1990): $\mathcal{M}_g$ este uniriglată pentru $g < 23$. Ar însemna că $\kappa(\mathcal{M}_g) = -\infty$ pentru $g < 23$.

- Spațiul $\mathcal{M}_g$ nu este compact, însă admite o compactificare $\overline{\mathcal{M}}_g$ parametrizând **curbe stabile** (având singularități nodale). Frontiera $\Delta := \overline{\mathcal{M}}_g \setminus \mathcal{M}_g$ este un **divizor**, adică o hipersuprafață în spațiul de moduli.



- Fibratul canonic al lui $\overline{\mathcal{M}}_g$ este dat de $K_{\overline{\mathcal{M}}_g} = 13\lambda - 2[\Delta]$, unde λ este clasa **fibratului Hodge** definit prin $\lambda([C]) = \bigwedge^g H^0(\Omega_C)$, pentru fiecare curbă C .
- **Întrebare esențială:** Este clasa $13\lambda - 2[\Delta]$ **pozitivă** peste $\overline{\mathcal{M}}_g$? Există o **hipersuprafață** D în $\overline{\mathcal{M}}_g$, astfel încât $13\lambda - 2[\Delta] = [D] \geq 0$?

Divizori D peste $\overline{\mathcal{M}}_g \iff$ condiții geometrice pt. curbe algebrice de gen g .
 Pentru a arăta că $\mathcal{M}_g$ este de tip general, este suficient a găsi un divisor D peste $\overline{\mathcal{M}}_g$ cu clasa $[D] = s\lambda - [\Delta]$, astfel încât $s < \frac{13}{2}$. Constanta s este **panta** divisorului D .

- Cum construim divizori de **pantă mică**?

Theorem

(Harris-Mumford 1982) Divizorul peste $\overline{\mathcal{M}}_g$ definit de următoarea condiție $D := \{[C] : C \text{ este o acoperire a lui } \mathbb{P}^1 \text{ cu } \frac{g+1}{2} \text{ foi}\}$ are panta $6 + \frac{12}{g+1}$.

- $6 + \frac{12}{g+1} < \frac{13}{2} = s(K_{\overline{\mathcal{M}}_g}) \iff g \geq 24$. În acest caz $\overline{\mathcal{M}}_g$ este de tip general.
- **Conjectura pantei** (Harris-Morrison 1990) Fiecare divisor $D \subset \overline{\mathcal{M}}_g$ are panta $s \geq 6 + \frac{12}{g+1}$.
- O consecință ar fi: $\overline{\mathcal{M}}_g$ de tip general $\iff g \geq 24$.

Theorem

(Farkas 2006-2009) Conjectura pantei este falsă pentru $g \geq 10$.

Dimensiunea Kodaira a lui $\mathcal{M}_{22}$ și $\mathcal{M}_{23}$

Theorem

(Farkas-Jensen-Payne 2020) Ambele spații $\mathcal{M}_{22}$ și $\mathcal{M}_{23}$ sunt de tip general.



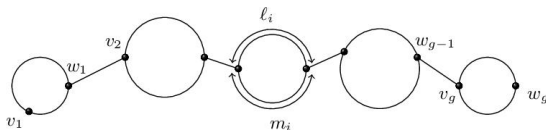
În ambele cazuri am construit un divisor $D \subset \overline{\mathcal{M}}_g$ având panta $s < \frac{13}{2}$.

- Pentru $g = 22$ divisorul $D \subseteq \overline{\mathcal{M}}_{22}$ constă din acele curbe C de gen 22 care admit o scufundare $C \hookrightarrow \mathbb{P}^6$ de grad 25, care stă pe o [hipersuprafață cuadrică](#) în $\mathbb{P}^6$.
- Panta divisorului D este $s = \frac{17121}{2636} = 6.495... < 6.5$.

Spații de moduli și geometrie tropicală

Divizorul $D \subseteq \overline{\mathcal{M}}_{22}$ constă din acele curbe care admit $C \hookrightarrow \mathbb{P}^6$ stând pe o cuadrică. În demonstrație (179 pagini), partea cea mai dificilă este de a exclude că fiecare curbă admite o astfel de scufundare ([Transversalitate!](#)). Pentru asta folosim **geometrie tropicală**.

- **Geometrie tropicală**: Nou domeniu al geometriei: adunarea a două numere este înlocuită cu maximul celor două numere, iar multiplicarea este înlocuită cu adunarea. Curbele algebrice sunt înlocuite cu **curbe tropicale**, reprezentate ca și reuniuni de segmente. Cele mai importante caracteristici ale curbelor algebrice se păstrează, în particular orice problemă de transversalitate poate fi **tropicalizată**. Condiția de transversalitate este studiată la nivel tropical, de unde și consecințele geometrice.



Dimensiunea Kodaira a lui $\mathcal{M}_{16}$

Theorem

(Farkas-Verra 2024) Spațiul $\mathcal{M}_{16}$ este uniriglat. În particular, dimensiunea Kodaira a lui $\mathcal{M}_{16}$ este negativă.



- Dimensiunea Kodaira a lui $\mathcal{M}_g$ e necunoscută pentru $g = 17, \dots, 21$.
- Printr-un punct general $[C] \in \overline{\mathcal{M}}_{16}$ trece o curbă rațională $[C] \in \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{16}$. Această curbă se poate construi **explicit** când $[C]$ stă pe doi divizori explciți D_1 și D_2 în $\overline{\mathcal{M}}_{16}$. Un complicat argument de **deformare** arată ca această curbă se poate deforma în afara acestor divizori, acoperind și cazul când $[C] \in \overline{\mathcal{M}}_{16}$ este un punct general.

Curba vieții- în stilul lui Mihai Eminescu (ChatGPT, versiunea gratis):

Nu-i scrisă-n cărți, nici în ecuații,
Acea curbată, tainică ființă —
Un gen g greu, născut din trepidații,
Ce scapă minții orice biruință.

Nu-i chip s-o pui în forme explicite,
Nici s-o reduci la linii și tăceri —
E curba vieții, plină de ispite,
Cu noduri, ramuri, lacrimi și căderi.

Cine ești tu, spațiu de moduli,
Ce-aduni în tine tot ce-a fost și vei fi?
Cu straturi largi, tăceri și vestibuli,
Tu-nchizi un rai de geometrii pustii.

Crește miezul tainic al ființei,
Genul se-ntinde — g devine mare,
Și-atunci, în haina grea a neființei,
Tu ești de tip general — o întrupare.

Sfârșit!

