

Oktaeder des Grauens

Aufgabenstellung:

Ein Oktaeder ist ein regelmäßiges Polyeder, dessen Oberfläche aus acht kongruenten gleichseitigen Dreiecken besteht. Jedes Oktaeder kann einem Würfel so einbeschrieben werden, dass die Eckpunkte des Oktaeders in den Mittelpunkten der Seitenflächen des Würfels liegen. Von dem in der *Abbildung 1¹* dargestellten Oktaeder $ABCDS_1S_2$ sind die Eckpunkte $A(13 | -5 | 3)$, $B(11 | 3 | 1)$, $C(5 | 3 | 7)$ und $S_1(13 | 1 | 9)$ gegeben. Dieses Oktaeder ist auf die oben genannte Art dem abgebildeten Würfel mit den Ecken P_1 bis P_8 einbeschrieben.

- a) Den Abstand zweier paralleler Seitenflächen eines Oktaeders nennt man „Dicke des Oktaeders“.

Berechnen Sie die Dicke des abgebildeten Oktaeders als Abstand des Punktes C von der Ebene ABS_1 .

- b) *Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte P_6 und P_8 des abgebildeten Würfels.*

- c) Der Mittelpunkt der Strecke \overline{AB} sei M_{AB} , der Mittelpunkt der Strecke \overline{CD} sei M_{CD} ; g sei die Gerade, die durch diese Punkte M_{AB} und M_{CD} verläuft.

Das Oktaeder wird um die Gerade g als Drehachse so gedreht, dass sich der Punkt $A(13 | -5 | 3)$ in die neue Position $A'(12 + 2\sqrt{2} | -1 + \sqrt{2} | 2 + 2\sqrt{2})$ bewegt.

Zeigen Sie, dass der zugehörige Drehwinkel $\alpha = 90^\circ$ beträgt.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes B' als neue Position des Eckpunktes B nach der Drehung.

- d) Durch

$$E_0 : 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 9 \cdot (2a - 5) = 0, \quad a \in \mathbb{R},$$

sei eine Schar von Ebenen ${}_aE_a$ gegeben; h sei die Gerade, die durch die Punkte S_1 und $S_2(5 | -3 | 1)$ verläuft.

Zeigen Sie, dass jede Ebene E_a der Schar orthogonal zur Geraden h verläuft.

Bestimmen Sie den Schnittpunkt P_a der Ebene E_a mit der Geraden h .

[Zur Kontrolle: $P_a(13 - 4a | 1 - 2a | 9 - 4a)$]

Für $0 < a \leq 1$ schneidet die Ebene E_a von dem abgebildeten Oktaeder eine Pyramide mit der Spitze S_1 ab (siehe *Abbildung 2²*).

Ermitteln Sie das Volumen V_a der abgeschnittenen Pyramide.

Lösungen dieser Aufgabe finden Sie im Internet, beispielsweise unter <http://www.myquilt.de/al/07zabi/aufg/odg/lodglk.htm>

¹ Im Buch Abb. 4.63 links

² Im Buch Abb. 4.63 rechts