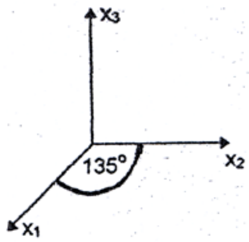
Spielplatzaufgabe

Aufgabenstellung:

Die Grundfläche eines Spielplatzes liegt in der x_1x_2-Ebene. Auf ihm steht eine innen begehbare, senkrechte, quadratische Pyramide aus Holz mit den Eckpunkte A(2|8|0), B(12|11|0), C(9|20|0), D(0|17|0) und der Spitze S(6|14|10).

Paralleles Sonnenlicht fällt in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ auf den Spielplatz.

a) Zeichnen Sie in einem Koordinatensystem das Schrägbild der Pyramide (Querformat; Längeneinheit 1 cm; Verkürzungsfaktor in x_1-Richtung $\frac{1}{2}\sqrt{2}$;
Zeichenbereich $-8 \le x_2 \le 18$; $-7{,}5 \le x_3 \le 7{,}5$).
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S', auf den der Schatten der Pyramidenspitze fällt.
Zeichnen Sie den Pyramidenschatten in das vorhandene Koordinatensystem ein.
Auf dem Spielplatz wird ein Hang aufgeschüttet, der in der Ebene E: $x_1+2x_2+4x_3 - 14 = 0$ liegt. Veranschaulichen Sie die Ebenen E mit Hilfe ihrer Spurgeraden.
Der Schatten S* der Pyramidenspitze fällt jetzt auf den Hang. Bestimmen Sie S*.
Zeichnen Sie den neuen Pyramidenschatten ein.



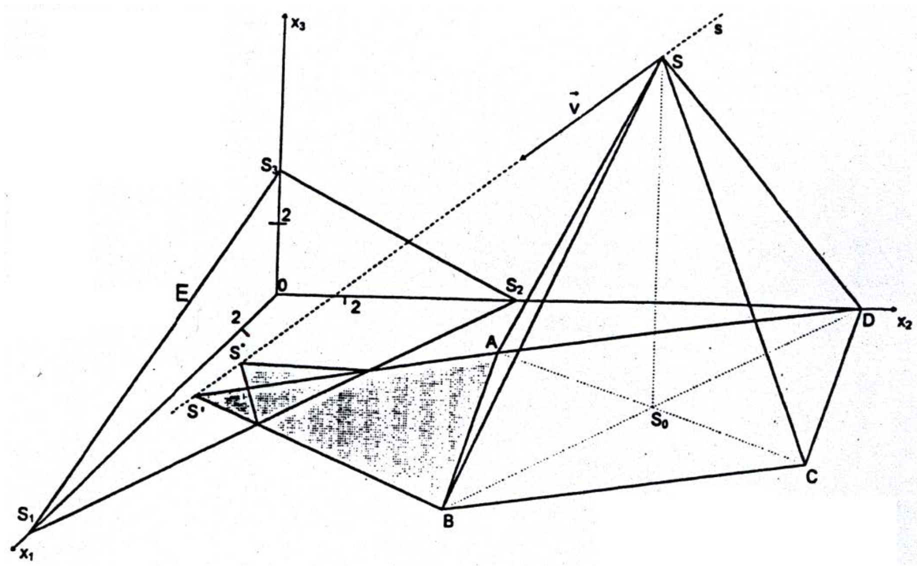
b) Über den gesamten Spielplatz verläuft eine Seilbahn, deren Seil vom Punkt P(-2|-8|16) zum Punkt Q(58|92|6) führt; vom Durchhang des Seiles wird abgesehen.
Berechnen Sie den Abstand des Seiles von der Symmetrieachse der Pyramide.
Begründen Sie, dass das Seil über der Grundfläche der Pyramide verläuft.

c) In der Pyramide ist parallel zum Boden eine Platte befestigt, die in der Mitte eine kreisförmige Öffnung mit dem Durchmesser d = 2,4 hat.
Ein großer Schaumstoffball hat den Radiuis r = 1,5.
Beim Aufräumen muss der Ball nach oben durch die Öffnung gedrückt werden.
In welcher Höhe ist die Platte angebracht, wenn sie sich so weit oben wie möglich befindet und der Ball entspannt in der Öffnung liegt?

d) Der Schaumstoffball aus Teilaufgabe c) liegt nun auf dem Spielplatz auf R(12|76|0), wird von der Sonne beschienen und wirft einen Schatten.
Veranschaulichen Sie den Sachverhalt, wie er sich in der Ebene $x_1 = 12$ darstellt.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes des Ballschattens, der am weitesten von R entfernt ist.

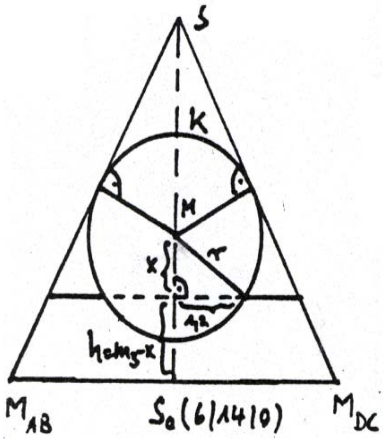
Lösungshinweise:

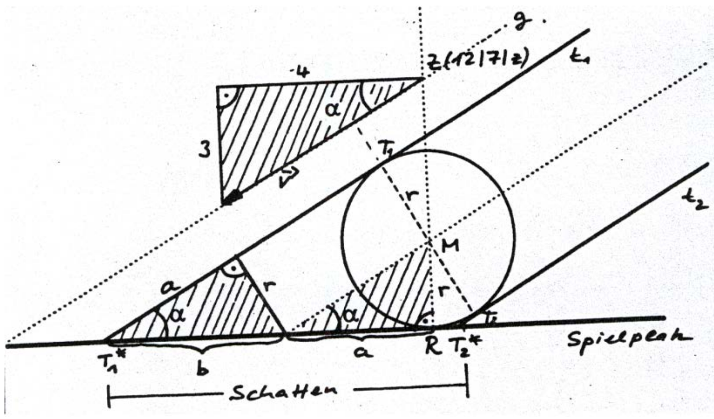
a) Schrägbild vgl. nächste Seite. Weitere Ergebnisse: S'($6\frac{2}{3}$|0), S*(6|2|1)



b) Abstand des Seiles ist $\frac{26}{\sqrt{34}} \approx 4{,}46$. Wenn dieser Abstand kleiner als $\frac{1}{2}\overline{AB}$ ist, verläuft des Seil über der fraglichen Grundfläche: Dies ist erfüllt wegen $\frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{3}{2}\sqrt{10} > \frac{26}{\sqrt{34}}$.

c) Höhe der Platte ist 5,6.





Links Skizze zu c) Rechts Skizze zu d)

d) T_1* ist der Punkt des Ballschattens, der von R am weitesten entfernt ist; es gilt T_1*= (12|2,5|0)