# Klassifikation ebener affiner Abbildungen

Die Analyse und Klassifikation der affinen Abbildungen der Ebene ist ein hervorragendes Beispiel für das, was Freudenthal „lokales Ordnen" nennt. Die affinen Abbildungen spielen eine Rolle bei der Klassifikation der Band- und Flächenornamente, einem wunderschönen mathematischen Gebiet, das man auf vielen Abstraktionsniveaus von der Grundschule bis zur Universität studieren kann. Flächenornamente kennt man unter anderem von den arabischen Pflasterungen (z. B. in der Alhambra) oder von den Graphiken Eschers. Für eine ausführlichere, elementare Behandlung vgl. Henn (2012, Kap. 3.4 und 3.5). Der Ansatz der mathematischen Klassifikation solcher Ornamente ist die Unterscheidung nach ihrer Symmetriegruppe, d. h. der Gruppe der Abbildungen, die das Ornament invariant lassen. Voraussetzung hierfür ist die folgende Klassifikation der ebenen affinen Abbildungen.

## Fixelemente affiner Abbildungen

a) **Affine Abbildung** $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch $\overrightarrow{OX'} = A \cdot \overrightarrow{OX} + \vec{c}$

Zugehörige Vektorabbildung $\alpha^* : V^2 \to V^2$ ist dann definiert durch $\vec{x}' = A\vec{x}$

Beachte: $\alpha : X \to X'$ via $\overrightarrow{OX} \to \overrightarrow{OX'}$, dagegen $\alpha^* : \overrightarrow{OX} \to \overrightarrow{O'X'}$

b) **Fixpunkte affiner Abbildungen** sind Lösungen des LGS $(A - E)\cdot\vec{x} = -\vec{c}$
Für $\alpha$ = Id gibt es 3 Fälle für Fixpunktmengen (im Folgenden FP für Fixpunkt):
- Fixpunktegerade (FPG) (dann ist $\alpha$ eine Achsenaffinität)
- Genau ein Fixpunkt
- Kein Fixpunkt

Begründen Sie diese Fallunterscheidung!

c) **Eigenwerte und Eigenvektoren der zugehörigen Vektorabbildung**
Zur Klassifikation der Abbildungen ist die Betrachtung von Eigenwerten und Eigenvektoren der zugehörigen Vektorabbildung nötig:
Ist f eine Fixgerade, so wird ihr Richtungsvektor $\vec{m}$ auf eine Vielfaches $\lambda\vec{m},\ \lambda \neq 0$ abgebildet.
Diese Überlegung führt zu den Begriffen *Eigenvektor* (EV), *Eigenwert* (EW) und *Eigenraum* (ER).
Die Kenntnis der EV und EW ist also *notwendig* für die Bestimmung der Fixgeraden.

EV-Gleichung: $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \left(A - \lambda E\right)\vec{x} = 0$ mit $\vec{x} \neq 0$. Die nichttriviale Lösbarkeit dieser Gleichung ist äquivalent zur Bedingung $\det\left(A - \lambda E\right) = \lambda^2 - 2a_1b_2\lambda + \det(A) = 0$.

4 Fälle:
- 2 verschiedene EW mit jeweils eindimensionalen ER
- 1 EW
  - mit eindimensionalen ER
  - mit zweidimensionalen ER (= $V^2$)
- kein EW

Hier zeigt sich der Unterschied zwischen geometrischer und algebraischer Vielfachheit von $\lambda$.

**Satz:** $\alpha$ hat 1 als EW $\Leftrightarrow$ $\alpha$ hat keinen FP oder $\alpha$ hat FPG

**Beweis:** $\alpha$ hat 1 als EW $\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a_1-1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2-1 & 0 \end{array}\right)$ ist nicht trivial lösbar

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a_1-1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2-1 & c_2 \end{array}\right)$ ist unlösbar oder mehrfach lösbar

d) **Fixgeraden**
Der folgende Abschnitt „Klassifikation und Normalform“ liefert auch die Fixgeraden.

## Klassifikation und Normalformen

**Gegeben:** affines KS $\{O;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2\}$, affine Abbildung $\alpha: \vec{x} = A\vec{x} + \vec{c}$

**Ziel:** Abbildungstyp, Normalform bezüglich eines angepassten KS $\left\{O;\ \vec{f}_1,\ \vec{f}_2\right\}$ (das natürlich i. A. nicht kartesisch ist).

Bestimme Fixpunkte, Eigenwerte und Eigenräume von $\alpha$. Es bedeute im Folgenden $ER_\lambda$ Eigenraum zum Eigenwert $\lambda$.

**Fall 1:** Es existiert eine Fixpunktgerade f mit Richtungsvektor $\vec{v}$

**1a:** Nur $\lambda_1 = 1$ ist EW

**1a1:** dim $ER_1$ = 2 $\alpha$ ist die ***Identität***

**1a2:** dim $ER_1$ = 1, $ER_1 = \langle\vec{v}\rangle$

Wähle das KS $\{O;\ \vec{v},\ \vec{w}\}$ mit $O \in f$, $\vec{w} \notin \langle\vec{v}\rangle$

Es gilt: $O' = O$, $\vec{v}' = \vec{v}$, $\vec{w}' = a\vec{w} + k\vec{v}$, $a, k \neq 0$. Wäre a ≠ 1, so hätten wir a als weiteren Eigenwert (betrachte die zugehörige Matrix!). Also ist a = 1 und wir haben:

$$\alpha: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\vec{x} \qquad \textbf{\textit{Scherung}}$$

Fixgeraden sind f und alle Parallelen zu f.

Bezüglich der neuen Basis $\left\{O;\ \vec{v},\ \frac{1}{k}\vec{w}\right\}$ gilt

$$\alpha: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\vec{x}$$

**1b:** 2 EW $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda$ (≠ 0, 1)

Wähle KS mit $O \in f$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ mit $ER_1 = \langle\vec{v}\rangle$ und $ER_\lambda = \langle\vec{w}\rangle$

$$\alpha: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\vec{x} \qquad \textbf{\textit{Parallelstreckung}}$$

speziell: $\lambda = -1$ ***Schrägspiegelung***

Fixgeraden sind f und alle Geraden mit RV $\vec{w}$.

Abbildungen des Falls 1 heißen ***Achsenaffinität.*** Sie sind durch die Achse a und ein Paar Punkt P und Bildpunkt P' gegeben.

**Fall 2:** Es existiert genau ein Fixpunkt F. Wähle $O = F$, jetzt ist 1 *kein* EW.

**2a:** 2 EW $\lambda_1$, $\lambda_2$ ($\neq 0, 1$)

Wähle KS $\{F, \vec{v}, \vec{w}\}$ mit zugehörigen EV $\vec{v}, \vec{w}$

$$\alpha : \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \vec{x} \qquad \textbf{\textit{Eulersche Affinität}}$$

Genau 2 Fixgeraden durch F mit Richtungen $\vec{v}, \vec{w}$.

**2b:** 1 Eigenwert $\lambda$ ($\neq 0, 1$)

**2b1:** dim $ER_\lambda = 2$, d. h. $ER_\lambda = V^2$

Wähle KS $\{F, \vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ mit $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ linear unabhängig (sonst beliebig).

$$\alpha : \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \vec{x} \qquad \textbf{\textit{zentrische Streckung}}$$

speziell $\lambda = -1$ ***Punktspiegelung***

Fixgeraden sind genau die Geraden durch F

**2b2:** dim $ER_\lambda = 1$, d. h. $ER_\lambda = \langle \vec{v} \rangle$

Wähle KS $\{F, \vec{v}, \vec{w}\}$

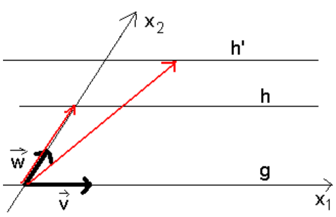
Es gilt $\vec{w}\,' = a\vec{w} + b\vec{v}$ mit a, b $\neq 0$. Damit haben wir

$\alpha : \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \vec{x}$. Da nur ein EW existiert, muss $b = \lambda$ sein! Also gilt

$$\alpha : \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{\lambda} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} \qquad \textbf{\textit{Scherstreckung}}$$

Wähle speziell $\vec{w} = \frac{1}{a}\vec{w}$, dann gilt bezüglich $\{F, \vec{v}, \vec{w}\}$ noch einfacher

$$\alpha : \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \vec{x}$$




Es gibt genau eine Fixgerade $g : \vec{x} = \tau\vec{v}, \ \tau \in \mathbb{R}$. Weitere kann es nicht geben; infrage kämen nur noch echte Parallele h zu g. Wegen der Abbildungsgleichung ist jedoch $h' \cap h = \varnothing$ (vgl. nebenstehende Skizze).

**2c:** Kein Eigenwert (also auch keine Fixgerade)

Wir suchen eine Basis $\left\{F,\vec{v},\vec{w}\right\}$, bezüglich der die Abbildungsmatrix möglichst einfache Form hat:

(1) Wähle $\vec{v}\neq 0$ beliebig, $\vec{w}=p\cdot A\vec{v}+q\vec{v}$ mit p, q $\in\mathbb{R}$ beliebig, aber mit p $\neq$ 0 (trickreicher Ansatz!). Da $\vec{v}, A\vec{v}$ linear unabhängig sind (es gibt ja keine EW!), sind $\vec{v},\vec{w}$ stets linear unabhängig.

(2) Damit gilt zunächst $A\vec{v}=-\frac{q}{p}\vec{v}+\frac{1}{p}\vec{w}$ (*)

und weiter $A\vec{w}=pA\left(A\vec{v}\right)+qA\vec{v}$.

Es gilt $A\left(A\vec{v}\right)= s\cdot A\vec{v}+t\cdot\vec{v}$ mit bestimmten Zahlen s, t $\in\mathbb{R}$, die nur von $\vec{v}$ abhängig sind.

Damit schreiben wir weiter:

$A\vec{w}=p\left(sA\vec{v}+t\vec{v}\right)+qA\vec{v}=\left(ps+q\right)A\vec{v}+pt\vec{v}$.

Jetzt setzen wir (*) für $A\vec{v}$ ein und erhalten:

$$A\vec{w}=\left(ps+q\right)\left(-\frac{q}{p}\vec{v}+\frac{1}{p}\vec{w}\right)+pt\vec{v}=\left[-\left(ps+q\right)\frac{q}{p}+pt\right]\vec{v}+\left(s+\frac{q}{p}\right)\vec{w}$$

$$=-p\underbrace{\left[s\frac{q}{p}+\left(\frac{q}{p}\right)^2-t\right]}_{\odot}\vec{v}+\left(s+\frac{q}{p}\right)\vec{w} \qquad (**)$$

Der Term $\odot$ in der eckigen Klammer ist eine quadratische Gleichung für $\frac{q}{p}$. Würde diese quadratische Gleichung eine Lösung besitzen, so wäre $A\vec{w}$ Vielfaches von $\vec{w}$, was nicht geht (da ja kein EW existiert). Also ist die Diskriminante der quadratischen Gleichung negativ, also $s^2 + 4\,t < 0$.

p, q sind noch frei wählbar (es ist nur p $\neq$ 0 nötig). Wähle jetzt p und q eindeutig durch die Gleichungen

$$\frac{1}{p}=-\sqrt{\underbrace{-\left(\frac{s}{2}\right)^2-t}_{>0}}=:b \quad\text{und}\quad \frac{q}{p}=-\frac{s}{2} \quad\text{und}\quad a:=\frac{s}{2}=-\frac{q}{p}.$$

Damit sind sogleich die beiden Werte a und b definiert, und es stehen jetzt in den Gleichungen (*) und (**):

$A\vec{v}=+a\vec{v}+b\vec{w}$.

$$A\vec{w}=-p\left[s\cdot\left(-\frac{s}{2}\right)+\left(\frac{s}{2}\right)^2-t\right]\vec{v}+\left(s-\frac{s}{2}\right)\vec{w}=-p\cdot\left(-\left(\frac{s}{2}\right)^2-t\right)\vec{v}+\left(+\frac{s}{2}\right)\vec{w}$$

$$=-\frac{1}{b}\cdot b^2\vec{v}+a\vec{w}=-b\vec{v}+a\vec{w}$$

Bezüglich der so bestimmten Basis $\left\{F;\ \vec{v},\ \vec{w}\right\}$ gilt also

$$\alpha: \vec{x}' = \begin{pmatrix} a & -b \\ +b & a \end{pmatrix} \vec{x}.$$

Definieren wir noch die Zahlen r und φ durch $r^2 := a^2 + b^2$, $a =: r \cdot \cos(\varphi)$, also auch $b = r \cdot \sin(\varphi)$, so erhalten wir die übliche Darstellung mit einer „Drehmatrix“

$$\alpha: \vec{x}' = r \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \vec{x}$$

***affine Drehstreckung***, speziell ***affine Drehung*** bei r = 1 (***Drehung*** für r = 1 und kartesisches KS)

**Fall 3:** Es gibt keinen Fixpunkt, also ist $\lambda_1 = 1$ Eigenwert

**3a**: Es gibt 2 Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda(\neq 0,1)$

Es gelte $ER_1 = \langle \vec{v} \rangle$, $ER_\lambda = \langle \vec{w} \rangle$. Wähle KS $\{O; \vec{v}, \vec{w}\}$, O beliebig. Damit gilt

$$\alpha: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Da keine Fixpunkte existieren, muss $c_1 \neq 0$ sein.

Falls eine Fixgerade existiert, so muss sie den RV $\vec{v}$ oder $\vec{w}$ haben. Für P(a|b) gilt $P'(a + c_1 \mid \lambda b + c_2)$ und damit $\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} c_1 \\ (\lambda - 1)b + c_2 \end{pmatrix}$. Wir nehmen an, f sei eine Fixgerade. Für $P \in f$ gilt dann $\overrightarrow{PP'} \parallel \vec{v}$ oder $\parallel \vec{w}$. Es gibt also zwei Möglichkeiten:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ (\lambda - 1)b + c_2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow b = -\frac{c_2}{\lambda - 1} \text{ oder}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ (\lambda - 1)b + c_2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$, das kann aber nie sein, da $c_1 \neq 0$.

Es gibt also genau eine Fixgerade f zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ mit $\vec{v}$, nämlich

$$f: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{c_2}{\lambda - 1} \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wähle einen neuen Ursprung $O \in f$, also ist auch $O' \in f$. Sei $\vec{v} = \overrightarrow{OO'}$.
Damit gilt bezüglich KS $\{O; \vec{v}, \vec{w}\}$

$$\alpha: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ ***affine Schub-Schrägspiegelung***

Speziell $\lambda = -1$: ***affine Schubspiegelung*** (Verkettung von Achsenaffinität und Verschiebung)

**3b:** Nur Eigenwert $\lambda_1 = 1$

$\boxed{\textbf{3b1:}}$ $\dim ER_1 = 2,\ \ ER_1 = V^2$

$$\alpha : \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \textbf{\textit{Verschiebung}}$$

Wähle neues KS $\left\{ O;\ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},\ \vec{w} \right\}$, dann erhalten wir die einfachste Darstellung

$$\alpha : \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{3b2:}}$ $\dim ER_1 = 1,\ \ ER_1 = \langle \vec{v} \rangle$

Wähle O beliebig, $\vec{w} = \overrightarrow{OO'}$, KS $\{O;\ \vec{v},\ \vec{w}\}$ mit $\vec{w}\,' = a\vec{w} + b\vec{v}$. Jetzt gilt

$$\alpha : \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da nur 1 EW existiert, ist a = 1, wegen dim $ER_1$ = 1 ist $b \neq 0$, also

$$\alpha : \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{\textit{Schubscherung}}$$

Wähle das neue KS $\left\{ O;\ \vec{v},\ \frac{1}{b}\vec{w} \right\}$. Dann vereinfacht sich die Darstellung zu

$$\alpha : \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \circ \gamma \text{ mit einer Scherung } \gamma \text{ und einer Verschiebung } \beta.$$

Es gibt keine Fixgeraden: Infrage kämen nur solche mit RV $\vec{v}$. Diese bleiben bei der Scherung fest und werden bei der Verschiebung *echt* verschoben, können also nicht fix sein.