Quadratische Formen

Mathematiker möchten gerne ordnen und klassifizieren. Wenn wir die behandelten Kegelschnitte Ellipse, Parabel und Hyperbel mit „algebraischen" Augen betrachten, so fällt auf, dass jede Kurve eine Gleichung $f(x, y) = 0$ hat, bei der die Variablen höchsten in der Potenz 2 auftreten: In ihrer einfachsten Form waren es $y = x^2$ für die Parabel, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ für die Ellipse und (je nach Wahl des Koordinatensystems) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ oder auch $y = \frac{1}{x}$, also $x \cdot y = 1$, für die Hyperbel. Welche „allgemeine" Gleichung umfasst alle konkreten Beispiele? Die allgemeine Aufgabe lautet, man bestimme alle Punkte der Ebene, deren Koordinaten einer quadratischen Gleichung

$$a \cdot x^2 + b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2 + d \cdot x + e \cdot y + f = 0$$

mit Koeffizienten $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ sowie mit Variablen x und y genügen. Die linke Seite dieser Gleichung nennt man eine *quadratische Form* in $\mathbb{R}^2$, die Lösungsmenge der Gleichung eine *Kurve zweiter Ordnung* oder eine (zweidimensionale) *Quadrik*. Eine „echte" quadratische Form liegt natürlich nur vor, wenn mindestens einer der Koeffizienten a, b oder c ungleich Null ist. Die drei bekannten (oben erwähnten) Kurven sind Kurven zweiter Ordnung und damit Lösungsmengen geeigneter quadratischer Formen. Dies gilt auch für die anderen Kegelschnitte in Abb. 5.59. (Bestimmen Sie zugehörige quadratische Formen!)

Auf den ersten Blick erwartet man, dass eine quadratische Form mit ihren sechs Parametern zu neuen Kurven führt. Wir werden jedoch sehen, dass das nicht so ist, sondern dass wir schon alle möglichen Lösungsmengen kennengelernt haben. Der „Trick" zum Nachweis wird darin bestehen, dass man eine vorgegebene quadratische Form durch Wahl eines passenden Koordinatensystems auf eine der bekannten „Normalformen" bringt. Wir orientieren uns an der speziellen quadratische Form $y - a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ mit $a \neq 0$, deren Lösungsmengen genau die aus der Sekundarstufe I bekannten Parabeln sind; jede dieser quadratischen Formen können wir auf die Normalform $y - x^2 = 0$ bringen. Die folgende Klassifikation ist sicher nicht die mathematisch eleganteste Form,[1] sie hat dafür den Vorteil der Elementarität. Wir verändern jeweils die Basis durch (affine) Basistransformationen, wobei wir am Ende genau die bekannten Kegelschnitte bekommen. Dass wir affine und keine kartesischen Koordinaten-Transformationen verwenden, ändert den Typ dieser Kurven nicht.

[1] Der mathematisch befriedigende, da verallgemeinerbare Weg führt über die Darstellung $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} + \vec{b} \cdot \vec{x} + c$ mit einem Vektor $\vec{x}$, seiner Transponierten $\vec{x}^T$, einer symmetrischen Matrix A, einem Koeffizientenvektor $\vec{b}$ und einer reellen Konstanten c einer quadratischen Form Q. In unserem Fall sind Matrix und Vektoren zweidimensional. Der allgemeine Fall ist n-dimensional mit „Hyperflächen 2. Ordnung" oder „Quadriken" im $\mathbb{R}^n$. Die Klassifikation der Quadriken geschieht dann durch geeignete Basistransformationen, wobei die n reellen Eigenwerte der symmetrischen Matrix A die wesentliche Rolle spielen.

Wir gehen von der Gleichung $a \cdot x^2 + b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2 + d \cdot x + e \cdot y + f = 0$ für die Punkte unserer Quadrik aus. Durch geeignete Koordinatenwechsel vom System $\{x, y\}$ in ein System $\{x', y'\}$ vereinfachen wir diese Gleichung und gelangen zu den schon bekannten Kegelschnitten. Wir gehen schrittweise vor:

a. Es gelte $a = b = c = 0$. Jetzt ist die Quadrik je nach dem Wert von d, e und f eine Gerade, die leere Menge oder ganz $\mathbb{R}^2$. Beschreiben Sie dies genauer!

b. Ist $a = 0$, aber $c \neq 0$, so kann man durch Vertauschen von x und y erreichen, dass der Koeffizient bei x^2 ungleich Null ist.

c. Wenn $a = c = 0$, aber $b \neq 0$ ist, so führen wir durch $x = x'$ und $y = x' + y'$ neue Koordinaten x', y' ein. Unsere Gleichung wird jetzt zu

$$b \cdot x \cdot y + \ldots = b \cdot x' \cdot \left(x' + y'\right) + \ldots = b \cdot x'^2 + b \cdot x' \cdot y' + \ldots$$

d. Nach b. und c. können wir voraussetzen, dass der neue Koeffizient a' bei x^2 ungleich Null ist. Nach Division der Gleichung durch a' können wir ab jetzt annehmen, dass für den Koeffizienten bei x^2 gilt $a = 1$.

e. Wir schreiben wieder x, y anstelle von x', y'. Jetzt haben wir die quadratische Form $x^2 + b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2 + d \cdot x + e \cdot y + f$. Die Transformation $x = x' - \frac{b}{2} \cdot y'$, $y = y'$ bewirkt

$$x^2 + b \cdot x \cdot y + \ldots = (x' - \tfrac{b}{2} \cdot y')^2 + b \cdot (x' - \tfrac{b}{2} \cdot y') \cdot y' + \ldots = x'^2 + c \cdot y'^2 + \ldots,$$

d. h. dass $b = 0$ ist und das gemischte Glied $x' \cdot y'$ verschwindet. Wieder mit den alten Variablen-Namen haben wir jetzt die quadratische Form

$$x^2 + c \cdot y^2 + d \cdot x + e \cdot y + f$$

erreicht.

f. Die nächste Transformation lässt den Term mit x verschwinden: Wir setzen hierfür für die neuen Variablen $x = x' - \frac{d}{2}$, $y = y'$. Damit nimmt unsere quadratische Form die Gestalt

$$x^2 + c \cdot y^2 + e \cdot y + f$$

an. Für y ist dieser Trick allerdings nur anwendbar, wenn $c \neq 0$ ist. Wir müssen jetzt also eine Fallunterscheidung in $c = 0$ und $c \neq 0$ durchführen.

$c = 0$: Damit haben wir die quadratische Form $x^2 + e \cdot y + f$. Gilt auch $e = 0$, so haben wir die einfache Gleichung $x^2 + f = 0$ zu untersuchen. Ist $f < 0$, so ist die Lösungsmenge ein Paar von zwei Parallelen zur y-Achse, für $f = 0$ die y-Achse und für $f > 0$ die leere Menge. Gilt dagegen $e \neq 0$, so erhalten wir die Gleichung $y = \frac{-1}{e} \cdot (x^2 + f)$, deren Lösungsmenge eine Parabel ist.

$c \neq 0$: Analog zu Schritt f. setzen wir $x = x'$ und $y = y' - \frac{e}{2 \cdot c}$. Dies bewirkt $e = 0$, so dass auch der Term mit y verschwindet. Wieder mit den alten Variablen-Namen haben wir die Gleichung $x^2 + c \cdot y^2 + f = 0$ erhalten.

Diese Gleichung hat die folgenden Lösungsmengen:

- Für $c > 0$ gibt es die drei Fälle leere Menge für $f > 0$, den Punkt $P(0|0)$ für $f = 0$ und eine Ellipse für $f < 0$.

– Für $c < 0$ und $f = 0$ haben wir das Paar sich schneidender Geraden $x = \pm\sqrt{-c} \cdot y$. Für $c < 0$ und $f \neq 0$ formen wir die Gleichung weiter um zu $(x - \sqrt{-c} \cdot y) \cdot (x + \sqrt{-c} \cdot y) = -f$, deren Lösungsmenge sich nach der letzten Tranformation $x' = x - \sqrt{-c} \cdot y,\; y' = x + \sqrt{-c} \cdot y$ als Hyperbel erweist.

Die Analyse hat gezeigt, dass die quadratischen Formen (bis auf Trivialfälle) genau unsere Kegelschnitte beschreiben. Quadratische Formen im $\mathbb{R}^3$ sind eine lohnende, wenn auch kompliziertere Arbeit, die auf interessante dreidimensionale Gebilde wie Ellipsoide, Paraboloide, Hyperboloide usw. führt. Auch die in dem folgenden Abschnitt 5.5 untersuchten Sattelflächen sind dreidimensionale Quadriken.[2] Für eine Klassifikation ist allerdings unsere Methode nicht geeignet.

Mit den heute üblichen DGS kann man auch Kegelschnitte zeichnen lassen. Üblicherweise gibt es einen Menüpunkt „Kegelschnitt aus fünf Punkten“, Abb. 6.1 zeigt dies für das DGS DynaGeo. Man klickt fünf Punkte mit der Maus an, und sofort zeichnet das DGS den zugehörigen Kegelschnitt. Die Frage ist nur, wie macht das unser DGS? Wieso reichen fünf Punkte, obwohl die allgemeine quadratische Form sechs Parameter hat?

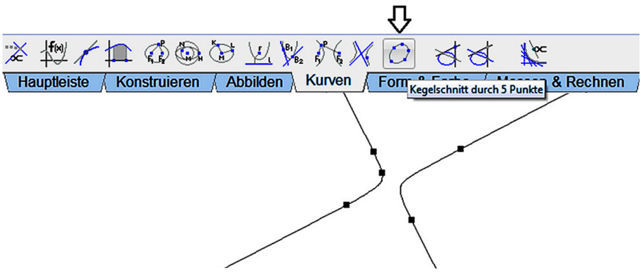

Abb. 6.1: Kegelschnitt aus fünf Punkten mit einem DGS

[2]Solche und weitere durch polynomiale Gleichungen erzeugte dreidimensionale Gebilde können Sie mit dem Programm „Surfer“ erzeugen, erhältlich unter http://www.imaginary2008.de/surfer.php?lang=en.