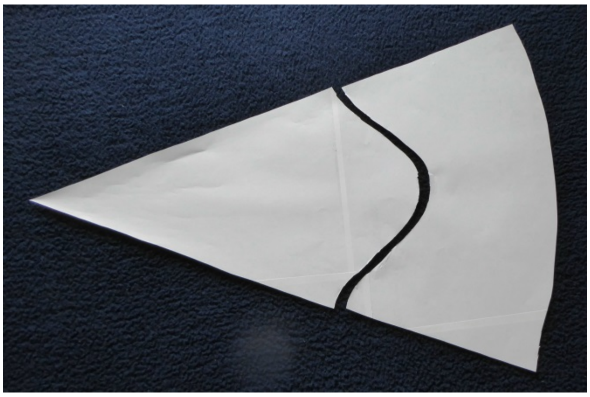
Schultütenaufgabe

a. Experimentelle Untersuchung

Zunächst ist es sinnvoll, experimentell vorzugehen:



Nach den Maßen der verwendeten Schultüte wird ein Mantel aus dünnem Papier um die Tüte mit dem Montageschaum gelegt und dann die fragliche Schnittfläche mit einem Bleistift nachgefahren (wird genauer als das Schneiden mit einem Messser). Das links stehende Photo zeigt das Ergebnis. Nun kann man wieder wie beim Wurstpellen-Beispiel empirische Kurvengleichungen aufstellen und überprüfen.

b. Mathematische Analyse der Situation (Jörg Meyer, Hameln)

Für den Kegel werden folgende vereinfachende Annahmen gemacht:

Die Kegelspitze sei $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$; der Grundkreis habe den Radius r und den allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix} r\cdot\cos\varphi \\ r\cdot\sin\varphi \\ -h \end{pmatrix}$. Die Kegelhöhe ist also $2\cdot h$; die Länge s der Mantellinie ergibt sich aus $s^2 = r^2 + 4\cdot h^2$.

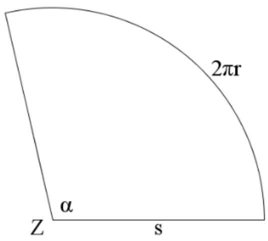
Der allgemeine Punkt einer Mantellinie ist durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} r\cdot\cos\varphi \\ r\cdot\sin\varphi \\ -2\cdot h \end{pmatrix}$ gegeben. Schneidet man die Mantellinie mit der Ebene zu $y = x$ (d.h. man wählt einen Schnittwinkel von 45^0), so bekommt man λ aus der Gleichung $\lambda\cdot r\cdot\sin\varphi = h - 2\cdot\lambda\cdot h$; man erhält

$$\lambda = \frac{h}{2\cdot h + r\cdot\sin\varphi}.$$

Der allgemeine Punkt der Schnittkurve ergibt sich also als

$$P(\varphi) = \frac{h\cdot r}{2\cdot h + r\cdot\sin\varphi}\cdot\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Nun muss man den Kegel abwickeln. Das Resultat ist ein Kreissektor mit dem Mittelpunkt Z, dem Radius s und dem Teilumfang $2\cdot\pi\cdot r$; der zugehörige Mittelpunktswinkel ermittelt sich wegen $\frac{\alpha}{360°} = \frac{2\cdot\pi\cdot r}{2\cdot\pi\cdot s}$ zu $\alpha = 360°\cdot\frac{r}{s}$.



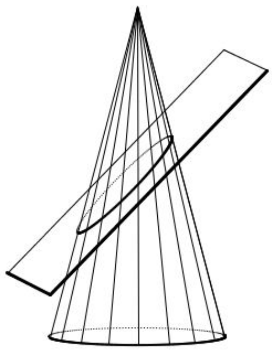
Nun bildet man die Punkte $P(\varphi)=\dfrac{h\cdot r}{2\cdot h+r\cdot\sin\varphi}\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$ der Schnittkurve ab auf den abgewickelten Mantel; das Resultat heiße $Q(\varphi)$.

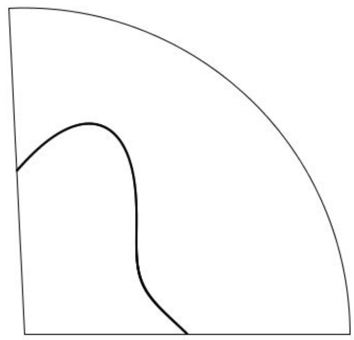
Dem Winkel φ entspricht der Winkel ψ auf dem Kreissektor; wegen $\dfrac{\varphi}{360°}=\dfrac{\psi}{\alpha}$ ist

$\psi=\dfrac{\alpha}{360°}\cdot\varphi$.

Der Abstand d von $P(\varphi)$ zur Kegelspitze ist genauso groß wie der Abstand zwischen Z und $Q(\varphi)$. Daher ist $Q(\varphi)=\begin{pmatrix}d\cdot\cos\psi\\ d\cdot\sin\psi\end{pmatrix}$.

Hier das Resultat für den Fall, dass die Ebene den Zylinder in einer echten Ellipse schneidet:





Die in a. experimentell gefundene Kurve (beim Papierbeispiel in a. ist $\alpha\approx 43^\circ$) ist jetzt analytisch beschrieben (im rechten Bild ist $\alpha=90°$).

Den Mantel (aus Papier oder analytisch) kann man natürlich mehrfach dem Kegel umwickeln, dann wird die Kurve mehrfach durchlaufen. Besonders schön wird es, wenn $\alpha=90°$ ist; dann lässt sich wie im folgenden Bild der Kreissektor viermal darstellen: