H. Hähl Februar 2017

Koordinatenkriterium für Parallelogramme

Die folgende Überlegung gehört in den Kontext der Einführung von Vektoren als Klassen parallelgleicher Pfeile und der Zuordnung eines Koordinatentupels zu einer Pfeilklasse. Wir beschränken die Diskussion hier auf die Ebene. Einem Pfeil $\vec{AB}$ wird dabei das aus den Koordinaten der Punkte A und B gebildete Paar

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

zugeordnet. Dabei ist — auch für die gedankliche Durchdringung des Arbeitens mit Äquivalenzklassen — wichtig einzusehen, dass dies nur von der Pfeilklasse von $\vec{AB}$ abhängt, d.h. dass zwei parallelgleichen Pfeilen auf diese Weise dasselbe Paar zugeordnet wird. In den mir vorliegenden Texten zur Didaktik, z.B. H.W. Henn – A. Filler, Didaktik der analytischen Geometrie und Linearen Algebra, Berlin 2015, Abschnitt 3.3.4, S. 113 ff., und in den Schulbüchern finden sich dazu nur relativ vage Hinweise. Meist wird dabei auf den Bezug von Pfeilklassen zu Verschiebungen rekurriert, wobei diese als Komposition von Verschiebungen in Richtung der Koordinatenachsen dargestellt werden. Wollte man aber eine solche Argumentation mathematisch präzise durchführen, müsste man einiges an Eigenschaften von Verschiebungen bereitstellen (zum Beispiel die Dilatationseigenschaft, dass jede Strecke parallel zu sich verschoben wird, die Gruppeneigenschaft usw.). Dies würde auf Schulniveau zu weit führen. Es ist natürlich wichtig, dennoch den Bezug zu Verschiebungen herzustellen, um die Anschauung zu festigen, aber zur Begründung dieser zentralen Tatsache der Unabhängigkeit der Zuordnung eines Koordinatentupels von den verschiedenen Repräsentanten ein und derselben Pfeilklasse sollte man vielleicht einer Argumentation den Vorzug geben, die auf dem mathematischen Niveau der Schüler bei Einführung des Vektorbegriffs in voller Strenge durchführbar ist. Eine solche soll im folgenden vorgestellt werden.

Da zwei nichtkollineare Pfeile parallelgleich sind, wenn sie die zwei gegenüberliegenden Seiten eines Parallelogramms bilden, läuft das auf folgende Aussage hinaus.

Lemma. *Seien A, B, C, D vier Punkte der Ebene, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Dann sind die folgenden Ausssagen äquivalent:*

(P) *Die vier Punkte bilden ein Parallelogramm, mit $AB \parallel DC$ und $AD \parallel BC$.*

(K) *Es ist*

$$x_D - x_A = x_C - x_B \quad \textit{und} \quad y_D - y_A = y_C - y_B\,.$$

Das Lemma ist auch Hintergrund für Aufgaben in Schulbüchern, in denen zum Beispiel überprüft werden soll, ob vier mit ihren Koordinaten gegebenen Punkte ein Parallelogramm bilden. Als Grundlage für die Lösung solcher Aufgaben wird dabei nicht mehr zur Verfügung gestellt als die Vorstellung, dass die Pfeile zu gegenüberliegenden Seiten des Parallelogramms gleich lang sind und in dieselbe Richtung weisen. Das Kriterium (K) wird dann im wesentlichen suggeriert. Es aber daraus herzuleiten, stößt auf dieselben Schwierigkeiten wie ein elementargeometrischer Ansatz, der weiter unten diskutiert wird.

Nun zum Beweis des Lemmas. Die Richtung (K) $\Longrightarrow$ (P) ist einfach. (K) impliziert nämlich sofort, dass die Geraden AD und BC entweder beide "senkrecht" sind oder gleiche Steigung haben, also jedenfalls parallel sind. Durch Umformung von (K) erhält man $x_B - x_A = x_C - x_D$ und $y_B - y_A = y_C - y_D$ und damit entsprechend die Parallelität von AB und DC.

Für die Richtung (P) $\Longrightarrow$ (K) ist man zunächst versucht, geometrisch mit den "Steigungsdreiecken" zu den Pfeilen $\vec{AD}$ und $\vec{BC}$ zu arbeiten. Da sie paarweise parallele Seiten haben und gleichlange Hypotenusen, sind sie (etwa nach dem Kongruenzsatz WSW) kongruent. Dies zeigt dann aber zunächst nur, dass die behaupteten Gleichheiten in (K) dem Betrage nach gelten. Der Nachweis, dass auch die Vorzeichen übereinstimmen, ist elementargeometrisch verwickelt (mit Anordnungs- und Zerlegungseigenschaften der Ebene, die immer gleich auf eine Vielzahl von Fällen hinauslaufen). (Dennoch ist die Kongruenz der Steigungsdreiecke natürlich eine wichtige Einsicht, die man schon wegen der Anschaulichkeit den Schülern und – in Didaktikkursen – den angehenden Lehrern nicht vorenthalten sollte.)

Für einen einfachen und völlig stringenten Beweis von (P) $\Longrightarrow$ (K) schlage ich jedoch folgendes Vorgehen vor. Sei C' der Punkt, dessen Koordinaten $x_{C'}$ und $y_{C'}$ die Gleichungen

$$x_D - x_A = x_{C'} - x_B \quad \text{und} \quad y_D - y_A = y_{C'} - y_B \tag{1}$$

erfüllen. Nach der bereits bewiesenen Implikation (K) $\Longrightarrow$ (P) ist dann $ABC'D$ ein Parallelogramm. Die Geraden BC und BC' sind somit beide parallel zu AD, die erste wegen der Voraussetzung (K), die zweite, weil $ABC'D$ ein Parallelogramm ist. Wegen des Parallelenaxioms stimmen somit die Geraden BC und BC' überein. Ebenso ergibt sich $DC = DC'$. Also ist C, als Schnittpunkt der Geraden BC und DC, gleich dem Schnittpunkt C' der Geraden BC' und DC'. Mit $C = C'$ folgt aus (1) die behauptete Beziehung (K).

Ich plädiere nicht unbedingt dafür, das mit Schülern so zu erörtern, obwohl es möglich wäre. Für Schüler wäre allenfalls ungewohnt, den Punkt C' einzuführen, der zunächst in der Problemstellung gar nicht vorhanden ist (eine Schwierigkeit, die auch bei Mathematikstudenten immer wieder zu beobachten ist). Aber angehende Lehrer sollten meines-erachtens an so zentralen Stellen nach Möglichkeit Argumente kennenlernen, die sowohl auf dem jeweiligen Unterrichtsniveau zugänglich als auch völlig schlüssig sind. Nur dann können sie vollständig ermessen, wieviel didaktische Reduktion an dem gerade in Rede stehenden Punkt nötig ist.