Probeklausur

Aufgabe 1

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
wahr	✓	✓			✓	✓	✓	✓			✓
falsch			✓	✓					✓	✓	

Aufgabe 2

b) "$\Rightarrow$" trivial, da $[a,b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\forall\, a,b \in \mathbb{R}$ mit $a \le b$.

"$\Leftarrow$" $\mathcal{E} := \{[a,b] \mid b \ge a\} \cup \{\emptyset\}$ ist $\cap$-stabiler Erzeuger der σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Aus der Vorlesung: zwei (σ-endliche) Maße übereinstimmen, wenn $\mu(A) = \nu(A)$ $\forall A \in \mathcal{E}$.

~~$\forall A \in$~~ Für $\emptyset$: $\mu(\emptyset) = \nu(\emptyset) = 0$ ✓

e) $Z = \min(X, Y)$.

$1 - F_Z(u) = \mathbb{P}(\min(X,Y) > u) = \mathbb{P}(X > u, Y > u)$

$\overset{\text{unabh.}}{=} \mathbb{P}(X>u)\,\mathbb{P}(Y>u) = e^{-\lambda_1 u} \cdot e^{-\lambda_2 u}$

$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)u}$.

Also $F_Z(u) = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)u}$,

die Verteilungsfunktion von $Exp(\lambda_1+\lambda_2)$.

j) $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] \iff Corr(X,Y) = 0$.
In der Vorlesung gab es Gegenbeispiele,
z.B:

$$U \sim \mathcal{U}([0,2\pi]),$$

$$X = \sin U, \quad Y = \cos U.$$

$Corr(X,Y) = 0$, aber X und Y sind nicht unabhängig.

Aufgabe 3

Sehen Sie das Sript und auch Klenke, Kapitel 5.2 für Beweise.

Aufgabe 4

a) Ja, F_X hat die Dichte

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy \quad ,$$

da

$$\begin{aligned} F_X(c) &= \mathbb{P}(X \le c) = \mathbb{P}(X \le c, Y \in \mathbb{R}) \\ &= \int_{(-\infty, c] \times \mathbb{R}} f(x,y)\,dx\,dy \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{-\infty}^{c} \Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy}_{f_X(x)} \Big) dx \\ &= \int_{-\infty}^{c} f_X(x)\,dx \qquad \forall\ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ebenso, F_Y hat die Dichte $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx$.

Nun:

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \underbrace{\int_0^x 2e^{-x-y}\,dy}_{= 2e^{-x}(1-e^{-x})}, & x > 0 \end{cases}$$

$$= 2e^{-x}(1-e^{-x}) \mathbb{1}_{\{x \ge 0\}}$$

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx = \begin{cases} 0 , & y \leq 0 \\ \int_y^{+\infty} 2e^{-x-y}\,dx , & y > 0 \end{cases}$$

$$= 2e^{-2y}\,\mathbb{1}_{\{y>0\}}$$

b) Wir rechnen

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x\, 2e^{-x}(1-e^{-x})\,dx$$

$$= 2\underbrace{\int_0^{+\infty} x e^{-x}\,dx}_{=1} - 2\underbrace{\int_0^{+\infty} x e^{-2x}\,dx}_{1/2}$$

$$= 2 - 1/2 = 3/2$$

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y)\,dy = \int_0^{+\infty} y\, 2e^{-2y}\,dy = 1/2$$

$$\mathbb{E}[XY] = \iint xy\, f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{+\infty} 2y e^{-y}\left(\int_y^{+\infty} x e^{-x}\,dx\right)dy$$

Nun ist $\int_y^{+\infty} x e^{-x} dx = y e^{-y} + \underbrace{\int_y^{+\infty} e^{-x} dx}_{e^{-y}}$

$$= y e^{-y} + e^{-y},$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[XY] = \int_0^{+\infty} 2y e^{-y} \left(y e^{-y} + e^{-y} \right) dy$$

$$= \ldots = \underline{1}$$

Also bekommen wir:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

$$= 1 - 3/2 \cdot 1/2 = 1 - 3/4 = 1/4 \neq 0.$$

Die Zufallsvariablen sind korreliert.

Aufgabe 5

a)

$$\underline{\Omega} = \{ \underset{\text{gute}}{g}, \underset{\text{mäßige}}{m}, \underset{\text{schlechte}}{s} \} \times \{ \overset{\text{Sieg}}{s}, \overset{\text{kein Sieg}}{v} \}$$

Form

$$\underline{\mathcal{F}} = 2^{\Omega}$$

$\underline{\mathbb{P}}$: W-maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$, so dass

(1) • $\mathbb{P}(\{gs, gv\}) = 0.7$ → Kapitän in guter Form

(2) • $\mathbb{P}(\{ms, mv\}) = 0.2$ → mäßiger Form

(3) • $\mathbb{P}(\{ss, sv\}) = 0.1$ → schlechter

(4) • $\mathbb{P}(\underbrace{\{g, m, s\} \times \{s\}}_{\text{"Sieg"}} \mid \underbrace{\{gs, gv\}}_{\text{"in guter Form"}}) = 0.7$

(5) • $\mathbb{P}(\underbrace{\{g, m, s\} \times \{s\}}_{\text{"Sieg"}} \mid \underbrace{\{ms, mv\}}_{\text{"in mäßiger Form"}}) = 0.4$

(6) • $\mathbb{P}(\underbrace{\{g, m, s\} \times \{s\}}_{\text{"Sieg"}} \mid \underbrace{\{ss, sv\}}_{\text{"in schlechter Form"}}) = 0.2$

5. b) "Die Mannschaft gewinnt" $= \{gs, ms, ss\}$

$= $ "Sieg"

$$(4) \Leftrightarrow \mathbb{P}(\{gs\}) \Big/ \mathbb{P}(\{gs, gv\}) = 0.7$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\{gs\}) = 0.7 \times \mathbb{P}(\{gs, gv\}) \overset{(1)}{=} 0.49$$

$$(5) \Leftrightarrow \mathbb{P}(\{ms\}) \Big/ \mathbb{P}(\{ms, mv\}) = 0.4$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\{ms\}) = 0.4 \ \mathbb{P}(\{ms, mv\}) \overset{(2)}{=} 0.08$$

$$(6) \Leftrightarrow \mathbb{P}(\{ss\}) \Big/ \mathbb{P}(\{ss, sv\}) = 0.2$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\{ss\}) = 0.2 \times \mathbb{P}(\{ss, sv\}) \overset{(3)}{=} 0.02$$

Also $\mathbb{P}(\text{"Sieg"}) = \mathbb{P}(\{gs, ms, ss\})$

$$= \mathbb{P}(\{gs\}) + \mathbb{P}(\{ms\}) + \mathbb{P}(\{ss\})$$

$$= 0.49 + 0.08 + 0.02$$

$$= 0.59 \qquad (= 59\,\%)$$

5.c) $\mathbb{P}(\underbrace{\text{"Kapitän in guter Form"}}_{\{gs,\, gv\}} \mid \underbrace{\text{"kein Sieg"}}_{\{gv,\, mv,\, sv\}}) = ?$

$$\mathbb{P}(\text{"kein Sieg"}) = 1 - \mathbb{P}(\text{"Sieg"}) \overset{(b)}{=} 0.41$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\{gs, gv\} \mid \{gv, mv, sv\}) = \frac{\mathbb{P}(\{gv\})}{\mathbb{P}(\text{"kein Sieg"})}$$

Auch $\mathbb{P}(\{gv\}) \overset{(1)}{=} 0.7 - \mathbb{P}(\{gs\})$

$$\overset{(b)}{=} 0.7 - 0.49 = 0.21$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\text{" in guter Form"} \mid \text{"kein Sieg"}) = \frac{0.21}{0.41} = \frac{21}{41} \approx 50\%$$