Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik und Finanzmathematik

Prof. Dr. Dirk Becherer
Todor Bilarev, Peter Frentrup

Blatt 10
Sommersemester 2017
Version vom 19. Juni 2017

Übungen zur Stochastik 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Familie $N := (N_t)_{t\geq 0}$ von $\mathbb{N}_0$-wertigen Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ heißt Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$, falls N folgende vier Eigenschaften erfüllt:

a) $N_0 = 0 \quad \mathbb{P}$-fast sicher.

b) Für alle $0 \leq s < t$ gilt $(N_t - N_s) \sim \text{Poisson}(\lambda(t-s))$.

c) Für beliebige Zeitpunkte $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, mit $n \in \mathbb{N}$, ist die Familie der Zuwächse $\{N_{t_i} - N_{t_{i-1}} \mid 1 \leq i \leq n\}$ unabhängig.

d) Die Pfade $t \mapsto N_t$ sind $\mathbb{P}$-fast sicher rechtsstetig mit linksseitigen Grenzwerten (wofür *càdlàg* die übliche französische Abkürzung ist).

Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}$-fast sicher gilt: $\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \lambda$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien X_i für $i = 1, \ldots, n$ unabhängige Zufallsvariablen und $S := \sum_{i=1}^{n} X_i$. Zeigen Sie durch Berechnung der charakteristischen Funktionen von X_i und S, dass die folgenden Verteilungsfamilien faltungsstabil sind (d.h., die Verteilung von S gehört zur selben Verteilungsfamilie wie die von X_1).

a) $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$ mit $\lambda_i > 0$ für $i = 1, \ldots, n$.

b) $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ mit $\mu_i \in \mathbb{R}$ und $\sigma_i > 0$ für $i = 1, \ldots, n$.

c) X_i ist Gamma-verteilt mit Parametern $\alpha > 0$ und $r_i > 0$ für $i = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, reellwertiger, standard-Cauchy verteilter Zufallsvariablen (d.h., X_n besitze die Verteilungsdichte $f_{X_n}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$).

a) Zeigen Sie, dass für die charakteristische Funktion φ_{X_1} gilt:

$$\varphi_{X_1}(u) = e^{-|u|}, \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

b) Wie kann aus der Form von φ_{X_1} gefolgert werden, dass $X_1 \notin L^1(\mathbb{P})$?

c) Zeigen Sie, dass $\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ wiederum standard-Cauchy verteilt ist.

d) Erfüllt die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Voraussetzungen des starken Gesetzes der großen Zahlen? Gilt die Schlussfolgerung aus dem starken Gesetz der großen Zahlen?

Abgabe: Montag, 26. Juni 2017, vor der Vorlesung.
Die Lösungen können *in festen Zweiergruppen* abgegeben werden. Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten, da sie separat korrigiert werden. Auf jedes Blatt schreiben Sie bitte ihre Namen, Matrikelnummern und Übungsgruppe.