Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik und Finanzmathematik

Prof. Dr. Dirk Becherer
Todor Bilarev, Peter Frentrup

Blatt 11
Sommersemester 2017
Version vom 26. Juni 2017

Übungen zur Stochastik 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $X = (X_1, \dots, X_d)$ eine $\mathbb{R}^d$-wertige normalverteilte Zufallsvariable mit Kovarianzmatrix $\mathrm{Cov}(X) = Q$, die Diagonalform hat.
Beweisen Sie, dass die Koordinaten $X_1, \dots, X_d$ des Vektors X unabhängig sind.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Sei X eine $\mathbb{R}^d$-wertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Dichte $f_X : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$.

(i) Beweisen Sie im Fall $d = 1$, dass $Y := g(X)$ für eine differenzierbare, streng monotone Funktion $g : X(\Omega) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit folgender Dichte ist:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left|(g^{-1})'(y)\right| \cdot \mathbb{1}_{g(X(\Omega))}(y).$$

(ii) Verallgemeinern Sie Teil a) für allgemeine Dimensionen d.
Hinweis: Benutzen Sie die Transformationsformel für Riemann-Integralle.

b) Es seien U, V zwei unabhängige, auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Seien $R := \sqrt{-2 \log U}$, $X := R \cos(2\pi V)$ und $Y := R \sin(2\pi V)$. Beweisen Sie, dass X und Y unabhängige, standard-normalverteilte Zufallsvariablen sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte + 1 Zusatzpunkt)
Sei $(X, Y)^T$ ein bivariat normalverteilter Zufallsvektor mit Erwartungswertvektor $(0, 0)^T$, Korrelationskoeffizient $\rho := \mathrm{Corr}(X, Y) \in (-1, 1)$ und Varianzen $\sigma_X^2 > 0$ sowie $\sigma_Y^2 > 0$.

a) Bestimmen Sie die bedingte Dichte $f_{X|Y}(x \mid y)$ von X gegeben $Y = y$. Wie verhält sich diese, wenn ρ gegen 0, +1 oder −1 konvergiert? Interpretation?

b) Zeigen Sie, dass $Z = X/Y$ Cauchy-verteilt ist und bestimmen Sie die zugehörigen Parameter.

c) **(Zusatz)** Sei β so, dass $\cos(\beta) = \rho$ ist $(0 \leq \beta \leq \pi)$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}[XY < 0] = \beta/\pi$ gilt.

Aufgabe 4 (Präsenzaufgabe)

a) Sei $X = (X_1, \dots, X_d)$ eine $\mathbb{R}^d$-wertige normalverteilte Zufallsvariable mit Kovarianzmatrix $\mathrm{Cov}(X) = Q$ mit $\det(Q) = 0$. Zeigen Sie: Dann besitzt X keine Dichte.

b) Sei $X = (X_1, \dots, X_d) \sim \mathcal{N}(\mu, Q)$ mit $\mu \in \mathbb{R}^d$ und $\det(Q) \neq 0$. Berechnen Sie die Dichte von X.

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie.

c) Zwei reellwertige Zufallsvariablen sind genau dann identisch verteilt, wenn sie die gleiche charakteristische Funktion haben.

d) Seien X und Y jeweils normalverteilte reellwertige Zufallsvariablen. Dann gilt: X und Y sind unabhängig genau dann, wenn sie unkorreliert sind.

Abgabe: Montag, 3. Juli 2017, vor der Vorlesung.
Die Lösungen können *in festen Zweiergruppen* abgegeben werden. Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten, da sie separat korrigiert werden. Auf jedes Blatt schreiben Sie bitte ihre Namen, Matrikelnummern und Übungsgruppe.