Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik und Finanzmathematik

Prof. Dr. Dirk Becherer
Todor Bilarev, Peter Frentrup

Blatt 2
Sommersemester 2017
Version vom 25. April 2017

Übungen zur Stochastik 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $\Omega := [0,1)$. Zeigen Sie, dass es keine Abbildung $P : 2^\Omega \to [0,1]$ gibt, welche die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

a) $P[\Omega] = 1$,

b) $P\Big[\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big] = \sum_{k\in\mathbb{N}} P[A_k]$ für disjunkte $A_k \subset \Omega$, $k \in \mathbb{N}$, und

c) $P[A] = P[T_x(A)]$ für alle $A \in 2^\Omega$ und $x \in \mathbb{R}$, für $T_x : 2^\Omega \to 2^\Omega$ definiert durch

$$T_x(A) := \{a + x \bmod 1 \mid a \in A\} = \{y \in \Omega \mid y - x \bmod 1 \in A\}.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Äquivalenzrelation $\omega \sim \omega' :\Leftrightarrow \omega - \omega' \in \mathbb{Q}$ auf Ω.

Aufgabe 2 (5 Punkte + 1 Zusatzpunkt)
Sei $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra über Ω und seien $A, B, (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Ereignisse aus $\mathcal{F}$.

a) Zeigen Sie, dass für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $\mathcal{F}$ gilt:
   (i) (Monotonie) $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \le \mathbb{P}(B)$,
   (ii) (σ-Subadditivität) $\mathbb{P}\Big[\bigcup_{n\ge1} A_n\Big] \le \sum_{n\ge1} \mathbb{P}[A_n]$,
   (iii) (σ-Stetigkeit) Falls $A_n \downarrow A$, d.h. $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ und $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, so gilt

$$\mathbb{P}[A_n] \to \mathbb{P}[A] \quad \text{für } n \to \infty.$$

   (iv) Falls $A_n \to A$, d.h. $\mathbb{1}_{A_n}(\omega) \to \mathbb{1}_A(\omega)\ \forall \omega \in \Omega$, so gilt $\mathbb{P}[A_n] \to \mathbb{P}[A]$ für $n \to \infty$, wobei $\mathbb{1}_A(\omega) := \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ die Indikatorfunktion einer Menge ist.

b) (Zusatz) Zeigen Sie, dass eine normierte, additive Mengenfunktion $\mu : \mathcal{F} \to [0,1]$ (d.h. $\mu(\Omega) = 1$, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für disjunkte A, B), welche σ-stetig ist, auch ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte + 2 Zusatzpunkte)
In einer Urne liegen r rote und b blaue Kugeln mit $r > b$. Wir ziehen die Kugeln nacheinander (ohne Zurücklegen). Uns interessiert das Ereignis $A_{r,b}$, dass dabei nach jedem Zug stets (strikt) mehr rote als blaue Kugeln gezogen wurden.

a) Geben Sie einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum an, der das Problem gestaltet.

b) Was ist die Wahrscheinlichkeit von $A_{r,1}$, also bei einer blauen Kugel und $r > 1$ roten Kugeln?

c) Was ist die Wahrscheinlichkeit von $A_{4,2}$?

d) Was ist die Wahrscheinlichkeit von $A_{r,2}$?

e) (Zusatz) Was ist die allgemeine Wahrscheinlichkeit von $A_{r,b}$?

Aufgabe 4 (Präsenzaufgabe)
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sind folgende Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie.

a) Bei drei Würfeln ist die Wahrscheinlichkeit, einen Zweierpasch zu bekommen genau $\frac{15}{36}$.

b) Für beliebige Ereignisse $A, B \in \mathcal{F}$ ist $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$.

c) Es ist $\sigma(\{\Omega\}) = 2^\Omega$, wobei 2^Ω die Potenzmenge von Ω ist.

d) Aus $\mathbb{P}[A] = 0$ folgt $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[B]$ für Ereignisse $A, B \in \mathcal{F}$.

e) Aus $\mathbb{P}[A] = 1$ folgt $A = \Omega$, falls $|\Omega| < \infty$ und $A \in \mathcal{F}$.

f) Der Durchschnitt zweier σ-Algebren über Ω ist wiederum eine σ-Algebra über Ω.

g) Es gibt eine σ-Algebra mit 42 Elementen.

h) Seien μ und ν Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit $\mu((a, b]) = \nu((a, b])\ \forall\ a < b$. Dann ist $\mu = \nu$.

Abgabe: Mittwoch/Donnerstag, 3./ 4. Mai, 2017, **in der Übung**
Die Lösungen sind einzeln und auf getrennten Blättern zu bearbeiten, da sie separat korrigiert werden. Auf jedes Blatt schreiben Sie bitte ihren Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe.