

Übungen zur Stochastik 1

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Berechnen Sie die charakteristischen Funktionen der Zufallsvariablen X_k , wobei

- X_1 gleichverteilt auf $[-a, a]$, $X_1 \sim \mathcal{U}([-a, a])$ für $a > 0$, ist;
- X_2 normalverteilt, $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ für $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$, ist;
- X_3 binomialverteilt, $X_3 \sim \text{Bin}(n, p)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$, ist.

Für den letzten Aufgabenteil können Sie Satz 7.61, der nächsten Montag in der Vorlesung bewiesen wird, verwenden:

- Berechnen Sie jeweils die ersten drei Momente $\mathbb{E}[X_k]$, $\mathbb{E}[X_k^2]$ und $\mathbb{E}[X_k^3]$, für $k = 1, 2, 3$, mittels charakteristischer Funktion.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Ein Spieler startet mit dem Anfangskapital $K_0 = 1$. In jeder Runde $i = 1, \dots, n$ setzt er die Hälfte seines Kapitals ein. Es wird eine faire Münze geworfen (jede Runde unabhängig) und bei "Kopf" erhält er seinen Einsatz verdoppelt zurück, bei "Zahl" verliert er ihn.

- Stellen Sie das Kapital nach der n -ten Runde als $K_n = \prod_{i=1}^n R_i$ mit geeigneten, unabhängigen R_i dar.
- Weisen Sie nach, dass das Spiel fair ist in dem Sinne, dass $\mathbb{E}[K_n] = 1$ gilt.
- Zeigen Sie, dass dennoch $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = 0$ \mathbb{P} -fast sicher gilt.

Aufgabe 3 (Präsenzaufgabe)

- Sei $X = (X_1, \dots, X_d)$ eine \mathbb{R}^d -wertige Zufallsvariable und $Y = AX + b$ für $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ eine \mathbb{R}^m -wertige Zufallsvariable. Beweisen Sie, dass dann

$$\varphi_Y(u) = e^{i\langle u, b \rangle} \varphi_X(A^T u), \quad \text{für alle } u \in \mathbb{R}^m.$$

Finden Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel für die Behauptung:

- Sind X, Y reellwertige Zufallsvariablen und $Z := X + Y$, dann ist die charakteristische Funktion von Z das punktweise Produkt derer von X und Y , also $\varphi_{X+Y}(s) = \varphi_X(s) \cdot \varphi_Y(s)$ genau dann, wenn X und Y unabhängig sind.

Abgabe: Montag, 19. Juni 2017, vor der Vorlesung.

Die Lösungen können *in festen Zweiergruppen* abgegeben werden. Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten, da sie separat korrigiert werden. Auf jedes Blatt schreiben Sie bitte ihre Namen, Matrikelnummern und Übungsgruppe.