zu Schritt 2) im Beweis von Thm 8.2

2) • def. $\mathcal{E} := \{ I \mid I \text{ Intervall} \subset U, I = [a,b], (a,b], [a,b) \text{ o. } (a,b), a,b \in \mathbb{R} \}$

• Beh. Thm. 8.2 gilt in Dim 1: $\lambda_1(\varphi(A)) = \int_A |\det D\varphi(x)| \lambda_1(dx)$

┌ • def. LHS $=: \mu(A)$, RHS $=: \tilde{\mu}(A)$ für $A \in \mathcal{L}(U)$

• $\Rightarrow$ die Maße $\mu, \tilde{\mu}$ stimmen auf $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}(U)$ überein

┌ denn: für $[a,b] \in \mathcal{E}$ gilt das gew. Trafoformel für R-Integrale und Satz zur Gleichheit eigentlicher R-Integr. und Leb. Integrale (6.20).

für Intervalltypen $(a,b], [a,b), (a,b)$ per Approx. mit Stetigkeit von Maßen

zB $(a,b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$ └

• $\mathcal{E}$ ist $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{B}(U)$

• $\exists$ abzählbar viele abgeschl. Intervalle $I_n, n \in \mathbb{N}, \in \mathcal{E}$ s.d. $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$

┌ Wähle abgeschl. Teilintervalle von U mit rationalen Grenzen, jedes $p \in U$ ist in einem abzb. viel solche (ist kompakt) └

• Beh: Jedes $E_N := \bigcup_{n=1}^{N} I_n$ hat Darstellung $E_N = \dot{\bigcup}_{k=1}^{N_p} \tilde{I}_k$ für disj $\tilde{I}_k \in \mathcal{E}$

┌ $\tilde{I}_k = E_1$, Induktiv weil jeweils $E_N \setminus \bigcup_1^{N-1} E_i = ((E_N \setminus E_{N-1}) \setminus E_{N-2} \ldots) \setminus E_1$ darstellbar als endl. Vereinig disj. ~~abg~~ Intervalle aus $\mathcal{E}$.

(weil das ~~für~~ jeweils Intervall \ Intervalle gilt) └

• $\Rightarrow \mu(E_N) = \tilde{\mu}(E_N)$ wg. σ-Add. und $\mu(\tilde{I}_k) = \tilde{\mu}(\tilde{I}_k) \; \forall k$,

zudem gilt ~~und~~ $\overset{(\sim)}{\mu}(E_N) \leq \sum_1^{N(\omega)} \mu(\tilde{I}_k) < \infty$

(Altern.: ~~Lodo~~ $< \infty$ weil E_N kpt, und $\varphi(E_N)$ kpt

($\bigcup_1^N I_n$, I_n kpt)

(vgl ÜB 5, A1)

$\Rightarrow \mu = \tilde{\mu}$ auf $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}(U)$

$\Rightarrow$ (wg. Eind. der Vervollständigung, und da λ_1-Nullmengen per Konstr. von $\tilde{\mu}$ auch $\tilde{\mu}$-Nullmengen, also auch μ-Nullm. sind)

$\mu = \tilde{\mu}$ auf $\mathcal{L}(U) = \overline{\mathcal{B}(U)}^{\lambda_1}$ $\square$