Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik und Finanzmathematik

Peter Frentrup

Stochastik-Praktikum
Wintersemester 2017/2018

# Projektaufgaben Block 1

**Aufgabe 1 (Monte-Carlo-Näherung der Kreiszahl)**
Es soll die folgende Methode einer Monte-Carlo-Näherung für die Zahl $\pi$ implementiert werden: Man erzeugt $n$ auf dem Intervall $[-1,1]^2$ im $\mathbb{R}^2$ uniform verteilte Pseudo-Zufallszahlen und bestimme den Anteil derjenigen, die innerhalb des Einheitskreises liegen.

a) Überlegen Sie sich eine Formel zur näherungsweisen Berechnung von $\pi$ mit der Monte-Carlo-Methode und berechnen Sie damit $\pi$ approximativ für $n = 10^k$, $k = 1, \ldots, 6$.

b) Veranschaulichen Sie die Methode grafisch. Zeichnen Sie hierfür einen Plot von $[-1,1]^2$ mit Einheitskreis, in dem die Punkte innerhalb und außerhalb des Einheitskreises in unterschiedlichen Farben dargestellt sind. Benutzen Sie die `matplotlib.pyplot.text`-Funktion, um die Anzahl der jeweiligen Punkte in den Plot einzutragen.

c) Schreiben Sie das Ganze als eine Funktion in der Anzahl der Monte-Carlo-Iterationen und plotten Sie die relativen Fehler von b) gegen $k = \log_{10} n$.

d) Lösen Sie c) mit Sobol Quasi- statt Pseudo-Zufallszahlen mithilfe der Bibliothek `sobol_seq` (ggf. lokal zu installieren mit z.B. `pip install --user sobol_seq`) und vergleichen Sie die Ergebnisse, präsentiert in einem gemeinsamen Plot.

**Aufgabe 2 (Inversionsmethode und Monte-Carlo-Bänder)**
Es soll mit Hilfe der Inversionsmethode ein Sample von $n$ exponentialverteilten Zufallszahlen mit Parameter $\lambda = 1$ aus uniform auf $[0,1]$ verteilten Zufallszahlen erzeugt werden. Anschließend werden $N$ Monte-Carlo-Iterationen zur Konstruktion von Monte-Carlo-Bändern der zugehörigen Verteilungsfunktion durchgeführt.

a) Erzeugen Sie $n = 100$ auf $[0,1]$ uniform verteilte Pseudozufallszahlen und generieren durch die Inversionsmethode hieraus ein Sample von Exp(1)-verteilten Zufallszahlen.

b) Berechnen Sie die empirische Verteilungsfunktion des Samples mit Hilfe der *Ordnungsstatistik* und stellen Sie sie in einem Plot dar.

c) Plotten Sie als Kurve die theoretische Verteilungsfunktion ein.

d) Führen Sie $N = 100$ Monte-Carlo-Iterationen der Methode durch und zeichnen Sie die zugehörigen Monte-Carlo-Bänder in einer anderen Farbe in den Graphen mit ein.

**Aufgabe 3 (Monte-Carlo-Integration)**

a) Berechnen sie das Integral $\displaystyle\int_0^\infty x^2 \exp(-x)\,\mathrm{d}x\,.$

Berechnen Sie das Integral zuerst symbolisch (statt numerisch) mit der `sympy.integrate`-Funktion und berechnen sie dann den Wert.

Stellen sie den Integranden auf dem Intervall $[0, 10]$ grafisch dar.

b) Berechnen Sie das Integral näherungsweise mit der Monte-Carlo-Integration als empirisches zweites Moment für $n = 1000,\ 10\,000,\ 100\,000$ generierte Zufallszahlen.

c) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^\infty x^2 \exp(-x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^\infty x \exp(-x)\,\mathrm{d}x$$

gilt und nutzen Sie dies, um das Integral alternativ durch $2n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$ berechnen. Vergleichen Sie beide Ergebnisse.

d) Schreiben Sie eine Funktion, die in $N = 50$ Iterationen die beiden Methoden aus b) und c) für ein Sample vom Umfang $n = 10\,000$ durchführt und als Rückgabe die empirische Standardabweichung für beide Methoden ausgibt.

Können Sie die (theoretische) Standardabweichung der Methoden hier auch symbolisch exakt berechen?

**Hinweise zur Abgabe:**
Alle Dateien (PDF der Auswertung, Python-Code für jede einzelne Aufgabe) gepackt als Zip-Archiv mit dem Namen *UE1_Student1_Student2.zip* bis zum 7. 11. per E-Mail an *frentrup@math.hu-berlin.de* schicken.