Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik und Finanzmathematik

Peter Frentrup

Stochastik-Praktikum
Wintersemester 2017/2018

# Projektaufgaben Block 4

**Aufgabe 1 (Zeitreihen)**
Wir wissen, dass für $|a| < 1$,

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} a^j \varepsilon_{t-j}\,, \qquad t \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

die (schwach) *stationäre* AR(1)-Zeitreihe $X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t$ zum weißen Rauschen $(\varepsilon_t) \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$ ist.

a) **(Theorieteil)** Die Gleichung (1) ist für Computer-Simulationen ungeeignet. Warum? Berechnen Sie explizit die Verteilung von $X_0$ im Falle von standardnormalverteiltem weißen Rauschen $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

b) Plotten Sie die Autokorrelation $\rho(h)$ von $X$ für $h = 0, 1, 2, \ldots$
(i) für ein $a \in (0, 1)$ und (ii) für ein $a \in (-1, 0)$.

c) Implementieren Sie eine Funktion `autoCovariance(h, Xs)` zur Berechnung der empirischen Autokovarianz $\hat{c}(h)$ aus der Stichprobe `Xs` einer schwach stationären Zeitreihe.

d) Simulieren Sie stationäre AR(1)-Zeitreihen gemäß Teil a) für verschiedene Parameter $a$ und testen Sie damit ihre `autoCovariance(Xs)`-Implementierung. Plotten Sie die Ergebnisse.

e) Implementieren Sie den Yule-Walker-Parameterschätzer für AR($p$)-Zeitreihen als Funktion `estimateARparam(p, Xs)`.

f) Simulieren Sie den stationären AR(1)-Prozess

$$X_t = -0.95 X_{t-1} + \varepsilon_t\,, \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

für $t \in 1, \ldots, 100$, mit standardnormalverteiltem weißen Rauschen gemäß Teil a). Welche Schätzung $\hat{a}$ liefert hierzu `estimateARparam`?

g) Wir wollen die Güte des Yule-Walker-Schätzers beurteilen. Simulieren Sie hierzu 1000 mal (2) und erstellen Sie damit ein Histogramm des Yule-Walker-Schätzers $\hat{a}$.

Intepretieren Sie das Ergebnis.

**Aufgabe 2 (Ornstein-Uhlenbeck-Prozess)**
Ein Ornstein-Uhlenbeck-Prozess mit Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}$, Gleichgewichtsniveau $\mu \in \mathbb{R}$, Resilienz $\theta \in \mathbb{R}$ und Volatilität $\sigma > 0$ ist die Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$\mathrm{d}X_t = \theta(\mu - X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}B_t\,, \qquad X_0 = x_0\,. \tag{3}$$

Man kann zeigen (VL Stochastische Analysis), dass sich $X$ explizit mittels eines stochastischen Integrals darstellen lässt:

$$X_t = x_0 e^{-\theta t} + \mu\big(1 - e^{-\theta t}\big) + \int_0^t \sigma e^{\theta(s-t)}\,\mathrm{d}B_s\,. \tag{4}$$

Da $x_0$ deterministisch, also auch gaußsch ist, ergibt sich somit, dass $X$ ein Gaußprozess ist mit

$$\mathbb{E}[X_t] = x_0 e^{-\theta t} + \mu\big(1 - e^{-\theta t}\big) \quad \text{und} \quad \operatorname{Cov}(X_s, X_t) = \frac{\sigma^2}{2\theta}\big(e^{-\theta|s-t|} - e^{-\theta(s+t)}\big)\,. \tag{5}$$

a) Simulieren und Plotten Sie mehrere Ornstein-Uhlenbeck-Prozesse für verschiedene Parameter $\theta$ und $x_0$. Setzen Sie dabei $\mu = 0$ und $\sigma = 1$.
Beschreiben Sie kurz anhand der Plots den Einfluss des Parameters $\theta$ auf den Prozess.

Wir möchten die Resilienz $\theta$ eines Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses schätzen, von dem wir den Parameter $\mu = 0$ und $x_0$ kennen.

Dazu bezeichne $\mathbb{P}_T^\theta$ das Maß, unter welchem $\mathrm{d}X_t = -\theta X_t\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}B_t$, $t \in [0,T]$, gilt. Man kann zeigen (Satz von Girsanov, VL Stochastische Analysis), dass die beiden Maße $\mathbb{P}_T^\theta$ und $\mathbb{P}_T^0$ absolutstetig sind, mit Radon-Nikodym-Dichte (Likelihood)

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_T^\theta}{\mathrm{d}\mathbb{P}_T^0} = \exp\left(\frac{-\theta}{\sigma^2}\int_0^T X_s\,\mathrm{d}X_s - \frac{\theta^2}{2\sigma^2}\int_0^T X_s^2\,\mathrm{d}s\right)\,. \tag{6}$$

b) **(Theorieteil)** Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_T : C([0,T]) &\to \mathbb{R}\\ X &\mapsto \hat{\theta}_T(X)\end{aligned}$$

für die unbekannte Resilienz $\theta$ des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses $X$ (auf $[0,T]$).

c) Implementieren Sie den Schätzer $\hat{\theta}_T(X)$ als Funktion `estimateOUresilience(ts, Xs)`, deren Argumente ein (geordnetes) Array `ts` von Zeitpunkten $t_i$ und ein Array `Xs` von zugehörigen Werten $X_{t_i}$ sind. Benutzen Sie ggf. das Euler-Verfahren zur Berechnung von (stochastischen) Integralen.

d) Simulieren Sie für verschiedene Parameter $\theta, \sigma, x_0$ Ornstein-Uhlenbeck-Prozesse und testen Sie so ihre Implementierung des Schätzers $\hat{\theta}_T(X)$. Plotten Sie dazu auch jeweils den simulierten Pfad $(X_t)_{t\in[0,T]}$ mit der laufenden Schätzung $t \mapsto \hat{\theta}_t\big(X\big|_{[0,t]}\big)$, $t \in [0,T]$ (in je **zwei** Sub-Plots übereinander: oben $X$, unten $\hat{\theta}(X)$, mit gemeinsamer horizontaler Zeitachse).

e) Die Datei `ou.dat` beschreibt einen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess. Die erste Spalte sind Zeitpunkte $t_i$, die zweite Spalte enthält zugehörige Werte $X_{t_i}$. Schätzen Sie die Resilienz $\theta$ dieses Prozesses.

(Lesen Sie die Datei dazu bitte über den relativen Pfad `"../code/ou.dat"` ein.)

**Hinweise zur Abgabe:**
Alle Dateien (PDF der Auswertung, Python-Code für jede einzelne Aufgabe) gepackt als Zip-Archiv mit dem Namen *UE4_Student1_Student2.zip* bis zum 16. 1. per E-Mail an *frentrup@math.hu-berlin.de* schicken.